УДК 517.944

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Чернигов. технол. ун-т)

УТОЧНЕННЫЕ ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. II

The refined scales of functional Hilbert spaces over $\mathbb{R}^n$ and smooth manifolds with a boundary are studied. Elements of these scales are the isotropic spaces of Hörmander – Volevich – Paneyakh. Theory of elliptic boundary-value problems in such spaces is developed.

Вивчаються уточнені шкали функціональних гільбертових просторів на $\mathbb{R}^n$ та гладких многовидах з краєм. Елементами цієї шкали є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха. Розроблено теорію еліптичних крайових задач у цих просторах.

Введение. В статье изучается уточненная шкала гильбертовых функциональных пространств, введенная авторами в [1]. Гладкостные свойства функций из пространств этой шкалы определяются не числовым набором, а функциональным параметром, который является правильно меняющейся функцией одной вещественной переменной. Этот функциональный параметр позволяет более тонко характеризовать гладкость функции по свойствам ее преобразования Фурье вблизи бесконечности.

Цель статьи — показать, что свойства уточненной шкалы и классической шкалы пространств бесселевых потенциалов во многом аналогичны, что позволяет распространить теорию эллиптических краевых задач на уточненные шкалы. Эта аналогия свойств является следствием того, что каждое пространство уточненной шкалы может быть получено посредством интерполяции с подходящим функциональным параметром пары пространств бесселевых потенциалов. В качестве параметра здесь следует взять некоторую правильно меняющуюся на $+\infty$ функцию.

Статья состоит из четырех пунктов. В п. 1 рассмотрены некоторые необходимые далее свойства медленно меняющихся функций. В п. 2 показано, что правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка θ, где $0 < \theta < 1$, является интерполяционным параметром, т. е. порождает интерполяционный функтор в категории пар гильбертовых пространств. На основании этого результата в п. 3 изучены методом интерполяции уточненные шкалы на пространстве $\mathbb{R}^n$, полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ и компактном дифференцируемом многообразии класса C^∞. В п. 4 также с помощью интерполяции установлена теорема о нетеровости оператора эллиптической краевой задачи в уточненной шкале пространств дифференцируемых функций на многообразии. Пункты 1, 2 опубликованы в первой части работы (см. [2]).

Необходимо отметить, что пространства, гладкость в которых определяется посредством функциональных параметров, были впервые введены и изучены в работах [3, 4]. В настоящее время эти пространства являются предметом многих исследований (см., например, [5, с. 381 – 415; 6] и приведенную в них библиографию). В частности, регулярные эллиптические граничные задачи в некоторых таких пространствах на евклидовых областях изучались методом интерполяции в [7].

3. Уточненные шкалы пространств. Рассмотрим сначала уточненные шкалы функциональных пространств на $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 1$, и на полупространстве $\mathbb{R}^n_+ =$

$= \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ (в случае $n = 1$ имеем $\mathbb{R}^n_+ = (0; +\infty)$). Затем из этих шкал с помощью стандартной процедуры локального распрямления построим уточненные шкалы на гладких компактных многообразиях. Пространства, образующие указанные шкалы, зависят от двух параметров — числового и функционального. Последний пробегает некоторое множество $\mathcal{M}$, с определения которого мы и начнем.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех таких положительных функций φ, определенных на $[1; +\infty)$, что: а) φ измерима по Борелю на $[1; +\infty)$; б) функции φ и $\dfrac{1}{\varphi}$ ограничены на каждом отрезке $[1; b]$, где $1 < b < +\infty$; в) φ — медленно меняющаяся на $+\infty$ функция.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех таких распределений u медленного роста, заданных на $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty. \tag{3.1}$$

Здесь и далее интеграл, если не указано иное, берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle = (1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения его элементов u, v возьмем величину

$$\int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

Она порождает норму, равную корню квадратному из левой части неравенства (3.1).

***Замечание* 3.1.** Пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — частный случай пространств Хермандера и Волевича – Панеяха. А именно, $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{2,k} = H^\mu$, где $k(\xi) = \mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$, $\mathcal{B}_{2,k}$ — пространство, введенное Л. Хермандером [3, с. 54], H^μ — пространство, введенное Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [4, с. 14]. Отметим, что пространства $\mathcal{B}_{2,k}$ и H^μ определены в указанных работах для произвольной положительной *весовой* функции $k(\xi) = \mu(\xi)$ аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Последнее по Волевича – Панеяху означает непрерывность μ и оценку $\mu(\xi)/\mu(\eta) \le c(1 + |\xi - \eta|^l)$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, с постоянными c, l, не зависящими от ξ и η. (Л. Хермандер требует, чтобы $\dfrac{k(\xi)}{k(\eta)} \le (1 + c|\xi - \eta|)^l$, но, как это следует из замечания [3, с. 54], функции k приводят к тому же самому классу пространств, что и функции μ.) Для произвольного $\varphi \in \mathcal{M}$, согласно предложению 1.3 а) и определению множества $\mathcal{M}$, найдется такая функция $\varphi_1 \in \mathcal{M}$, непрерывная на $[1; +\infty)$, что $c_1\varphi_1(t) \le \varphi(t) \le c_2\varphi_1(t)$ при $t \ge 1$ с конечными положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от t. Поэтому $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ с эквивалентностью норм. Кроме того, в силу леммы 1.1 функция $\mu_1(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi_1(\langle\xi\rangle)$ весовая:

$$\mu_1(\xi)/\mu_1(\eta) = (\langle\xi\rangle/\langle\eta\rangle)^s \varphi_1(\langle\xi\rangle)/\varphi_1(\langle\eta\rangle) \le$$
$$\le c(1 + |\langle\xi\rangle - \langle\eta\rangle|^{|s|+1}) \le c(1 + |\xi - \eta|^{|s|+1}).$$

Таким образом, все, что установлено Л. Хермандером [3, с. 54 – 67] для пространства $\mathcal{B}_{2,k}$ и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [4, с. 14 – 54] для пространства H^μ, справедливо и для пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}$. Нас, в основном, будут интересовать специфические свойства пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, обусловленные тем, что $\varphi \in \mathrm{SV}$.

В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ будем также обозначать через $H^s(\mathbb{R}^n)$. Это хорошо известное пространство бесселевых потенциалов на $\mathbb{R}^n$ порядка s.

Лемма 3.1. *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{M}$ справедливы непрерывные вложения*

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), \quad \varepsilon > 0, \tag{3.2}$$

$$H^{s+\varepsilon,\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad \varepsilon > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\varphi \in \mathcal{M} \subset \mathrm{SV}$, в силу предложения 1.3 б) имеем $t^{-\varepsilon} \leq \varphi(t) \leq t^{\varepsilon}$ при $t \gg 1$. Отсюда и из п. б) определения класса $\mathcal{M}$ вытекает существование таких положительных постоянных c_0, c_1, что $c_0 t^{-\varepsilon} \leq \varphi(t) \leq c_1 t^{\varepsilon}$ для всех $t \geq 1$. Взяв здесь $t = \langle\xi\rangle$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, сразу же получим непрерывные вложения (3.2). Они, очевидно, влекут (3.3).

Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим семейство

$$\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\} \tag{3.4}$$

пространств распределений на $\mathbb{R}^n$. В нем, согласно лемме 3.1, числовой параметр s задает *основную* гладкость пространства, а функциональный параметр φ определяет подчиненную основной *дополнительную* гладкость. Короче говоря, φ уточняет основную s-гладкость. Поэтому семейство (3.4) мы называем *уточненной шкалой на* $\mathbb{R}^n$ (по отношению к шкале $\{H^s(\mathbb{R}^n) : s \in \mathbb{R}\}$ пространств бесселевых потенциалов).

Существует тесная связь между этими шкалами, приводящая к тому, что их свойства во многом аналогичны. Она состоит в том, что каждое пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ может быть получено интерполяцией с функциональным параметром в шкале пространств бесселевых потенциалов. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Положим $\psi(t) = t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\,\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ при $t \geq 1$ и $\psi(t) = \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Тогда*:

а) *функция ψ удовлетворяет всем условиям теоремы* 2.1 *и, следовательно, является интерполяционным параметром*;

б) *для произвольного $s \in \mathbb{R}$ справедливо следующее равество пространств с эквивалентностью норм в них*:

$$\left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\right]_{\psi} = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Поскольку $\varphi \in \mathcal{M}$, то, очевидно, ψ удовлетворяет условиям а), б) теоремы 2.1. Далее, из условия $\varphi \in \mathcal{M} \subset \mathrm{SV}$ в силу предложения 1.3 г) вытекает, что функция $\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ аргумента $t \geq 1$ является медленно меняющейся на $+\infty$. Следовательно, ψ — функция, правильно меняющаяся на $+\infty$ порядка $\theta = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta} \in (0; 1)$. Таким образом, ψ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 и, согласно этой теореме, является интерполяционным параметром. Пункт а) доказан.

Установим теперь п. б). Пусть $s \in \mathbb{R}$. Из свойств гильбертовой шкалы пространств бесселевых потенциалов [8, с. 250 – 253; 9, с. 211 – 216] следует, что пара $[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)]$ допустимая, причем псевдодифференциальный оператор с символом $\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}$ является порождающим оператором A для этой пары. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F} : H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \langle\xi\rangle^{2(s-\varepsilon)}d\xi)$ оператор A приводится к виду умножения на функцию $\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}$ аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Значит, поскольку оператор $\psi(A)$ приведен к виду умножения на функцию $\psi(\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}) = \langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)$, его область определения такова:

$$\left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\right]_{\psi} =$$
$$= \left\{u \in H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) : \langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, \langle\xi\rangle^{2(s-\varepsilon)} d\xi)\right\} =$$
$$= \left\{u \in H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) : \int \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\; |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty\right\} =$$
$$= H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \cap H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),$$

причем последнее равенство справедливо в силу правого вложения (3.2). Кроме того, квадрат нормы распределения u в пространстве $[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)]_{\psi}$

$$\|u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|\psi(A)u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \int |\langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2(s-\varepsilon)}\, d\xi = \|u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда вследствие правого непрерывного вложения (3.2) имеем сформулированную в п. б) эквивалентность норм. Этот пункт, а с ним и теорема 3.1 доказаны.

***Замечание* 3.2.** В связи с последней теоремой отметим статью Г. Шлензак [7, с. 54], в которой интерполяция с функциональным параметром была применена к шкале пространств бесселевых потенциалов. В результате были получены некоторые гильбертовы пространства Хермандера – Волевича – Панеяха. Хотя шкала таких пространств и названа уточненной, в ней нельзя выделить основную (степенную) и уточненную (функциональную) гладкость пространств, в отличие от предложенной нами шкалы (3.4).

Установим теперь ряд свойств уточненной шкалы (3.4) на $\mathbb{R}^n$. Напомним, что, как обычно, $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, имеющих компактный носитель. Обозначим через $C^{\rho}(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq 0$, пространства Гельдера на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [9, с. 242]). Понятно, что в случае целого $\rho \geq 0$ функция $u \in C^{\rho}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными до порядка ρ включительно.

Теорема 3.2. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{M}$. *Тогда*:

а) *пространство* $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *полное*;

б) *непрерывные вложения* (3.2) *и* (3.3) *плотны*;

в) *множество* $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *плотно в* $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$;

г) *если существует такая постоянная* $c > 0$, *что* $\varphi(t) \leq c\varphi_1(t)$ *при* $t \gg 1$, *то справедливо непрерывное плотное вложение* $H^{s,\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$;

д) *если*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} < +\infty, \tag{3.5}$$

то справедливо непрерывное вложение

$$H^{\rho+n/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\rho}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad \rho \geq 0; \tag{3.6}$$

е) *пространства* $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *и* $H^{-s,1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *взаимно сопряжены относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в* $L_2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Хорошо известно, что пространства бесселевых потенциалов полны. Поэтому в силу теоремы 3.1 пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ полное как результат (с точностью до эквивалентности норм) интерполяции двух гильбертовых пространств. Из этой же теоремы на основании леммы 2.1 следует, что непрерывное вложение (3.2) плотно. Значит, и (3.3) плотно. Пункты а), б) доказаны. Левое вложение (3.2) вместе с уже известной плотностью множества $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$

влекут пункт в). Пункт г) очевиден, если учесть, что его условие для функций $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{M}$ означает следующее: $\varphi(t) \leq c_1 \varphi_1(t)$ при $t \geq 1$ для некоторой постоянной $c_1 > 0$. Докажем п. д). Переходя от декартовых координат к сферическим и затем выполняя замену переменной $t = (1 + r^2)^{1/2}$, имеем

$$\int \langle\xi\rangle^{-n} \varphi^{-2}(\langle\xi\rangle)\, d\xi = c_2 \int\limits_0^{+\infty} (1 + r^2)^{-n/2}\, \varphi^{-2}((1 + r^2)^{1/2})\, r^{n-1} dr =$$

$$= c_2 \int\limits_1^{+\infty} t^{-n} \varphi^{-2}(t)\, (t^2 - 1)^{(n-1)/2}\, \frac{t\, dt}{(t^2 - 1)^{1/2}} \leq c_2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{\varphi^2(t)\, (t^2 - 1)^{1/2}};$$

здесь c_2 — некоторая положительная постоянная. Поскольку функция $\dfrac{1}{\varphi^2(t)}$ ограничена в окрестности точки $t = 1$, последний интеграл конечен в силу (3.5). Итак, $J = \displaystyle\int \langle\xi\rangle^{-n} \varphi^{-2}(\langle\xi\rangle)\, d\xi < \infty$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 9.1 статьи [4, с. 52, 53]. (Непосредственно использовать эту теорему нельзя, поскольку в ней фигурируют анизотропные пространства Гельдера, такие, что $C^{\rho}(\mathbb{R}^n)$ не является их частным случаем.) Представим число $\rho \geq 0$ в виде $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 — целая часть ρ и $0 \leq \rho_1 < 1$. Пусть неотрицательные целые числа $r_1, \ldots, r_n$ удовлетворяют неравенству $r_1 + \ldots + r_n \leq \rho_0$. Тогда для произвольных $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\left| \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n}\, u(x) \right| = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int \xi_1^{r_1} \ldots \xi_n^{r_n}\, \widehat{u}(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int \langle\xi\rangle^{\rho}\, |\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \frac{J^{1/2}}{(2\pi)^n} \|u\|_H;$$

в этом доказательстве мы обозначаем через $\|u\|_H$ и $\|u\|_C$ нормы распределения u в $H^{\rho+n/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ и в $C^{\rho}(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Кроме того, для произвольного $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ запишем

$$|h|^{-\rho_1} \left| \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n} (u(x + h) - u(x)) \right| =$$

$$= |h|^{-\rho_1} (2\pi)^{-n} \left| \int \xi_1^{r_1} \ldots \xi_n^{r_n} (\widehat{u}(\xi) e^{-ih\xi} - \widehat{u}(\xi))\, e^{-ix\xi}\, d\,\xi \right| \leq$$

$$\leq |h|^{-\rho_1} (2\pi)^{-n} \int \langle\xi\rangle^{\rho_0}\, |\widehat{u}(\xi)|\, \left| e^{-ih\xi} - 1 \right|\, d\xi \leq$$

$$\leq |h|^{-\rho_1}\, (2\pi)^{-n}\, \|u\|_H \left(\int \frac{\langle\xi\rangle^{2\rho_0}\, \left| e^{-ih\xi} - 1 \right|^2}{\langle\xi\rangle^{2\rho+n}\, \varphi^2(\langle\xi\rangle)}\, d\xi \right)^{1/2} =$$

$$= (2\pi)^{-n}\, \|u\|_H \left(\int \langle\xi\rangle^{-n}\, \varphi^{-2}(\langle\xi\rangle)\, \frac{4 \sin^2 \left(\frac{1}{2}\, \xi\, \eta\right)}{(\langle\xi\rangle\, |h|)^{2\rho_1}}\, d\xi \right)^{1/2} \leq 2(2\pi)^{-n} \|u\|_H J^{1/2}.$$

Здесь последнее неравенство вытекает из того, что, поскольку $0 \leq \rho_1 < 1$, дробь под знаком последнего интеграла, очевидно, не превышает 4. Таким образом, $\|u\|_C \leq \mathrm{const}\, \|u\|_H,\ u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n$. Отсюда в силу п. в) следует непрерывное вложение (3.6). Пункт д) доказан. Последний п. е) является частным случаем утверждения о сопряженном пространстве из работ [3, с. 61] (теорема 2.2.9) и

[4, с. 15] (формула (2.3)). Отметим, что в силу предложения 1.3 в) справедливо $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varphi} \in \mathcal{M}$. Значит, пространство $H^{-s,1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено.

Теорема 3.2 доказана.

***Замечание* 3.3.** Пусть целое $\rho \geq 0$. Согласно известной теореме вложения С. Л. Соболева, $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^\rho(\mathbb{R}^n)$ при $s > \rho + \dfrac{n}{2}$. Однако $H^{\rho+n/2}(\mathbb{R}^n) \not\subseteq C^\rho(\mathbb{R}^n)$. Теорема 3.2 д) позволяет с помощью параметра φ так уточнить основную гладкость пространства, чтобы имело место вложение (3.6). Таким образом, шкала пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ дает возможность точнее характеризовать гладкость распределения по свойствам его преобразования Фурье. Отметим, что утверждения, аналогичные п. д) теоремы 3.2, устанавливались для пространств Хермандера и Волевича – Панеяха в работах [3, с. 59; 4, с. 33, 52]. Из этих работ, в частности, следует, что условие (3.5) является необходимым и достаточным для включения (3.6) при целом $\rho \geq 0$.

Определим далее уточненную шкалу на полупространстве $\mathbb{R}^n_+$. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$ фактор-пространство гильбертова пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по подпространству

$$\left\{ w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \ \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+ \right\}. \tag{3.7}$$

Это подпространство замкнуто, поскольку непрерывно вложено в топологическое пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ распределений на $\mathbb{R}^n$. (Последнее вытекает из (3.2) и известного непрерывного вложения $H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.) Следовательно, $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$ — гильбертово пространство. В нем скалярное произведение классов смежности распределений $u_1, u_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ равно скалярному произведению в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ распределений $u_1 - \Pi u_1$, $u_2 - \Pi u_2$; здесь Π — ортопроектор в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство (3.7). Заметим, что $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$ естественно трактовать как пространство сужений на $\mathbb{R}^n_+$ всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. При этом норма в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$ такого сужения v равна

$$\inf \left\{ \|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : \quad u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad u = v \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n_+ \right\}.$$

В частном случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$ обозначаем также через $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Это известное (см., например, [9, с. 265]) пространство бесселевых потенциалов на $\mathbb{R}^n_+$.

Семейство $\left\{ H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M} \right\}$ мы называем *уточненной шкалой на* $\mathbb{R}^n_+$. Для нее справедливы аналоги теорем 3.1 б) и 3.2, которые мы сейчас и рассмотрим.

Теорема 3.3. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Тогда для произвольного $s \in \mathbb{R}$ справедливо следующее равенство пространств с эквивалентностью норм в них*:

$$\left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+) \right]_\psi = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+). \tag{3.8}$$

Здесь ψ — интерполяционный параметр из теоремы 3.1.

Доказательство. Содержащаяся в левой части (3.8) пара пространств, очевидно, допустима. Рассмотрим оператор R_+ сужения распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n_+$. Имеем линейные ограниченные сюръективные операторы

$$R_+ : \ H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), \qquad R_+ : \ H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n) \to H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+),$$

$$R_+ : \ H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+). \tag{3.9}$$

Поскольку, согласно теореме 3.1 а), ψ — интерполяционный параметр, два первых оператора влекут ограниченность оператора

$$R_+ : \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi \to \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi,$$

который в силу теоремы 3.1 б) принимает вид

$$R_+ : H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi.$$

Отсюда вследствие сюръективности оператора (3.9) получаем

$$H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) \subseteq \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi. \tag{3.10}$$

Докажем обратное непрерывное вложение. В монографии [9, с. 265, 266] для произвольного номера k построен линейный ограниченный оператор

$$T_k : H^\sigma(\mathbb{R}^n_+) \to H^\sigma(\mathbb{R}^n), \quad |\sigma| < k, \tag{3.11}$$

продолжающий распределение с $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$. Последнее означает, что R_+T_k — тождественный оператор. Возьмем такой номер k, чтобы $|s-\varepsilon| < k$ и $|s+\delta| < k$, и рассмотрим ограниченные операторы (3.11) для $\sigma = s-\varepsilon$ и $\sigma = s+\delta$. Поскольку ψ — интерполяционный параметр, они влекут ограниченность оператора

$$T_k : \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi \to \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi,$$

откуда, согласно теореме 3.1 б),

$$T_k : \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда и на основании (3.9) получаем ограниченность тождественного оператора

$$I = R_+T_k : \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+)\right]_\psi \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+).$$

Таким образом, наряду с включением (3.10) имеет место обратное ему непрерывное вложение. Следовательно, справедливо равенство пространств (3.8), причем, по теореме Банаха об обратном операторе, нормы в этих пространствах эквивалентны.

Теорема 3.3 доказана.

Пусть $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ — замыкание полупространства $\mathbb{R}^n_+$. Обозначим через $C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ и $C^\rho(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, $\rho \geq 0$, пространства сужений на $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ всех функций из $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ и $C^\rho(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Пространство $C^\rho(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ банахово относительно нормы

$$\|v\|_{C^\rho(\overline{\mathbb{R}}^n_+)} = \inf\left\{ \|u\|_{C^\rho(\mathbb{R}^n)} : \quad u \in C^\rho(\mathbb{R}^n), \quad u = v \quad \text{на} \quad \overline{\mathbb{R}}^n_+ \right\}.$$

Теорема 3.4. *Пункты* а) – д) *теоремы* 3.2 *остаются в силе, если в ее формулировке и в формулах* (3.2) *и* (3.3) *заменить* $\mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{R}^n_+$ *в обозначениях пространств уточненной шкалы, а также* $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ *на* $C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ *и* $C^\rho(\mathbb{R}^n)$ *на* $C^\rho(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$.

Теорема 3.4 тривиально следует из теоремы 3.2 и определения уточненной шкалы на $\mathbb{R}^n_+$.

Теперь перейдем к построению уточненной шкалы на многообразии. Итак, пусть $\overline{M}$ — бесконечно гладкое компактное многообразие размерности $n \geq 1$ с краем $\partial\overline{M}$. Положим $M = \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$. Отметим, что мы допускаем случай $\partial\overline{M} = \varnothing$, т. е. когда $\overline{M} = M$ — замкнутое многообразие. Следуя [10, с. 636], обозначим через $\overline{\mathcal{D}}\,'(M)$ пространство продолжаемых распределений в M. (Если $\overline{M}$ замкнуто, то $\overline{\mathcal{D}}\,'(M)$ — это пространство $\mathcal{D}'(\overline{M})$ всех распределений на $\overline{M}$.)

Возьмем какой-либо конечный атлас $\alpha_j : \overline{\Pi}_j \leftrightarrow U_j$, $j = 1, \ldots, r$, из C^∞-структуры на $\overline{M}$. Здесь U_j, $j = 1, \ldots, r$, — открытые (в топологии пространства $\overline{M}$) множества, образующие конечное покрытие многообразия $\overline{M}$. Здесь также Π_j обозначает либо $\mathbb{R}^n$ либо $\mathbb{R}^n_+$, а $\overline{\Pi}_j$ — замыкание множества Π_j в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $\overline{\Pi}_j$ — либо $\mathbb{R}^n$ либо $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ соответственно). (В случае замкнутого многообразия $\overline{M}$ все $\Pi_j = \overline{\Pi}_j = \mathbb{R}^n$.) Возьмем, кроме того, какое-либо разбиение единицы $\chi_j \in C^\infty(\overline{M})$, $j = 1, \ldots, r$, на $\overline{M}$, удовлетворяющее условию $\mathrm{supp}\chi_j \subseteq U_j$. Обозначим через $\mathcal{A}$ пару, состоящую из взятых нами атласа и разбиения единицы.

Пусть, как и прежде, $s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$ пространство всех таких $f \in \overline{\mathcal{D}}\,'(M)$, что $(\chi_j f) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\Pi_j)$ для каждого $j = 1, \ldots, r$. Здесь $(\chi_j f) \circ \alpha_j$ — представление распределения $\chi_j f$ в локальной карте α_j. В $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$ введем скалярное произведение по формуле

$$(f, g)_{H^{s,\varphi}(M,\mathcal{A})} = \sum_{j=1}^{r} ((\chi_j f) \circ \alpha_j,\ (\chi_j g) \circ \alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\Pi_j)}.$$

Оно порождает норму

$$\|f\|_{H^{s,\varphi}(M,\mathcal{A})} = \left(\sum_{j=1}^{r} \|(\chi_j f) \circ \alpha_j\|^2_{H^{s,\varphi}(\Pi_j)} \right)^{1/2}.$$

Семейство $\{H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A}) \colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$ назовем *уточненной шкалой на* M, *соответствующей паре* $\mathcal{A}$.

В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$ также будем обозначать через $H^s(M, \mathcal{A})$. $H^s(M, \mathcal{A})$ — это пространство бесселевых потенциалов на M порядка s. Известно, что оно гильбертово и с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора пары $\mathcal{A}$.

Покажем, что любое пространство $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, получается интерполяцией в шкале пространств бесселевых потенциалов на M. Отсюда будет следовать, что $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$ также не зависит от $\mathcal{A}$.

Теорема 3.5. *Пусть заданы функция* $\varphi \in \mathcal{M}$ *и положительные числа* ε, δ. *Тогда для произвольного* $s \in \mathbb{R}$ *справедливо следующее равенство пространств с эквивалентностью норм в них:*

$$\left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}),\ H^{s+\delta}(M, \mathcal{A})\right]_{\psi} = H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A}). \tag{3.12}$$

Здесь ψ — *интерполяционный параметр из формулировки теоремы* 3.1.

Доказательство. Известно, что содержащаяся в левой части (3.12) пара пространств бесселевых потенциалов допустима. Равенство (3.12) выведем из теорем 3.1 и 3.3 с помощью стандартного приема „распрямления многообразия $\overline{M}$”. В силу определения уточненной шкалы на M линейное отображение „распрямления”

$$T \colon\ f \mapsto ((\chi_1 f) \circ \alpha_1, \ldots, (\chi_r f) \circ \alpha_r\ , \quad f \in \overline{\mathcal{D}}\,'(M),$$

задает изометрические операторы

$$T \colon\ H^{\sigma}(M, \mathcal{A})\ \to\ \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma}(\Pi_j), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

$$T \colon\ H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})\ \to\ \prod_{j=1}^{r} H^{s,\varphi}(\Pi_j). \tag{3.14}$$

Поскольку параметр ψ интерполяционный, из (3.13) для $\sigma = s - \varepsilon$ и $\sigma = s + \delta$ следует ограниченный оператор

$$T \colon\ \left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}),\ H^{s+\delta}(M, \mathcal{A})\right]_{\psi}\ \to\ \left[\prod_{j=1}^{r} H^{s-\varepsilon}(\Pi_j),\ \prod_{j=1}^{r} H^{s+\delta}(\Pi_j)\right]_{\psi}.$$

Но в силу предложения 2.1 и теорем 3.1 (для $\Pi_j = \mathbb{R}^n$) и 3.3 (для $\Pi_j = \mathbb{R}^n_+$) справедливо

$$\left[\prod_{j=1}^{r} H^{s-\varepsilon}(\Pi_j),\ \prod_{j=1}^{r} H^{s+\delta}(\Pi_j)\right]_{\psi} =$$

$$= \prod_{j=1}^{r} \left[\, H^{s-\varepsilon}(\Pi_j),\ H^{s+\delta}(\Pi_j)\,\right]_{\psi} = \prod_{j=1}^{r} H^{s,\varphi}(\Pi_j) \tag{3.15}$$

с эквивалентностью норм. Значит, последний ограниченный оператор принимает вид

$$T:\ \left[H^{s-\varepsilon}(M,\mathcal{A}),\ H^{s+\delta}(M,\mathcal{A})\right]_{\psi} \ \to\ \prod_{j=1}^{r} H^{s,\varphi}(\Pi_j). \tag{3.16}$$

Построим для T левый обратный оператор K. Для каждого $j=1,\ldots,r$ возьмем такую функцию $\eta_j \in C_0^{\infty}(\overline{\Pi}_j)$, что $\eta_j = 1$ на множестве $\alpha_j^{-1}(\mathrm{supp}\,\chi_j)$. Рассмотрим линейное отображение

$$K:\ (h_1,\ldots,h_r)\ \mapsto\ \sum_{j=1}^{r}\ \Theta_j\left(\,(\eta_j h_j)\circ\alpha_j^{-1}\right),$$

заданное на векторах $(h_1,\ldots,h_r)$, компоненты h_j которых являются распределениями на Π_j. Здесь $(\eta_j h_j)\circ\alpha_j^{-1}$ — такое распределение на $U_j\cap M$, что его представитель в локальной карте α_j имеет вид $\eta_j h_j$. Кроме того, Θ_j — оператор продолжения нулем с $U_j\cap M$ на M. Очевидно, Θ_j корректно определен на распределениях вида $(\eta_j h_j)\circ\alpha_j^{-1}$. В силу выбора функций $\chi_j,\ \eta_j$ имеем

$$KTf = \sum_{j=1}^{r}\ \Theta_j\left((\eta_j\ ((\chi_j f)\circ\alpha_j))\circ\alpha_j^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\ \Theta_j\left((\chi_j f)\circ\alpha_j\circ\alpha_j^{-1}\right) = \sum_{j=1}^{r}\ \chi_j f = f,$$

т. е.

$$KTf = f,' \quad f\in\overline{\mathcal{D}}'(M). \tag{3.17}$$

Покажем теперь, что сужение отображения K является ограниченным оператором

$$K:\ \prod_{j=1}^{r} H^{s,\varphi}(\Pi_j)\ \to\ H^{s,\varphi}(M,\mathcal{A}). \tag{3.18}$$

Для произвольного вектора $(h_1,\ldots,h_r)$ из левого пространства в (3.18) запишем

$$\left\|K(h_1,\ldots,h_r)\right\|^2_{H^{s,\,\varphi}(M,\mathcal{A})} = \sum_{l=1}^{r}\left\|(\chi_l\,K(h_1,\ldots,h_r))\circ\alpha_l\right\|^2_{H^{s,\,\varphi}(\Pi_l)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{r}\left\|\left(\chi_l\ \sum_{j=1}^{r}\ \Theta_j\left((\eta_j h_j)\circ\alpha_j^{-1}\right)\right)\circ\alpha_l\right\|^2_{H^{s,\varphi}(\Pi_l)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{r}\left\|\ \sum_{j=1}^{r}(\eta_{j,l}\,h_j)\circ\beta_{j,l}\right\|^2_{H^{s,\varphi}(\Pi_l)} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \left\| (\eta_{j,l}\, h_j) \circ \beta_{j,l} \right\|_{H^{s,\varphi}(\Pi_l)} \right)^2 . \tag{3.19}$$

Здесь $\eta_{j,l} = (\chi_l \circ \alpha_j)\, \eta_j \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_j)$, причем если $\operatorname{supp} \eta_{j,l} \subseteq \mathbb{R}^n_+ = \Pi_j$, то функция $\eta_{j,l}$ продолжается нулем на $\mathbb{R}^n$ и тогда $\eta_{j,l} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Здесь также $\beta_{j,l} : \mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ — такой C^∞-диффеоморфизм, что $\beta_{j,l} = \alpha_j^{-1} \circ \alpha_l$ в окрестности (в топологии пространства $\overline{\Pi}_j$) множества $\operatorname{supp} \eta_{j,l}$ и, кроме того, $\beta_{j,l}(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, достаточно больших по модулю. Как известно [5, с. 247; 11, с. 46], оператор умножения на функцию класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и оператор замены переменных $u \mapsto u \circ \beta_{j,l}$ ограничены в каждом пространстве $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, где $\sigma \in \mathbb{R}$. Поэтому линейный оператор $u \mapsto (\eta_{j,l}\, u) \circ \beta_{j,l}$ ограничен как оператор из $H^\sigma(\Pi_j)$ в $H^\sigma(\Pi_l)$. Взяв здесь сначала $\sigma = s - \varepsilon$, а затем $\sigma = s + \delta$ и воспользовавшись интерполяционными теоремами 3.1, 3.3, получим, что отображение $h_j \mapsto (\eta_{j,l}\, h_j) \circ \beta_{j,l}$ является ограниченным оператором, действующим из $H^{s,\varphi}(\Pi_j)$ в $H^{s,\varphi}(\Pi_l)$. Следовательно, соотношения (3.19) влекут оценку

$$\left\| K(h_1, \ldots, h_r) \right\|^2_{H^{s,\varphi}(M,\mathcal{A})} \;\leq\; c \sum_{j=1}^{r} \left\| h_j \right\|^2_{H^{s,\varphi}(\Pi_j)}$$

с постоянной c, не зависящей от $(h_1, \ldots, h_r)$. Это и означает ограниченность оператора (3.18) для любых $s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}$. Отсюда как частный случай имеем ограниченность операторов

$$K : \prod_{j=1}^{r} H^\sigma(\Pi_j) \;\to\; H^\sigma(M, \mathcal{A}), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Возьмем их для $\sigma = s - \varepsilon$ и $\sigma = s + \delta$ и применим интерполяцию с параметром φ. В силу (3.15) получим ограниченный оператор

$$K : \prod_{j=1}^{r} H^{s,\varphi}(\Pi_j) \;\to\; \left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}),\, H^{s+\delta}(M, \mathcal{A}) \right]_\psi . \tag{3.20}$$

Теперь из (3.14), (3.20) и (3.17) следует непрерывность вложения

$$I = KT : \; H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A}) \;\to\; \left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}),\, H^{s+\delta}(M, \mathcal{A}) \right]_\psi .$$

Обратное ему непрерывное вложение вытекает из (3.16) – (3.18). Тем самым справедливо равенство пространств (3.12) с эквивалентностью норм в них.

Теорема 3.5 доказана.

***Следствие* 3.1.** *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ пространство $H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A})$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора пары $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Известно [3, с. 82], что пространство бесселевых потенциалов на M не зависит (с точностью до эквивалентности норм) от выбора пары $\mathcal{A}$. Поэтому, взяв наряду с $\mathcal{A}$ еще одну пару $\mathcal{A}_1$ (того же типа, что и $\mathcal{A}$), получим, что тождественный оператор I осуществляет топологические изоморфизмы $I : \; H^{s\mp\varepsilon}(M, \mathcal{A}) \;\leftrightarrow\; H^{s\mp\varepsilon}(M, \mathcal{A}_1)$, $\varepsilon > 0$. Пусть теперь ψ — интерполяционный параметр из формулировки теоремы 3.1, в которой $\varepsilon = \delta > 0$. Применив интерполяцию с параметром ψ к этим изоморфизмам, получим топологический изоморфизм

$$I : \; \left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}),\, H^{s+\delta}(M, \mathcal{A}) \right]_\psi \;\leftrightarrow\; \left[H^{s-\varepsilon}(M, \mathcal{A}_1),\, H^{s+\delta}(M, \mathcal{A}_1) \right]_\psi ,$$

который в силу теоремы 3.5 таков, что $I : H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A}) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(M, \mathcal{A}_1)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.1 позволяет в дальнейшем обозначать пространство $H^{s,\varphi}(M,\mathcal{A})$ через $H^{s,\varphi}(M)$. При этом скалярное произведение в $H^{s,\varphi}(M)$ будем вычислять с помощью какой-либо фиксированной пары $\mathcal{A}$.

Свойства уточненных шкал на M и $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^n_+$) аналогичны. Кроме того, поскольку многообразие $\overline{M}$ компактно, для M некоторые вложения пространств будут компактными.

Теорема 3.6. *Пусть $s\in\mathbb{R}$ и $\varphi,\varphi_1\in\mathcal{M}$. Тогда*:

а) *пространство $H^{s,\varphi}(M)$ полное*;

б) *справедливы компактные плотные вложения*

$$H^{s+\varepsilon}(M)\hookrightarrow H^{s,\varphi}(M)\hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(M),\quad \varepsilon>0, \tag{3.21}$$

$$H^{s+\varepsilon,\varphi_1}(M)\hookrightarrow H^{s,\varphi}(M),\quad \varepsilon>0; \tag{3.22}$$

в) *множество $C^\infty(\overline{M})$ плотно в $H^{s,\varphi}(M)$*;

г) *если существует такая постоянная $c>0$, что $\varphi(t)\le c\,\varphi_1(t)$ при $t\gg1$, то справедливо непрерывное плотное вложение*

$$H^{s,\,\varphi_1}(M)\hookrightarrow H^{s,\,\varphi}(M); \tag{3.23}$$

это вложение компактно, если $\varphi(t)/\varphi_1(t)\to0$ при $t\to+\infty$;

д) *если выполняется* (3.5), *то справедливо компактное вложение*

$$H^{\rho+n/2,\,\varphi}(M)\hookrightarrow C^\rho(\,\overline{M}\,)\quad \textit{при}\quad \rho\ge0; \tag{3.24}$$

здесь $C^\rho(\,\overline{M}\,)$ — пространство Гельдера на $\overline{M}$ порядка ρ;

е) *если многообразие $\overline{M}$ замкнуто, то пространства $H^{s,\varphi}(M)$ и $H^{-s,1/\varphi}(M)$ взаимно сопряжены относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $H^0(M)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.5 пространство $H^{s,\varphi}(M)$ полное как результат интерполяции двух гильбертовых пространств бесселевых потенциалов. Непрерывные вложения (3.21)–(3.24) являются очевидными следствиями теорем 3.2 б), г), д) и 3.4. В силу теоремы 3.5 и леммы 2.1 вложения (3.21) плотные. Отсюда и из известной плотности множества $C^\infty(\,\overline{M}\,)$ в $H^{s+\varepsilon}(M)$ следует плотность $C^\infty(\,\overline{M}\,)$ в $H^{s,\varphi}(M)$. Поэтому вложения (3.22), (3.23) также плотные. Установим теперь компактность вложений. Начнем с (3.23). Предположим, что $\dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}\to0$ при $t\to+\infty$. Тогда, согласно теореме 2.2.3 из монографии [3, с. 56] или теореме 8.1 из обзора [4, с. 48], для произвольного компакта $E\subseteq\mathbb{R}^n$ справедливо компактное вложение

$$\{\,u\in H^{s,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)\;:\;\operatorname{supp}u\subseteq E\,\}\;\hookrightarrow\;H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n). \tag{3.25}$$

Воспользуемся оператором „распрямления” T и левым обратным к нему оператором K из доказательства теоремы 3.5. Это ограниченные операторы вида

$$T:\;H^{s,\varphi_1}(M)\;\to\;\prod_{j=1}^{r}\;\{\,u\in H^{s,\varphi_1}(\Pi_j)\;:\;\operatorname{supp}u\subseteq E_j\,\}$$

и (3.18). Здесь $E_j=\alpha^{-1}(\operatorname{supp}\chi_j)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Компактное вложение (3.25) влечет компактный оператор вложения

$$I:\;\prod_{j=1}^{r}\;\{\,u\in H^{s,\varphi_1}(\Pi_j)\;:\;\operatorname{supp}u\subseteq E_j\,\}\;\to\;\prod_{j=1}^{r}\;H^{s,\varphi}(\Pi_j).$$

Следовательно, оператор вложения (3.23) компактен, поскольку он равен KIT. Отсюда вытекает компактность вложения (3.22) для произвольных $\varphi,\varphi_1\in\mathcal{M}$, так как оно является композицией компактного и непрерывного вложений $H^{s+\varepsilon,\,\varphi_1}(M) \hookrightarrow \hookrightarrow H^{s+\varepsilon,\,\varphi_2}(M) \hookrightarrow H^{s,\,\varphi}(M)$, где функцию $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ выбираем, например, так, чтобы $\varphi_2(t) = \dfrac{\varphi_1(t)}{\ln t}$ при $t \gg 1$. Теперь вложения (3.21) также компактны как частные случаи (3.22). Докажем компактность последнего вложения (3.24). Пусть выполняется (3.5). Как отмечалось в замечании 3.1, без ограничения общности можно считать функцию $\varphi \in \mathcal{M}$ непрерывной. Тогда в силу предложения 1.3 г) функция $\psi_1 = \varphi^2$ удовлетворяет условию леммы 1.2. Пусть ψ_0 — функция из формулировки этой леммы. Тогда $\varphi_0 = \sqrt{\psi_0} \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию $\dfrac{\varphi_0(t)}{\varphi(t)} \to 0$ при $t \to +\infty$ и неравенству (3.5) с φ_0 вместо φ. Следовательно, согласно доказанному,

$$H^{\rho+n/2,\,\varphi}(M) \hookrightarrow H^{\rho+n/2,\,\varphi_0}(M) \hookrightarrow C^{\rho}(\,\overline{M}\,), \quad \rho \geq 0,$$

причем первое вложение компактно, а второе непрерывно. Тем самым установлена компактность вложения (3.24). Пункты а) – д) теоремы доказаны. Последний п. е) выводится из теоремы 3.2 е) аналогично частному случаю $\varphi \equiv 1$ пространств бесселевых потенциалов.

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай, когда M — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $H^{s,\varphi}(M)$ можно определить с помощью глобальных координат в $\mathbb{R}^n$ аналогично пространству $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. *Пусть компактное многообразие $\overline{M}$ класса C^∞ с непустым краем $\partial\overline{M}$ такое, что $M = \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Тогда $H^{s,\varphi}(M)$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, состоит из сужений на M всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. При этом норма распределения g в $H^{s,\varphi}(M)$ эквивалентна норме*

$$\inf\left\{ \|f\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : \ f \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad f = g \quad \text{на} \quad M \right\}.$$

Доказательство. В случае $\varphi \equiv 1$ эта теорема хорошо известна (см., например, [5, с. 273 – 275], предложение 3.2.3). Для произвольного $\varphi \in \mathcal{M}$ она доказывается аналогично. Впрочем ее легко вывести из случая $\varphi \equiv 1$ интерполяцией. Действительно, в этом случае существует линейный ограниченный оператор $R_M : H^\sigma(\mathbb{R}^n) \to H^\sigma(M)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, сужения распределения с $\mathbb{R}^n$ на M. Известно [9, с. 386], что для любого целого $k > 0$ оператор R_M имеет линейный ограниченный правый обратный оператор $T_{M,k} : H^\sigma(M) \to H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $|\sigma| < k$, продолжающий распределение с M на $\mathbb{R}^n$. Пусть теперь $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. Возьмем такое целое k, чтобы $|s \mp \varepsilon| < k$. Пусть ψ — интерполяционный параметр из теорем 3.1 и 3.5 для $\varepsilon = \delta$. Применим эти теоремы к пространствам, в которых действуют операторы R_M и $T_{M,k}$, рассмотренные для $\sigma = s \mp \varepsilon$. Получим ограниченные операторы $R_M : H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to H^{s,\varphi}(M)$ и $T_{M,k} : H^{s,\varphi}(M) \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

В заключение этого пункта докажем для уточненной шкалы теорему о следах распределений на краю многообразия. Предположим далее, что $\overline{\Omega}$ — бесконечно гладкое компактное многообразие размерности $n \geq 2$ с непустым краем Γ. Поскольку Γ — замкнутое многообразие размерности $n-1$, то на Γ, как и на $\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Gamma$, определены уточненные шкалы.

Теорема 3.8. *Рассмотрим линейное отображение*

$$f \ \to \ f \restriction \Gamma - \textit{след функции } f \textit{ на } \Gamma \quad (f \in C^\infty(\overline{\Omega})). \tag{3.26}$$

Тогда:

а) *отображение* (3.26) *продолжается по непрерывности до ограниченного оператора*

$$R_\Gamma: \ H^{s+1/2,\,\varphi}(\Omega) \ \rightarrow \ H^{s,\varphi}(\Gamma), \quad s>0, \quad \varphi\in\mathcal{M}, \tag{3.27}$$

который имеет ограниченный правый обратный оператор

$$S_\Gamma: \ H^{s,\varphi}(\Gamma) \ \rightarrow \ H^{s+1/2,\,\varphi}(\Omega), \quad s>0, \quad \varphi\in\mathcal{M}, \tag{3.28}$$

такой, что S_Γ *не зависит от* s,φ;

б) *если* $\varphi\in\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* (3.5)*, то отображение* (3.26) *продолжается по непрерывности до ограниченного оператора*

$$R_\Gamma: \ H^{1/2,\,\varphi}(\Omega) \ \rightarrow \ H^{0,\,\varphi_0}(\Gamma), \tag{3.29}$$

где функция $\varphi_0\in\mathcal{M}$ *определяется по формуле*

$$\varphi_0(\tau)=\left(\int\limits_{\tau}^{+\infty}\frac{d\,t}{t\,\varphi^2(t)}\right)^{-1/2}, \quad \tau\geq 1; \tag{3.30}$$

этот оператор имеет ограниченный правый обратный

$$S_{\Gamma,\,\varphi}: \ H^{0,\,\varphi_0}(\Gamma) \ \rightarrow \ H^{1/2,\,\varphi}(\Omega), \tag{3.31}$$

зависящий от φ.

Доказательство. Установим сначала п. а). Мы выведем его из аналогичной теоремы о следах для пространств бесселевых потенциалов на $\mathbb{R}^n_+$. Рассмотрим линейное отображение $R_0^+: v(x',x_n)\mapsto v(x',0)$, $v\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, сопоставляющее функции $v(x',x_n)$ аргументов $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x_n\in\mathbb{R}$ ее след $v(x',0)$ на гиперплоскости $x_n=0$. Известно [9, с. 267], что это отображение продолжается по непрерывности до ограниченного оператора $R_0^+: H^{\sigma+1/2}(\mathbb{R}^n_+)\rightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^{n-1})$, $\sigma>0$, который имеет линейный ограниченный правый обратный оператор $S_0^+: H^\sigma(\mathbb{R}^{n-1})\rightarrow$ $\rightarrow H^{\sigma+1/2}(\mathbb{R}^n_+)$, $\sigma>0$, не зависящий от σ. Пусть $s>0,\varphi\in\mathcal{M}$. Применим интерполяционные теоремы 3.1 и 3.3 к операторам R_0^+ и S_0^+, рассмотренным для $\sigma=s\mp\varepsilon$, где $\varepsilon=\dfrac{s}{2}>0$. Получим ограниченные операторы

$$R_0^+: \ H^{s+1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) \ \rightarrow \ H^{s,\,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{3.32}$$

$$S_0^+: \ H^{s,\,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \ \rightarrow \ H^{s+1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+). \tag{3.33}$$

Из них легко „склеить” операторы R_Γ и S_Γ с помощью оператора T и левого обратного к нему оператора K из доказательства теоремы 3.5. Действительно, положим $R_\Gamma f=KR_0^+Tf$, $f\in H^{s+1/2,\,\varphi}(\Omega)$, и $S_\Gamma g=KS_0^+Tg$, $g\in H^{s,\,\varphi}(\Gamma)$. Здесь операторы R_0^+ и S_0^+ действуют на векторах

$$Tf\in\prod_{j=1}^{r}H^{s+1/2,\,\varphi}(\Pi_j) \quad \text{и} \quad Tg\in\left(H^{s,\,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})\right)^r$$

покомпонентно, причем если $\Gamma\cap\operatorname{supp}\chi_j=\varnothing$, то значение R_0^+ на j-й компоненте вектора Tf, а также j-ю компоненту вектора Tg полагаем равными нулю. Теперь ограниченные операторы (3.32), (3.33) и (3.13), (3.14) (два последних мы рассматриваем как для $M=\Omega$, так и для $M=\Gamma$) влекут ограниченность операторов (3.27), (3.28). При этом ясно, что (3.27) продолжает отображение (3.26), т. е. R_Γ — оператор следа на Γ. Остается показать, что $R_\Gamma\,S_\Gamma=I$ — тождественный оператор. Для этого воспользуемся равенством

$$R_\Gamma\, Kh = KR_0^+\, h, \quad h \in \prod_{j=1}^{r} H^{s+1/2,\,\varphi}(\Pi_j).$$

Оно очевидно на векторах класса C^∞ и затем продолжается по непрерывности на указанные векторы h. Имеем $R_\Gamma\, S_\Gamma = R_\Gamma\, KS_0^+\, T = KR_0^+\, S_0^+\, T = K\, T = I$. Пункт а) доказан.

Докажем п. б). Мы выведем его из теоремы о следах для пространств Волевича – Панеяха [4, с. 36 – 39] (теоремы 6.1, 6.2). Пусть $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет (3.5). Как отмечено в замечании 3.1, мы можем считать, без ограничения общности, что функция φ непрерывна на $[1;+\infty)$. Тогда $H^{1/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Волевича – Панеяха $H^\mu = H^\mu(\mathbb{R}^n)$, где $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^{1/2}\varphi(\langle\xi\rangle)$ — весовая функция аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. В силу упомянутых теорем линейное отображение $R_0 : u(x', x^n) \mapsto u(x', 0)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$R_0 :\; H^\mu(\mathbb{R}^n) \;\to\; H^\nu(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{3.34}$$

тогда и только тогда, когда

$$\nu^{-2}(\xi') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu^{-2}(\xi', \xi_n)\, d\,\xi_n \;< +\infty, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.35}$$

Здесь $H^\nu(\mathbb{R}^{n-1})$ — пространство Волевича – Панеяха на $\mathbb{R}^{n-1}$. Кроме того, если выполняется последнее условие, то оператор (3.34) имеет линейный ограниченный правый обратный

$$S_{0,\,\varphi} \;:\; H^\nu(\mathbb{R}^{n-1}) \;\to\; H^\mu(\mathbb{R}^n), \tag{3.36}$$

причем $S_{0,\,\varphi}$ зависит от μ, т. е. от φ. Перейдем от пространств Волевича – Панеяха к соответствующим пространствам уточненных шкал. Имеем

$$\nu^{-2}(\xi'\,) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu^{-2}(\xi', \xi_n)\, d\,\xi_n = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\,\xi_n}{\langle\xi\rangle\, \varphi^2(\langle\xi\rangle)} = 2 \int\limits_{\langle\xi'\rangle}^{+\infty} \frac{d\,t}{(t^2 - \langle\xi'\rangle^2)^{1/2}\, \varphi^2(t)}$$

при любом $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (последнее равенство получено заменой переменной $t = \langle\xi\rangle = (\langle\xi'\rangle^2 + \xi_n^2)^{1/2}$). Отсюда и из леммы 1.3 для $\psi_1 = \varphi^2$, $\tau = \langle\xi'\rangle$ вытекает неравенство $\varphi_0^{-2}(\tau) \le (1/2)\, \nu^{-2}(\xi'\,) \le c\, \varphi_0^{-2}(\tau)$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tau = \langle\xi'\rangle$, где функция φ_0 определена по формуле (3.30). Следовательно, условия (3.5) и (3.35) равносильны и $H^\nu(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{0,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1})$ с эквивалентностью норм. Заметим здесь, что $\varphi_0 \in \mathcal{M}$. Это вытекает из того, что, как показано при доказательстве леммы 1.2, $\varphi_0^{-2} \in \mathrm{SV}$. Таким образом, операторы (3.34), (3.36) существуют и $R_0 : H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to H^{0,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1})$, $S_{0,\varphi} : H^{0,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Перейдем от них к аналогичным операторам для $\mathbb{R}^n_+$. Для этого нам понадобится оператор R_+ сужения распределения с $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_+$ и оператор T_{n+1}, правый обратный к R_+, из доказательства теоремы 3.3. Эти операторы линейны и ограничены в таких парах пространств:

$$\begin{gathered} R_+ :\; H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \;\to\; H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+), \\ T_{n+1} \;:\; H^\sigma(\mathbb{R}^n_+) \;\to\; H^\sigma(\mathbb{R}^n), \quad |\sigma| < n+1. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Ограниченность (3.37) в силу интерполяционных теорем 3.1 и 3.3 влечет ограниченность оператора $T_{n+1} : H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) \to H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда вытекает ограниченность операторов

$$R_0^+ = R_0 T_{n+1} \,:\, H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) \;\to\; H^{0,\,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{3.38}$$

$$S^+_{0,\varphi} = R_+ S_{0,\varphi} \,:\, H^{0,\,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1}) \;\to\; H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n_+). \tag{3.39}$$

При этом R_0^+ сопоставляет функции $v(x', x_n)$ класса $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ ее след $v(x', 0)$ на гиперплоскости $x_n = 0$. Действительно, в силу теоремы вложения Соболева оператор (3.37) влечет $T_{n+1}\, v \in H^n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $R_0^+ v = R_0 T_{n+1} v = v(x', 0)$. Кроме того, оператор $S^+_{0,\varphi}$ является правым обратным к R_0^+. Действительно, для произвольного $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо $T_{n+1} R_+ u \in H^n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Поэтому функция $R_0 T_{n+1} R_+ u$ вычисляется поточечно и равна $R_0 u$. Отсюда предельным переходом получаем равенство $R_0 T_{n+1} R_+ u = R_0 u$, $u \in H^{1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Положив в нем $u = S_{0,\varphi}\, \omega$, где $\omega \in H^{0,\,\varphi_0}(\mathbb{R}^{n-1})$, запишем $R_0^+\, S_0^+\, \omega = R_0 T_{n+1} R_+\, S_{0,\varphi}\, \omega = R_0\, S_{0,\varphi}\, \omega = \omega$. Таким образом, мы имеем оператор следа (3.38) и правый обратный к нему оператор продолжения (3.39). Отсюда, как и при доказательстве п. а), следует, что $R_\Gamma = K R_0^+\, T$ и $S_{\Gamma,\varphi} = K S^+_{0,\varphi}\, T$ — искомые операторы (3.29) и (3.31). Пункт б), а с ним и теорема 3.8 доказаны.

***Замечание* 3.4.** Из уже упомянутой теоремы 6.1 [4, с. 36] следует, что условие (3.5) является необходимым и достаточным для того , чтобы отображение (3.26) продолжалось до непрерывного оператора следа $R_0 : H^{1/2,\,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$.

В завершение этого пункта приведем описание некоторых пространств уточненной шкалы на Γ, вытекающее из теоремы 3.8.

***Следствие* 3.2.** 1. *Для произвольных $s > 0$, $\varphi \in \mathcal{M}$ справедливо $H^{s,\varphi}(\Gamma) = \{R_\Gamma f \,:\, f \in H^{s+1/2,\,\varphi}(\Omega)\}$, причем норма распределения h в $H^{s,\,\varphi}(\Gamma)$ эквивалентна норме*

$$\inf\left\{ \big\|f\big\|_{H^{s+1/2,\,\varphi}(\Omega)} \,:\, R_\Gamma f = h \right\}. \tag{3.40}$$

2. *Если $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию* (3.5), *то для функции $\varphi_0 \in \mathcal{M}$, определенной по формуле* (3.30), *справедливо $H^{0,\,\varphi_0}(\Gamma) = \left\{R_\Gamma f \,:\, f \in H^{1/2,\,\varphi}(\Omega)\right\}$, при этом норма распределения h в $H^{0,\,\varphi_0}(\Gamma)$ эквивалентна норме* (3.40), *где $s = 0$.*

Данное описание некоторых („позитивных”) пространств уточненной шкалы на Γ как пространств следов особенно важно, когда Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. В этом случае в силу теоремы 3.7 такие пространства допускают определение с помощью глобальных координат в $\mathbb{R}^n$ согласно следствию 3.2. При этом в последнем утверждении вместо Ω можно взять $\mathbb{R}^n$.

4. Эллиптическая краевая задача в уточненной шкале пространств. Предполагаем, как и ранее, что $\overline{\Omega}$ — бесконечно гладкое компактное многообразие размерности $n \geq 2$ с непустым краем Γ. Положим $\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Gamma$. Из этого предположения следует, что Γ — бесконечно гладкое замкнутое многообразие размерности $n - 1$. Зафиксируем какую-либо пару $\mathcal{A}$, состоящую из конечного атласа из C^∞-структуры на $\overline{\Omega}$ и подчиненного ему C^∞-разбиения единицы на $\overline{\Omega}$. Пусть $\mathcal{A}_\Gamma$ — пара, образованная сужениями на Γ этих атласа и разбиения единицы. Рассмотрим на Ω и на Γ уточненные шкалы $\{H^{s,\,\varphi}(\Omega) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$ и $\{H^{s,\,\varphi}(\Gamma) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$, построенные с помощью пар $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\Gamma$ соответственно. Если $\varphi \equiv 1$, то $H^{s,\,\varphi}(\Omega) = H^s(\Omega)$ и $H^{s,\,\varphi}(\Gamma) = H^s(\Gamma)$ — это пространства бесселевых потенциалов на Ω и Γ. Отметим, что $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и $H^0(\Gamma) = L_2(\Gamma)$ — гильбертовы пространства функций, квадраты которых суммируемы на Ω и Γ относительно C^∞-плотностей, определяемых парами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\Gamma$. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно.

Рассмотрим на Ω следующую краевую задачу:

$$L\,u = f \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad B_j\,u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.1}$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с бесконечно гладкими коэффициентами; порядок оператора L четный и равен $2k \geq 2$. Здесь, кроме того, B_j, $j = 1, \ldots, k$, — краевые линейные дифференциальные операторы на Γ с бесконечно гладкими коэффициентами; порядок оператора B_j равен $m_j < 2k$. Положим $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$.

Всюду далее будем предполагать, что *задача* (4.1) *эллиптическая*. Это означает (см., например, [12, с. 6, 7]), что оператор L эллиптический на $\overline{\Omega}$ и правильно эллиптический на Γ, а система $\{B_1, \ldots, B_k\}$ удовлетворяет на Γ условию Шапиро – Лопатинского по отношению к L.

Для эллиптических краевых задач известны теоремы о разрешимости и оценки решений в различных классах функциональных пространств (см. [2, 4, 8 – 11, 13 – 15] и обзор [12]). Нам понадобится следующее утверждение о разрешимости эллиптической краевой задачи (4.1) в пространствах бесселевых потенциалов (см. [14, с. 128 – 130]). Предварительно напомним, что линейный ограниченный оператор $T : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется нетеровым, если его ядро и коядро (т. е. ядро сопряженного оператора) конечномерны и, кроме того, область значений оператора T замкнута в Y.

Предложение 4.1. *Пусть $\sigma > m + \dfrac{1}{2}$. Тогда линейное отображение*

$$u \mapsto \Lambda\, u = (L\, u, B_1\, u, \ldots, B_k\, u), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.2}$$

продолжается по непрерывности до ограниченного нетерова оператора

$$\Lambda : H^\sigma(\Omega) \to \mathcal{H}_\sigma = H^{\sigma-2k}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} H^{\sigma-m_j-1/2}(\Gamma). \tag{4.3}$$

При этом ядро N и коядро N_* этого оператора не зависят от σ и состоят из бесконечно гладких элементов:

$$N \subset C^\infty(\overline{\Omega}), \qquad N_* \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (\, C^\infty(\Gamma)\,)^k. \tag{4.4}$$

***Замечание* 4.1.** Последнее включение нуждается в пояснении. Оно означает, что функционалы из N_* — ядра оператора, сопряженного к (4.3), имеют вид $(\cdot, w_0)_\Omega + (\cdot, w_1)_\Gamma + \ldots + (\cdot, w_k)_\Gamma$ для некоторых функций $w_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $w_1, \ldots$ $\ldots, w_k \in C^\infty(\Gamma)$. Следовательно, область значений оператора (4.3) состоит из всех таких векторов $(f, g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{H}_\sigma$, что $(f, w_0)_\Omega + (g_1, w_1)_\Gamma + \ldots + (g_k, w_k)_\Gamma = 0$ для любого $(w_0, w_1, \ldots, w_k) \in N_*$. Здесь необходимо иметь в виду следующее. Поскольку $\sigma > m + \dfrac{1}{2}$, то $g_j \in L_2(\Gamma)$ и скалярное произведение $(g_j, w_j)_\Gamma$ определено для $j = 1, \ldots, k$. Далее, если $\sigma \geq 2k$, то $f \in L_2(\Omega)$ и $(f, w_0)_\Omega$ также определено. Остается случай $m + \dfrac{1}{2} < \sigma < 2k$; тогда, вообще говоря, $f \notin L_2(\Omega)$, но форма $(\cdot, w_0)_\Omega$ продолжается по непрерывности на $H^{\sigma-2k}(\Omega)$. Значит, в этом случае $(f, w_0)_\Omega$ обозначает продолжение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Отметим, что в предложении 4.1 в полной мере используется теорема о следах для пространств бесселевых потенциалов. Так, если $\sigma = m + 1/2$, то оператор следа B_j не определен на $H^\sigma(\Omega)$ для всех j таких, что $m_j = m$ (см. теорему 3.8 и замечание 3.4 в случае $\varphi \equiv 1$).

Всюду далее N и N_* будут обозначать ядро и коядро оператора Λ, фигурирующие в предложении 4.1. Поскольку N и N_* являются конечномерными и бесконечно гладкими, в уточненных шкалах существуют проекторы на подпространства, ортогональные соответственно N и N_* относительно скалярных произведений в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^k$. А именно, справедливы следующие две леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $s > 0$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда для произвольного $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ существует единственный элемент $u_0 \in N$ такой, что $(u - u_0, v)_\Omega = 0$ для любого $v \in N$. При этом отображение $P : u \mapsto u_1 = u - u_0$ является линейным ограниченным оператором проектирования пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$ на его замкнутое подпространство*

$$\{u_1 \in H^{s,\varphi}(\Omega) : \ (u_1, v)_\Omega = 0 \quad \textit{для любого} \quad v \in N\}, \tag{4.5}$$

причем Pu не зависит от s и φ.

Доказательство. Сначала отметим, что, поскольку $H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ (условие $s > 0$) и $N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ (предложение 4.1), скалярное произведение $(u, v)_\Omega$ определено для любых $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$, $v \in N$. Поэтому можно отождествить элемент $v \in N$ с линейным функционалом $(\cdot, v)_\Omega$ на $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Этот функционал ограничен:

$$\left|(u, v)_\Omega\right| \le \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \le \mathrm{const}\, \|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in H^{s,\varphi}(\Omega).$$

Отсюда вытекает, что подпространство (4.5) замкнуто в $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Далее, согласно предложению 4.1 N — конечномерное подпространство в $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Ясно, что $\dim N$ совпадает с коразмерностью подпространства (4.5), причем N и (4.5) имеют тривиальное пересечение. Следовательно, $H^{s,\varphi}(\Omega)$ разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств N и (4.5) с ограниченным проектором P на (4.5), который, очевидно, не зависит от s и φ.

Лемма 4.2. *Пусть $s > m + \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Положим*

$$\mathcal{H}_{s,\varphi} = H^{s-2k,\varphi}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma). \tag{4.6}$$

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\Omega,\Gamma}$ скалярное произведение в $L_2(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^k$, а также его расширение по непрерывности. Тогда для произвольного $F \in \mathcal{H}_{s,\varphi}$ существует такой единственный вектор $F_0 \in N_*$, что $(F - F_0, W)_{\Omega,\Gamma} = 0$ для любого $W \in N_*$. При этом отображение $Q : F \mapsto F_1 = F - F_0$ является линейным ограниченным оператором проектирования пространства (4.6) *на его замкнутое подпространство*

$$\begin{aligned} \bigl\{F_1 = (f, g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{H}_{s,\varphi} : (F_1, W)_{\Omega,\Gamma} \equiv \\ \equiv (f, w_0)_\Omega + (g_1, w_1)_\Gamma + \ldots + (g_k, w_k)_\Gamma = 0 \\ \textit{для любого} \quad W = (w_0, w_1, \ldots, w_k) \in N_*\bigr\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

причем QF не зависит от s и φ.

Доказательство. Пусть $W \in N_*$. Согласно предложению 4.1 (см. также замечание 4.1), форма $(\cdot, W)_{\Omega,\Gamma}$ определяет линейный ограниченный функционал на пространстве $\mathcal{H}_\sigma$ при любом $\sigma > m + \dfrac{1}{2}$. В силу интерполяционной теоремы 3.5 для $\varepsilon = \delta > 0$ и предложения 2.1 справедливо $\mathcal{H}_{s,\varphi} = [\mathcal{H}_{s-\varepsilon}, \mathcal{H}_{s+\varepsilon}]_\psi$ с эквивалентностью норм. Отсюда вытекает, что $(\cdot, W)_{\Omega,\Gamma}$ — линейный ограниченный функционал на $\mathcal{H}_{s,\varphi}$. Поэтому подпространство (4.7) замкнуто в $\mathcal{H}_{s,\varphi}$. Далее рассуждаем, как и при доказательстве предыдущей леммы. А именно, согласно предложению 4.1, N_* — конечномерное подпространство в $\mathcal{H}_{s,\varphi}$. При этом $\dim N_*$ равно коразмерности подпространства (4.7) и, кроме того, N_* и (4.7) имеют тривиальное пересечение. Следовательно, $\mathcal{H}_{s,\varphi}$ разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств N_* и (4.7) с ограниченным проектором Q на (4.7), который не зависит от s и φ, что и требовалось доказать.

Установим теперь основной результат этого пункта — теорему о свойствах оператора эллиптической краевой задачи (4.1) в уточненной шкале пространств.

Теорема 4.1. *Пусть* $s > m + \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тогда отображение* (4.2) *продолжается по непрерывности до ограниченного нетерового оператора*

$$\Lambda : H^{s,\,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\,\varphi} = H^{s-2k,\,\varphi}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) \tag{4.8}$$

с ядром N *и коядром* N_* (*которые в силу предложения* 4.1 *не зависят от* s, φ *и удовлетворяют* (4.4)). *Сужение оператора* (4.8) *на подпространство* (4.5) *осуществляет топологический изоморфизм*

$$\Lambda : P(\,H^{s,\,\varphi}(\Omega)\,) \leftrightarrow Q(\,\mathcal{H}_{s,\,\varphi}\,) \tag{4.9}$$

между пространствами (4.5) *и* (4.7). *Кроме того, справедлива оценка*

$$\|\,u\,\|_{H^{s,\,\varphi}(\Omega)} \le c\left(\,\|\,\Lambda\,u\,\|_{\mathcal{H}_{s,\,\varphi}} + \|\,u\,\|_{L_2(\Omega)}\right), \qquad u \in H^{s,\,\varphi}(\Omega), \tag{4.10}$$

в которой постоянная c *не зависит от* u.

Как видим, оператор (4.8) эллиптической краевой задачи оставляет инвариантным индекс φ, уточняющий основную s-гладкость пространства. При этом свойства оператора аналогичны частному случаю $\varphi \equiv 1$ пространств бесселевых потенциалов.

Мы выведем теорему 4.1 из предложения 4.1 с помощью интерполяции с функциональным параметром. При этом используем один результат Жеймона [16, с. 280, 281] (предложение 5.2) об интерполяции операторов с конечными индексами. Применительно к данному случаю этот результат переформулируем следующим образом.

Предложение 4.2. *Пусть заданы две допустимые пары* $[X_0, X_1]$ *и* $[Y_0, Y_1]$ *гильбертовых пространств, а также на* X_0 *линейное отображение* T, *для которого справедливы ограниченные нетеровы операторы* $T : X_j \to Y_j$, $j = 0; 1$, *имеющие общее ядро* $\mathcal{N}$ *и общее коядро* $\mathcal{N}_*$. *Тогда для произвольного интерполяционного параметра* ψ *ограниченный оператор* $T : [X_0, X_1]_\psi \to [Y_0, Y_1]_\psi$ *нетеров с ядром* $\mathcal{N}$ *и коядром* $\mathcal{N}_*$.

***Доказательство теоремы* 4.1.** Возьмем такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $s-\varepsilon > m+\dfrac{1}{2}$. Согласно предложению 4.1, имеют место нетеровы операторы (4.3) для $\sigma = s \mp \varepsilon$ с общим ядром N и общим коядром N_*. Применим к этим операторам интерполяцию с параметром ψ из теоремы 3.5, в которой примем $\varepsilon = \delta$, $M = \Omega$ и затем $M = \Gamma$. В силу предложения 4.2 получаем ограниченный нетеров оператор, имеющий ядро N, коядро N_* и совпадающий с (4.8) на основании теоремы 3.5 и предложения 2.1. (Поскольку $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в $H^{s,\,\varphi}(\Omega)$, этот оператор является продолжением по непрерывности отображения (4.2).) Теперь из лемм 4.1, 4.2 непосредственно вытекает алгебраический изоморфизм (4.9). Так как оператор (4.9) ограничен, этот изоморфизм является топологическим в силу теоремы Банаха об обратном операторе. Осталось доказать оценку (4.10). Воспользуемся леммой 4.1 и запишем распределение $u \in H^{s,\,\varphi}(\Omega)$ в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0 = (1-P)\,u \in N$, $u_1 = P\,u \in P(H^{s,\,\varphi}(\Omega))$. В силу (4.9)

$$\|\,u_1\,\|_{H^{s,\,\varphi}(\Omega)} \le c_1 \|\,\Lambda\,u_1\,\|_{\mathcal{H}_{s,\,\varphi}} = c_1 \|\,\Lambda\,u\,\|_{\mathcal{H}_{s,\,\varphi}}.$$

Кроме того, поскольку N конечномерно и $1-P$ — ортопроектор на N в $L_2(\Omega)$, то

$$\|\, u_0 \,\|_{H^{s,\,\varphi}(\Omega)} \leq c_0 \,\|\, u_0 \,\|_{L_2(\Omega)} \leq c_0 \,\|\, u \,\|_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь постоянные c_0 и c_1 не зависят от u. Сложив эти неравенства, получим (4.10).

Теорема 4.1 доказана.

***Замечание* 4.2.** В связи с последней теоремой отметим еще раз статью Г. Шлензак [7]. В этой работе с помощью интерполяции с функциональным параметром доказана теорема об изоморфизме для оператора *регулярной* эллиптической краевой задачи, который действует в некоторых пространствах Хермандера – Волевича – Панеяха, заданных в бесконечно гладкой области. Эти пространства отличны от рассматриваемых нами (см. замечание 3.2).

***Замечание* 4.3.** Если сравнить теорему 4.1 и п. б) теоремы 3.8, то возникает вопрос: можно ли распространить теорему 4.1 на *предельный случай* $s = m + \dfrac{1}{2}$ для $\varphi \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего условию (3.5)? При этом в (4.8) для всех j таких, что $m_j = m$, вместо $H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma)$ будем использовать пространство $H^{s-m_j-1/2,\,\varphi_0}(\Gamma)$, где φ_0 определено по формуле (3.30). Ответ на сформулированный вопрос отрицательный.

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 689 – 696.
2. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Там же. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217 – 235.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
4. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
5. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
6. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators // Cambridge Tracts Math. – 1999. – № 120. – 252 p.
7. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. – 1974. – № 4. – С. 48 – 58.
8. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
9. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
12. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., 79. Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 206 с.
14. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
15. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.
16. *Geymonat G.* Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. – 1965. – **69** – P. 207 – 284.

Получено 11.10.2005