УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова (Днепропетр. нац. ун-т)

СРАВНЕНИЕ ТОЧНЫХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We investigate the correlation between the constants $K(\mathbb{R}^n)$ and $K(\mathbb{T}^n)$, where

$$K(G^n) := \sup_{\substack{f \in L^l_{p,p}(G^n) \\ \prod_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_p(G^n)} \neq 0}} \frac{\left\| D^\alpha f \right\|_{L_p(G^n)}}{\| f \|^{\mu_0}_{L_p(G^n)} \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|^{\mu_i}_{L_p(G^n)}}$$

is the exact constant in the Kolmogorov-type inequality; $\mathbb{R}$ — is the real line, $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$; $L^l_{p,p}(G^n)$ is a set of functions $f \in L_p(G^n)$ such that the partial derivative $D_i^{l_i} f(x)$ belongs to $L_p(G^n)$, $i = \overline{1, n}$, $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $D^\alpha f$ is a mixed derivative of the function f; $0 < \mu_i < 1$, $i = \overline{0, n}$, $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$. If $G^n = \mathbb{R}^n$, then $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i / l_i)$, $\mu_i = \alpha_i / l_i$, $i = \overline{1, n}$; if $G^n = \mathbb{T}^n$, then $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i / l_i) - \sum_{i=1}^n (\lambda / l_i)$, $\mu_i = \alpha_i / l_i + \lambda / l_i$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda \ge 0$. We prove that if $\lambda = 0$, then the equality $K(\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{T}^n)$ is true.

Досліджується взаємозв'язок між константами $K(\mathbb{R}^n)$ та $K(\mathbb{T}^n)$, де

$$K(G^n) := \sup_{\substack{f \in L^l_{p,p}(G^n) \\ \prod_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_p(G^n)} \neq 0}} \frac{\left\| D^\alpha f \right\|_{L_p(G^n)}}{\| f \|^{\mu_0}_{L_p(G^n)} \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|^{\mu_i}_{L_p(G^n)}}$$

— точна константа в нерівності типу Колмогорова; $\mathbb{R}$ — дійсна пряма, $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$; $L^l_{p,p}(G^n)$ — множина функцій $f \in L_p(G^n)$ таких, що частинна похідна $D_i^{l_i} f(x) \in L_p(G^n)$, $i = \overline{1, n}$, $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $D^\alpha f$ — мішана похідна функції f; $0 < \mu_i < 1$, $i = \overline{0, n}$, $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$. Якщо $G^n = \mathbb{R}^n$, то $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i / l_i)$, $\mu_i = \alpha_i / l_i$, $i = \overline{1, n}$; якщо $G^n = \mathbb{T}^n$, то $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i / l_i) - \sum_{i=1}^n (\lambda / l_i)$, $\mu_i = \alpha_i / l_i + \lambda / l_i$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda \ge 0$. Доведено, що при $\lambda = 0$ справджується рівність $K(\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{T}^n)$.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(\mathbb{R}^1 = \mathbb{R})$ — пространство измеримых функций f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с конечной L_p-нормой

$$\| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} | f(x) |^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{vrai} | f(x) |, & p = \infty. \end{cases}$$

Определим также пространство $L_p(\mathbb{T}^n)$ $(\mathbb{T}^1 = \mathbb{T} = [0, 2\pi])$ измеримых функций f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-периодических по каждой переменной, с конечной нормой

$$\| f \|_{L_p(\mathbb{T}^n)} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^n} | f(x) |^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{vrai} | f(x) |, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}^n$, $s \in [1, \infty]^n$, G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$. При $n = 1$ через $L_s^r(G)$ обозначим множество функций $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющих почти всюду локально абсолютно непрерывные производные $f^{(i)}$, $i = \overline{0, r-1}$ $(f^{(0)} = f)$, и таких, что $f^{(r)} \in L_s(G)$. Пусть теперь $n \ge 2$. Возьмем частную производную $D_i^{k_i} f(x)$ функции f по i-й переменной и зафиксируем все переменные, кроме i-й: $D_i^{k_i} f(x) = D_i^{k_i} f(x_i, y)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Через $L_{s_i}^{r_i}(G^n)$ обозначим множество функций $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что частные производные $D_i^{k_i} f$, $k_i = \overline{0, r_i - 1}$ $(D_i^0 f = f)$, локально абсолютно непрерывны как функции x_i почти для всех допустимых y, а $D_i^{r_i} f \in L_{s_i}(G^n)$, $L_s^r(G^n) = \bigcap_{i=1}^n L_{s_i}^{r_i}(G^n)$, и положим $L_{p,s}^r(G^n) = L_p(G^n) \bigcap L_s^r(G^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Как обычно, через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — бесконечно дифференцируемых финитных на $\mathbb{R}^n$.

Важную роль во многих вопросах анализа играют неравенства для норм промежуточных производных функций $f \in L_{p,s}^r(G)$ вида

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \le K \| f \|_{L_q(G)}^{\mu} \left\| f^{(r)} \right\|_{L_s(G)}^{1-\mu}, \tag{1}$$

где $k, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $k < r$, $\mu \in (0, 1)$, с неулучшаемыми константами

$$K = K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \mu) = \sup_{\substack{f \in L_{p,s}^r(G) \\ f^{(r)} \ne 0}} \frac{\left\| f^{(k)} \right\|_{L_q(G)}}{\| f \|_{L_p(G)}^{\mu} \left\| f^{(r)} \right\|_{L_s(G)}^{1-\mu}}. \tag{2}$$

Исследования многих математиков были посвящены вычислению констант (2) при различных значениях параметров G, k, r, q, p, s, μ. Одним из первых и наиболее ярких результатов в этом направлении является следующее неравенство А. Н. Колмогорова [1]:

при всех $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, для любой функции $f \in L_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R})$

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\| \varphi_r \|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/r}} \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/r} \left\| f^{(r)} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/r},$$

где φ_r — r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Поэтому за неравенствами вида (1) закрепилось название „неравенства типа Колмогорова”. Обзоры других результатов в этом направлении для $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{T}$ см., например, в [2 – 7].

Необходимые и достаточные условия существования неравенства (1) при $G = \mathbb{R}$ состоят в том, что [8]

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \geq \frac{r}{q}, \tag{3}$$

и при этом необходимо должно быть

$$\mu = \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}.$$

В периодическом случае, как доказано в [9], неравенство (1) выполняется для любого $f \in L^r_{p,s}(\mathbb{T})$, $1 \leq p,\ s \leq \infty$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, если и только если

$$\mu \leq \mu_{cr} := \min\left\{1-\frac{k}{r},\ \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p}\right\}, \tag{4}$$

причем наибольший интерес представляют неравенства (1) с $\mu = \mu_{cr}$.

В работе [10] установлены соотношения между точными константами (2) в неравенствах типа (1) для периодических и непериодических функций, заданных на вещественной оси. А именно, доказано, что

$$K(\mathbb{R}) \leq K(\mathbb{T}) \quad \text{при} \quad \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p} < 1-\frac{k}{r}, \tag{5}$$

$$K(\mathbb{R}) = K(\mathbb{T}) \quad \text{при} \quad \frac{r-k-1/s+1/q}{r-1/s+1/p} = 1-\frac{k}{r}. \tag{6}$$

Утверждение (6) позволяет получить некоторые новые результаты на оси, поскольку к настоящему времени вопрос о точных константах (2) в неравенствах (1) для периодических функций изучен полнее, чем для непериодических.

В случае функций многих переменных есть много различных типов неравенств для норм промежуточных производных, и вопросы существования таких неравенств рассматривались в работах В. П. Ильина, Эрминга, Ниренберга, Гальярдо, В. Н. Габушина, А. Ф. Тимана, В. А. Солонникова, О. В. Бесова, Г. Г. Магарил-Ильяева, Э. М. Галеева и др.

В многомерном случае сравнение констант, аналогичное одномерному, вообще говоря, не имеет места (см., например, [11 – 13]). В данной работе мы доказываем, что для неравенств некоторого специального вида в случае одинаковых метрик во всех нормах константы для периодических и непериодических функций совпадают.

Точнее, для функций $f \in L^l_{p,s}(G^n)$, $l \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq p,\ q,\ s_i \leq \infty$, $i = \overline{1,n}$, известны неравенства вида

$$\left\|D^\alpha f\right\|_{L_q(G^n)} \leq C\|f\|^{\mu_0}_{L_p(G^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|^{\mu_i}_{L_{s_i}(G^n)}, \tag{7}$$

где $D^\alpha f$ — смешанная производная функции f, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $0 < \mu_i < 1$, $i = \overline{0,n}$, $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$.

При $1 < p,\ q,\ s_i < \infty$ достаточные условия существования таких неравенств для непериодических функций были получены в [14], в более общей ситуации, когда метрики векторные, — в [15], необходимые и достаточные — в [16], в периодическом случае — в [17].

Будем рассматривать случай, когда $p = q = s_i$, $i = \overline{1,n}$; тогда пространство $L^l_{p,s}(G^n)$ будем обозначать $L^l_{p,p}(G^n)$, $1 \leq p < \infty$. Из работы [18] (§ 6.3) следует, что в этом случае для непериодических функций выполняется неравенство

$$\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{\alpha_i/l_i}, \tag{8}$$

где $l \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i) < 1$; а для периодических —

$$\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq C \| f \|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^{1-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i)-\sum_{i=1}^{n}(\lambda/l_i)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^{\alpha_i/l_i+\lambda/l_i}, \tag{9}$$

где $\lambda \geq 0$, $C = C(\lambda)$, $l \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum_{i=1}^{n}((\alpha_i + \lambda)/l_i) < 1$. Наибольший интерес представляют неравенства (9) с $\lambda = 0$.

Таким образом, аналогично одномерному случаю, неравенство (8) для непериодических функций имеет место с показателями $\mu_{0_{cr}} = 1 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i)$, $\mu_{i_{cr}} = \alpha_i/l_i$, $i = \overline{1, n}$, а неравенство (9) для периодических функций — при всех $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i) - \sum_{i=1}^{n}(\lambda/l_i)$, $\mu_i = \alpha_i/l_i + \lambda/l_i$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda \geq 0$; показатели $\mu_{i_{cr}}$, $i = \overline{0, n}$, называются критическими.

Неулучшаемые константы в неравенствах (8), (9) имеют соответственно вид

$$K(\mathbb{R}^n) := \sup_{\substack{f \in L_{p,p}^{l}(\mathbb{R}^n) \\ \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \neq 0}} \frac{\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{\alpha_i/l_i}}, \tag{10}$$

$$K(\mathbb{T}^n) := \sup_{\substack{f \in L_{p,p}^{l}(\mathbb{T}^n) \\ \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \neq 0}} \frac{\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}}{\| f \|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^{1-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i)-\sum_{i=1}^{n}(\lambda/l_i)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^{\alpha_i/l_i+\lambda/l_i}}. \tag{11}$$

Цель данной работы — показать, что $K(\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{T}^n)$ при $\lambda = 0$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/l_i) < 1$, $\lambda = 0$. *Тогда имеет место равенство*

$$K(\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{T}^n). \tag{12}$$

Заметим, что при доказательстве теоремы существенно используется одномерная схема (см. [10]).

Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см., например, [19, с. 16]). *Для любого* $\delta > 0$ *существует последовательность функций* $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ *со следующими специальными свойствами*:

1) $\forall m \in \mathbb{N}$: $\zeta_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
2) $\zeta_m \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;
3) $\zeta_m = 0 \ \forall x \ (|x| > m + \delta)$;
4) $0 \leq \zeta_m \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
5) $\zeta_m = 1$, *если* $|x| \leq m$;
6) $\forall m \in \mathbb{N} \ \forall x \in [m+1, m+1+\delta]$: $\zeta_{m+1}(x) = \zeta_m(x-1)$;
7) $\left|\zeta_m^{(k)}(x)\right| \leq C_k \delta^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *Для любой функции* $f \in L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, *найдется последовательность* $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *финитных бесконечно дифференцируемых функций из* $L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ *такая, что при* $m \to \infty$

$$\|f - g_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

$$\left\|D_i^{l_i} f - D_i^{l_i} g_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отметим, что такого рода аппроксимации часто используются в теории функций многих переменных, особенно в теоремах вложения (см., например, [20], § 14); доказательство данного утверждения мы приводим для полноты изложения.

Доказательство. Возьмем произвольно $f \in L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Известно (см., например, [20], § 5, 6), что найдется функция $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \quad \left\|D_i^{l_i} f - D_i^{l_i} f_\varepsilon\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}.$$

Положим $g_m(x) = f_\varepsilon(x)\eta_m(x)$, $\eta_m(x) = \prod_{i=1}^n \zeta_m(x_i)$, $m \in \mathbb{N}$, где функции $\zeta_m(x_i)$ выбраны согласно лемме 1 по некоторому $\delta > 0$. Тогда $g_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f_\varepsilon - g_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

$$\left\|D_i^{l_i} f_\varepsilon - D_i^{l_i} g_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \left\|D_i^{l_i} f_\varepsilon - D_i^{l_i} f_\varepsilon \eta_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k \left\|(D_i^k f_\varepsilon)(D_i^{l_i-k}\eta_m)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Очевидно, при $m \to \infty$

$$\left\|D_i^{l_i} f_\varepsilon - D_i^{l_i} f_\varepsilon \eta_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Далее, в силу свойств функций ζ_m частная производная $D_i^{l_i-k}\eta_m(x)$ отлична от нуля только на множестве $[-m-1;\, m+1]^n \backslash [-m;\, m]^n$; таким образом, согласно свойству 7 существуют такие константа C и $\delta > 1$, что

$$\sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k \left\|(D_i^k f_\varepsilon)(D_i^{l_i-k}\eta_m)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C}{\delta} \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k \left\|(D_i^k f_\varepsilon)\right\|_{L_p([-m-1;\, m+1]^n \backslash [-m;\, m]^n)}.$$

Поскольку для функции f_ε величина $\left\|(D_i^k f_\varepsilon)\right\|_{L_p([-m-1;\, m+1]^n \backslash [-m;\, m]^n)}$ конечна, то δ в лемме 1 можно выбрать настолько большим, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется M такое, что для любого $m > M$

$$\|f - g_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f - f_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f_\varepsilon - g_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < 2\varepsilon,$$

$$\left\|D_i^{l_i} f - D_i^{l_i} g_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le \left\|D_i^{l_i} f - D_i^{l_i} f_\varepsilon\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|D_i^{l_i} f_\varepsilon - D_i^{l_i} g_m\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon, \quad i = \overline{1,n}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Отметим, что при $\lambda = 0$ показатели в неравенствах (8) и (9) (и, соответственно, в определениях констант $K(\mathbb{R}^n)$ и $K(\mathbb{T}^n)$) совпадают и равны критическим показателям в неравенстве (9): $\mu_{0_{cr}}$, $\mu_{i_{cr}}$, $i = \overline{1, n}$. Всюду в доказательстве мы будем обозначать показатели через μ_0, μ_i, $i = \overline{1, n}$, указывая, где это необходимо, что они являются критическими.

Существенным обстоятельством является тот факт, что для критических показателей константа $K(\mathbb{T}^n)$ в неравенстве для периодических функций на самом деле не зависит от длины периода. Действительно, обозначим через $b\mathbb{T}$, $b > 0$, отрезок $[0, 2\pi b]$. Для функции $f \in L^l_{p,p}((b\mathbb{T})^n)$ положим $g(x) = f(bx)$. Ясно, что $g \in L^l_{p,p}(\mathbb{T}^n)$ и

$$K(\mathbb{T}^n) = \sup_{\substack{g \in L^l_{p,p}(\mathbb{T}^n) \\ \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} g \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \neq 0}} \frac{\left\| D^\alpha g \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}}{\| g \|^{\mu_0}_{L_p(\mathbb{T}^n)} \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} g \right\|^{\mu_i}_{L_p(\mathbb{T}^n)}} =$$

$$= \sup_{\substack{f \in L^l_{p,p}((b\mathbb{T})^n) \\ \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p((b\mathbb{T})^n)} \neq 0}} \frac{b^{\sum_{i=1}^n \alpha_i - n/p} \left\| D^\alpha f \right\|_{L_p((b\mathbb{T})^n)}}{b^{-(n/p)\mu_0 + \sum_{i=1}^n (l_i - (n/p))\mu_i} \| f \|^{\mu_0}_{L_p((b\mathbb{T})^n)} \prod_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|^{\mu_i}_{L_p((b\mathbb{T})^n)}} =$$

$$= b^{\sum_{i=1}^n \alpha_i - n/p + (n/p)\mu_0 - \sum_{i=1}^n l_i\mu_i + \sum_{i=1}^n (n/p))\mu_i} K((b\mathbb{T})^n) = K((b\mathbb{T})^n),$$

поскольку для критических показателей

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - l_i\mu_i) + \frac{n}{p}\left(\sum_{i=0}^n \mu_i - 1 \right) = 0$$

(при $p = \infty$ считаем $1/p = 0$).

Перейдем к доказательству равенства (12).

Пусть сначала $1 \le p < \infty$. Выберем произвольно $f \in L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Использовав лемму 2, найдем функцию $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ge \frac{1}{1+\varepsilon} \| g \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ge \frac{1}{1+\varepsilon} \left\| D_i^{l_i} g \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Применив неравенство (8) для функции $f - g \in L^l_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, из леммы 2 получим также

$$\left\| D^\alpha f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le (1 + C\varepsilon) \left\| D^\alpha g \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

с некоторой константой C.

Пусть теперь $f \in L^{l}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку в силу неравенства (8) $D^{\alpha} f(x)$ существенно ограничена на $\mathbb{R}^n$, то по определению существенного супремума для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество положительной меры Δ_ε, на котором $\left|D^{\alpha} f(x)\right| > \left\|D^{\alpha} f\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} - \varepsilon$. В таком случае найдется и число m такое, что пересечение $\Delta_m = [-m; m]^n \bigcap \Delta_\varepsilon$ имеет положительную меру. Рассмотрим теперь функцию $g(x) = f(x)\eta_m(x)$, $\eta_m(x) = \prod_{i=1}^{n} \zeta_m(x_i)$, ζ_m определены в лемме 1. Тогда

$$\left\|D^{\alpha} g\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \operatorname{supp} \eta_m} \operatorname{vrai} \left|f(x)\eta_m(x)\right| \geq \sup_{x \in \Delta_m} \operatorname{vrai} \left|f(x)\eta_m(x)\right| =$$

$$= \sup_{x \in \Delta_m} \operatorname{vrai} \left|f(x)\right| = \left\|D^{\alpha} f\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{vrai} \left|f(x)\eta_m(x)\right| \leq \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left\|D_i^{l_i} g\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|(D_i^{l_i} f)\eta_m\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^{k} \left\|(D_i^{k} f)(D_i^{l_i-k}\eta_m)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

В силу свойств функций ζ_m (см. лемму 1) найдутся такие $C > 0$ и $\delta > 1$, что

$$\sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^{k} \left\|(D_i^{k} f)(D_i^{l_i-k}\eta_m)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\delta} \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^{k} \left\|(D_i^{k} f)\right\|_{L_\infty([-m-1;\, m+1]^n \setminus [-m;\, m]^n)}.$$

Поскольку величина $\left\|(D_i^{k} f)\right\|_{L_\infty([-m-1;\, m+1]^n \setminus [-m;\, m]^n)}$ конечна (в силу одномерного неравенства Колмогорова), то δ в лемме 1 можно выбрать таким образом, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше $\varepsilon \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$. Окончательно получим

$$\left\|D_i^{l_i} g\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} (1 + \varepsilon).$$

Для любого $1 \leq p \leq \infty$ выберем положительное число b, большее длин проекций носителя соответствующей функции g на координатные оси, и положим

$$\tilde{g}(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} g(x + 2\pi b \nu).$$

Ясно, что $\tilde{g} \in L^{l}_{p,p}((b\mathbb{T})^n)$, и для критических показателей имеем

$$\frac{\left\|D^{\alpha} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^{\mu_0}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|^{\mu_i}_{L_p(\mathbb{R}^n)}} \leq$$

$$\leq \frac{(1 + C\varepsilon)\left\|D^{\alpha} g\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\left((1+\varepsilon)^{-1}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\mu_0} \prod_{i=1}^{n} \left((1+\varepsilon)^{-1}\left\|D_i^{l_i} g\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\mu_i}} =$$

$$= \frac{1+C\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{-1\cdot\sum_{i=0}^{n}\mu_i}} \frac{\left\| D^{\alpha}\tilde{g} \right\|_{L_p((b\mathbb{T})^n)}}{\|\tilde{g}\|^{\mu_0}_{L_p((b\mathbb{T})^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i}\tilde{g} \right\|^{\mu_i}_{L_p((b\mathbb{T})^n)}} \le$$

$$\le (1+C\varepsilon)(1+\varepsilon)K\big((b\mathbb{T})^n\big) = (1+C\varepsilon)(1+\varepsilon)K(\mathbb{T}^n)$$

при $1 \le p < \infty$ и

$$\frac{\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|^{\mu_0}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|^{\mu_i}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}} \le \frac{\left\| D^{\alpha} g \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}}{\|g\|^{\mu_0}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \Big((1+\varepsilon)^{-1} \left\| D_i^{l_i} g \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \Big)^{\mu_i}} =$$

$$= \frac{1}{(1+\varepsilon)^{-1\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu_i}} \frac{\left\| D^{\alpha}\tilde{g} \right\|_{L_p((b\mathbb{T})^n)}}{\|\tilde{g}\|^{\mu_0}_{L_p((b\mathbb{T})^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i}\tilde{g} \right\|^{\mu_i}_{L_\infty((b\mathbb{T})^n)}} \le$$

$$\le (1+\varepsilon)^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i} K\big((b\mathbb{T})^n\big) = (1+\varepsilon)^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i} K(\mathbb{T}^n)$$

при $p = \infty$.

Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$K(\mathbb{R}^n) \le K(\mathbb{T}^n).$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Заметим, что $L^l_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n) \subset L^l_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $K(\mathbb{T}^n) \le K(\mathbb{R}^n)$ при $p = \infty$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $\mathbb{T}_1$ — отрезок $[0, 1]$. Выберем произвольно $f \in L^l_{p,p}(\mathbb{T}_1^n)$. Положим $\eta_m(x) = \prod_{i=1}^{n} \zeta_m(x_i)$ (ζ_m выбраны при $\delta = 1$), $g_m(x) = f(x)\eta_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$. Учитывая свойства функций ζ_m (см. лемму 1), имеем

$$\left\| D^{\alpha} g_m \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ge (2m)^{n/p} \left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)},$$

$$\| g_m \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le (2m+2)^{n/p} \| f \|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)},$$

$$\left\| D_i^{l_i} g_m \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left\| (D_i^{l_i} f)\eta_m + \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k (D_i^k f)(D_i^{l_i-k}\eta_m) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le \left\| (D_i^{l_i} f)\eta_m \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k \left\| (D_i^k f)(D_i^{l_i-k}\eta_m) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le (2m+2)^{n/p} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)} + \left(2^n \sum_{j=1}^{n} C_n^j m^{n-j} \right)^{1/p} M \sum_{k=0}^{l_i-1} C_{l_i}^k \left\| D_i^k f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)},$$

где $M = \max\limits_{0 \le k \le l_i - 1} \left\| D_i^{l_i-k}\eta_m \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$ не зависит от m. Здесь при оценке $\left\| (D_i^k f)(D_i^{l_i-k}\eta_m) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ использован тот факт, что $D_i^{l_i-k}\eta_m \ne 0$ на множестве меры $2^n \sum_{j=1}^{n} C_n^j m^{n-j} = (2m+2)^n - (2m)^n$.

Из полученных оценок следует, что

$$K(\mathbb{R}^n) \ \geq \ \frac{\left\| D^{\alpha} g_m \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\| g_m \|^{\mu_0}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} g_m \right\|^{\mu_i}_{L_p(\mathbb{R}^n)}} \ \geq$$

$$\geq \ \frac{(2m)^{n/p} \left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)}}{\left\{(2m+2)^{n/p} \| f \|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)}\right\}^{\mu_0} \prod\limits_{i=1}^{n} \left\{(2m+2)^{n/p} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)} + A\right\}^{\mu_i}} \ =:$$

$$=: \ F(f, m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

где

$$A \ = \ \left(2^n \sum_{j=1}^{n} C_n^j m^{n-j} \right)^{1/p} M \sum_{k=0}^{l_i - 1} C_{l_i}^k \left\| D_i^k f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)},$$

т. е.

$$K(\mathbb{R}^n) \ \geq \ F(f, m).$$

Устремляя $m \to \infty$, получаем

$$K(\mathbb{R}^n) \ \geq \ \frac{\left\| D^{\alpha} f \right\|_{L_p(\mathbb{T}_1^n)}}{\| f \|^{\mu_0}_{L_p(\mathbb{T}_1^n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|^{\mu_i}_{L_p(\mathbb{T}_1^n)}},$$

поскольку

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(2m)^{n/p}}{(2m+2)^{(n/p)\mu_0} (2m+2)^{(n/p)\sum_{i=1}^{n} \mu_i}} \ = \ 1,$$

а в слагаемом A знаменателя максимальная степень m равна $(n-1)/p$, и, значит, это слагаемое на значение предела не повлияет.

Но тогда согласно свойству точной верхней грани

$$K(\mathbb{R}^n) \ \geq \ K(\mathbb{T}_1^n) \ = \ K(\mathbb{T}^n).$$

Теорема доказана.

1. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 472 с.
2. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Избранные труды. Математика, механика / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1985. – С. 387 – 390.
3. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
4. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
5. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II. Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* On the exact inequalities of Kolmogorov type and some of their applications // New Approaches in Nonlinear Analysis. – Palm Harbor (USA): Hadronic Press, 1999. – P. 9 – 50.
7. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9 – 29.

8. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 3. – С. 291 – 298.
9. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Там же. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
10. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Сравнение точных констант в неравенствах для производных функций, заданных на вещественной оси и окружности // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 579 – 589.
11. *Babenko V. F., Korneichuk N. P., Pichugov S. A.* On Kolmogorov type inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions of many variables // Constructive Theory of Functions (Varna 2002). – Sofia: DARBA, 2003. – P. 209 – 212.
12. *Babenko V. F., Korneichuk N. P., Pichugov S. A.* Kolmogorov type inequalities for the norms of mixed derivatives of periodic functions of many variables // E. J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 1 – 15.
13. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Пичугов С. А.* Неравенства типа Колмогорова для смешанных производных функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 579 – 594.
14. *Солонников В. А.* О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p(\mathbb{R}^n)$ // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **27**. – С. 194 – 210.
15. *Бесов О. В.* Мультипликативные оценки для интегральных норм дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **131**. – С. 3 – 15.
16. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Задача о промежуточной производной // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 1. – С. 81 – 96.
17. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Там же. – 1978. – **23**, № 2. – С. 197 – 212.
18. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 625 с.
19. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
20. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

Получено 04.10.2004