УДК 519.21

Н. В. Соколов (Ин-т вод. пробл. РАН, Москва, Россия)

ОБОБЩЕНИЕ ПРОХОРОВСКОГО МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

We prove two theorems on upper and lower bounds of probabilities in the multidimensional case. We generalize and correct the Prokhorov multidimensional analog of the Chebyshev inequality. We obtain a multidimensional analog for the generalization of the Kolmogorov probability estimation.

Доведено дві теореми про верхню та нижню оцінки ймовірностей у багатовимірному випадку. Узагальнено й уточнено прохоровський багатовимірний аналог нерівності Чебишова. Знайдено багатовимірний аналог узагальнення оцінки ймовірності Колмогорова.

Ю. В. Прохоров установил многомерный аналог неравенства П. Л. Чебышева, используя квадратичные формы [1]. Обобщим его выражение на основе ранее полученного автором результата по уточнению нижних оценок вероятностей А. Н. Колмогорова и дальнейшему развитию идей Чебышева [2]. В результате этой работы были доказаны две теоремы оценки вероятностей принятия значений многомерных случайных величин.

Теорема о верхней оценке вероятностей в многомерном случае. *Пусть* $\xi = \xi(\omega)$ *— действительная многомерная случайная величина,* $\varphi(\xi(\omega))$ *— действительная однозначная скалярная функция от многомерной случайной величины,* α *— не равный нулю показатель степени (целый или дробный, положительный или отрицательный). Тогда выполняется неравенство*

$$P\{\xi \in A\} \le \frac{E\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right] - \left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap A} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha} - \left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}},$$

в котором в случае неопределенностей используются предельные переходы.

Теорема о нижней оценке вероятностей в многомерном случае. *Пусть* $\xi = \xi(\omega)$ *— действительная многомерная случайная величина,* $\varphi(\xi(\omega))$ *— действительная однозначная скалярная функция от многомерной случайной величины,* α *— не равный нулю показатель степени (целый или дробный, положительный или отрицательный). Тогда выполняется неравенство*

$$P\{\xi \in A\} \ge \frac{E\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right] - \left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap \overline{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha} - \left[\operatorname*{bord}_{i\ \omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap \overline{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}},$$

в котором в случаях неопределенностей используются предельные переходы.

В приведенных выше соотношениях использованы следующие обозначения: $\operatorname*{bord}_{i\ \omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|$ — оператор грани, i — индекс оператора границы, $i = 1$ — нижняя грань, $i = 2$ — верхняя грань, $0 \le \operatorname*{bord}_{1\ \omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))| \le \inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|$ и

$$0 \le \operatorname*{bord}_{1\ \omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap A} |\varphi(\xi(\omega))| \le \inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap A} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord}_{2\ \omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap \overline{A}} |\varphi(\xi(\omega))| \ge \sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_{\xi}\cap \overline{A}} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$0 \le \operatorname*{bord_1}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))| \le \inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))| \ge \sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord_2}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))| \ge \sup_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

кроме того,

$$\operatorname*{bord_1}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))| \ge \operatorname*{bord_1}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))| \le \operatorname*{bord_2}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord_1}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))| \ge \operatorname*{bord_1}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

$$\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))| \le \operatorname*{bord_2}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|,$$

A — многомерное множество действительных чисел, $\bar{A}$ — дополнение множества действительных чисел A, $\mathrm{P}\{\xi\in A\}$ — вероятность принадлежности случайной величины множеству действительных чисел A, ω — элементарное событие из пространства элементарных событий Ω, Θ_ξ — многомерное множество всех значений величины $\xi(\omega)$, принимаемых ею с ненулевой вероятностью, E — оператор математического ожидания.

Доказательства. Заметим, что при бесконечных математических ожиданиях и всех неопределенностях вида $0/0$, ∞/∞, нулевом знаменателе в результате предельных переходов получаем тривиальные, но справедливые оценки вероятностей.

При нулевых значениях знаменателей может потребоваться предельный переход, приводящий к одновременной смене знаков числителя и знаменателя. При этом формально получаются оценки $\mathrm{P}\{\xi\in A\}\ge-\infty$ и (или) $\mathrm{P}\{\xi\in A\}\le\infty$, что доказывает справедливость двух теорем в таких ситуациях (при бесконечных математических ожиданиях и всех неопределенностях вида $0/0$, ∞/∞, нулевом знаменателе), так как $\mathrm{P}\{\xi\in A\}\ge 0$ и $\mathrm{P}\{\xi\in A\}\le 1$.

Следовательно, для доказательства теорем следует подтвердить их справедливость при ненулевых знаменателях и отсутствии неопределенностей (т. е. и в остальных случаях).

С этой целью запишем возможные соотношения при $\alpha\ne 0$, конечных математических ожиданиях и при условиях, что

$$\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))| > \inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))| \text{ и } \sup_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))| > \sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|:$$

$$\left[\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} \mathrm{P}\{\xi\in A\} + \left[\inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} [1-\mathrm{P}\{\xi\in A\}] \le \mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right], \quad (1)$$

$$\left[\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap A} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} \mathrm{P}\{\xi\in A\} + \left[\inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} [1-\mathrm{P}\{\xi\in A\}] \ge \mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right], \quad (2)$$

$$\left[\sup_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} \mathrm{P}\{\xi\in A\} + [1-\mathrm{P}\{\xi\in A\}] \left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\bigcap\bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} \ge \mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right] \quad (3)$$

и

$$\left[\sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}\mathrm{P}\{\xi\in A\}+[1-\mathrm{P}\{\xi\in A\}]\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}\le \mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]. \quad (4)$$

Из соотношения (1) непосредственно получаем выражение

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\le\frac{\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right]-\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}}{\left[\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}-\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}}. \quad (5)$$

Неравенство (2) дает возможность получить также другое соотношение

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\le\frac{\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}-\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]}{\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}-\left[\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}}. \quad (6)$$

Из соотношения (3) непосредственно находим

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\ge\frac{\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right]-\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}}{\left[\sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}-\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}}. \quad (7)$$

Неравенство (4) позволяет получить также соотношение

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\ge\frac{\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}-\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]}{\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}-\left[\sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}}. \quad (8)$$

Неравенства (5) – (8) можно объединить в два с показателями степени, принимающими как положительные, так и отрицательные значения:

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\le\frac{\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right]-\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}-\left[\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}} \quad (9)$$

и

$$\mathrm{P}\{\xi\in A\}\ge\frac{\mathrm{E}\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right]-\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}-\left[\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}. \quad (10)$$

Если дополнительно предположить, что $\sup_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap A}|\varphi(\xi(\omega))|<\sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|$ и $\inf_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|<\inf_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi\cap\bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|$, то, применив (9) и (10) к функции, равной $1/\varphi(\xi(\omega))$, и использовав показатель степени, равный $-\alpha$, найдем

$$P\{\xi \in A\} \le \frac{E\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right] - \left[\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\sup\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha} - \left[\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}} \tag{11}$$

и

$$P\{\xi \in A\} \ge \frac{E\left[|\varphi(\xi)|^{\alpha}\right] - \left[\inf\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}{\left[\inf\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha} - \left[\inf\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{\alpha}}. \tag{12}$$

Таким образом, неравенства (9) и (10) имеют парадоксальное свойство: они сохраняют знак при формальной замене всех inf на sup и наоборот!

Заметим, что для случаев отсутствия бесконечности в правой части неравенств (11) и (12) они могут быть доказаны из следующих соотношений:

$$\left[\sup\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} P\{\xi\in A\} + \left[\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|}[1-P\{\xi\in A\}] \ge E\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right], \tag{13}$$

$$\left[\sup\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap A}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} P\{\xi\in A\} + \left[\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}[1-P\{\xi\in A\}] \le E\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right], \tag{14}$$

$$\left[\inf\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} P\{\xi\in A\} + [1-P\{\xi\in A\}]\left[\inf\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} \le E\left[|\varphi(\xi)|^{|\alpha|}\right] \tag{15}$$

и

$$\left[\inf\limits_{\omega\in\Omega}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} P\{\xi\in A\} + [1-P\{\xi\in A\}]\left[\inf\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} \ge E\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]. \tag{16}$$

Выражениями (1) – (4) и (13) – (16) исчерпываются все возможные случаи.

Объединим соотношения (9) – (12) в два, а затем используем свойство правильных дробей (меньших единицы) увеличивать свое значение при одновременном возрастании на одно и то же число числителя и знаменателя. Тогда из (9) – (12) будет следовать справедливость сформулированных в начале статьи теорем для случаев ненулевых знаменателей и отсутствия непределенностей. Поскольку эти теоремы справедливы, как было показано, непосредственно и при бесконечных математических ожиданиях и всех неопределенностях вида $0/0$, ∞/∞ и нулевом знаменателе, следовательно, они справедливы во всех случаях.

Таким образом, теоремы доказаны.

Отметим, что выражение (10) является многомерным аналогом сделанного в работе [2] обобщения и уточнения нижней колмогоровской оценки вероятности.

***Замечание* 1.** Если точная верхняя грань неизвестна или равна бесконечности, то из неравенства (8) следует

$$P\{\xi \in A\} \ge 1 - \left[\sup\limits_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}}|\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} E\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]. \tag{17}$$

Этот результат также следует из теоремы о нижней оценке вероятностей в многомерном случае при отрицательных значениях показателя степени. При этом

$$P\{\xi \in A\} \ge \frac{E\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right] - \left[\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}}{\left[\operatorname*{bord_2}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|} - \left[\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{-|\alpha|}} \ge$$

$$\ge 1 - \left[\operatorname*{bord_2}_{\omega:\xi(\omega)\in\Theta_\xi \cap \bar{A}} |\varphi(\xi(\omega))|\right]^{|\alpha|} E\left[|\varphi(\xi)|^{-|\alpha|}\right]. \qquad (18)$$

Выражение (17) является частным случаем соотношения (18).

***Замечание* 2.** Если в качестве функции использовать квадратичные формы, то из теоремы 1 как ее следствие найдем прохоровский многомерный аналог неравенства Чебышева. В самом деле, для случая правильных дробей при $\alpha = 1$ и $i = 1$ из теоремы 1 следует

$$P\{X \notin D\} \le \frac{E[|\varphi(X)|] - \left[\inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(X(\omega))|\right]}{\left[\inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))|\right] - \left[\inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(X(\omega))|\right]} \le$$

$$\le \frac{E[|\varphi(X)|]}{\left[\inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))|\right]} \le E\left[\frac{|\varphi(X)|}{\inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))|}\right] \le E\tilde{Q}(X), \qquad (19)$$

т. е. из теоремы 1 в качестве частного случая вытекает выражение

$$P\{X \notin D\} \le E\tilde{Q}(X), \qquad (20)$$

приведенное в обзоре Ю. В. Прохорова [1], посвященном многомерным аналогам неравенства Чебышева. Здесь X — случайный вектор, D — прямоугольная область, $\tilde{Q}(X)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма, при всех $X \notin D$ принимающая значения не меньше 1 $\Big($при этом $|\varphi(X(\omega))| = \inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))|$ при всех $X \notin D$ и $\inf_{\omega\in\Omega} |\varphi(X(\omega))| < \inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))|$, а $|\varphi(X(\omega))| \Big/ \inf_{\omega:X(\omega)\in\Theta_X \cap \bar{D}} |\varphi(X(\omega))| \le \tilde{Q}(X)$ при всех $X \in D\Big)$.

Многомерный аналог неравенства Чебышева (20) можно также непосредственно обосновать с помощью выражения (5).

В доказанных теоремах множество A может состоять из отдельных точек или отдельных векторов, что особенно важно для случаев дискретных случайных многомерных величин. Показатель степени α объединяет две ветви неравенств с положительными и отрицательными числителями и знаменателями и предоставляет возможность оптимизации оценок в случае фиксации вида функции $\varphi(\xi(\omega))$. При этом возможны отрицательные и дробные значения α.

1. *Прохоров Ю. В.* Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика / ВИНИТИ. – 1972. – **10**. – С. 5–24.
2. *Соколов Н. В.* Расширение возможностей неравенств чебышевского типа и оценки Колмогорова // Докл. РАН. – 2002. – **384**, № 3. – С. 308–311.

Получено 17.06.2005