УДК 512.515

А. О. Пришляк, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

МИНИМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НА РУЧКИ ГЛАДКИХ ОДНОСВЯЗНЫХ ПЯТИМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ*

A theorem on existence of a unique minimal topologic handle decomposition of differentiable simply connected five-dimensional manifolds is proved. For this decomposition the number of handles of each index is given.

Доведена теорема про існування єдиного мінімального топологічного розкладу на ручки диференційовних однозв'язних п'ятивимірних многовидів і вказана кількість ручок кожного індексу для такого розкладу.

Пусть W^n — гладкое, компактное, односвязное многообразие с краем $\partial W = V_0 \cup V_1$, где V_0, V_1 — связные компоненты края. Разложением W на ручки, начиная от $V_0 \times I$, называется последовательность вложений $W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W$, такая что: 1) W_0 есть воротник $V_0 \times I$; 2) W_{i+1} получается из W_i путем приклейки ручки индекса k к $\partial W_i \backslash V_0$, т. е. $W_{i+1} = (W_i \cup D^k \times D^{n-k}) \backslash \sim$, где $\sim$ означает отождествление точек $\partial D^k \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$ с их образами в $\partial W_i \backslash V_0$ для некоторого вложения $f: S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial W_i \backslash V_0$; 3) для любого $x \in W$ существует окрестность, которая пересекает только конечное число множеств $W_i \backslash W_{i-1}$ [1].

Пусть N_λ — количество ручек индекса λ в разложении W на ручки. Это разложение называется минимальным, если не существует другого разложения многообразия W на ручки, у которого количество всех ручек меньше $\sum N_\lambda$, а ручек индекса λ не больше N_λ для каждого λ. Будем говорить, что минимальное разложение на ручки единственно, если любое другое минимальное разложение на ручки имеет такое же количество ручек индекса λ для каждого λ.

Существование единственного гладкого минимального разложения на ручки для гладких односвязных многообразий с односвязными краями при $n \geq 6$ было доказано С. Смейлом [2], в случае замкнутого многообразия при $n = 5$ — Д. Барденом [3], а для многообразий со стандартными краями при $n = 5$ — Ю. А. Школьниковым [4].

Под скрещенным модулем будем понимать тройку (C, G, d), где C и G — группы такие, что G действует на C слева, $d: C \to G$ — гомоморфизм такой, что $c_1 + c_2 - c_1 = d(c_1)c_2$, $d(gc) = g(d(c))g^{-1}$. В. В. Шарко показал, что если $n \geq 6$, то на W^n существует единственное минимальное разложение на ручки без ручек индексов $0, 1, n-1, n$, в котором количество ручек индекса 2 равно минимальному числу образующих группы $\pi_2(W^n, V_1)$, рассматриваемой как $\pi_1(V_1)$-модуль [5].

М. Фридман доказал, что если W^5 — односвязный пятимерный h-кобордизм, то W^5 гомеоморфно $V_0 \times I$. С помощью техники, использованной при доказательстве этого утверждения, можно показать, что существует единственное топологическое разложение на ручки гладкого односвязного многообразия W^5 с односвязными компонентами края V_0 и V_1. Если компоненты края неодносвязны, то эта техника из-за отсутствия трансверсальных сфер не применима к косредним сферам 2-ручек, необходимых для построения ручек Кассона.

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант № V6F000.

Лемма. *Пусть W — односвязное компактное пятимерное многообразие с краем $\partial W = V_0 \cup V_1$, где V_i, $i = 0, 1$, — связные компоненты края. Тогда существует минимальная система образующих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ группы $\pi_2(W, V_1)$, рассматриваемой как скрещенный $\pi_1(V_1)$-модуль, такая, что под действием гомоморфизма Гуревича $\pi_2(W, V_1) \to H_2(W, V_1)$ образующие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $s \le k$, перейдут в минимальную систему образующих группы $H_2(W, V_1)$, а образующие $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_k$ будут лежать в ядре этого гомоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму, состоящую из отрезков точных гомотопической и гомологической последовательностей пары (W, V_1):

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(W) & \to & \pi_2(W, V_1) & \to & \pi_1(V_1) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2(W) & \to & H_2(W, V_1) & \to & H_1(V_1) & \to & 0. \end{array}$$

Так как $\pi_2(W) = H_2(W)$, $\pi_1(V_1)/[\pi_1(V_1), \pi_1(V_1)] = H_1(V_1)$, то $\pi_2(W, V_1) \to H_2(W, V_1)$ — эпиморфизм. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — произвольная минимальная система образующих группы $\pi_2(W, V_1)$, рассматриваемой как скрещенный $\pi_1(V_1)$-модуль. Обозначим через ω_i образ β_i при гомоморфизме $\pi_2(W, V_1) \to H_2(W, V_1)$. Тогда ω_i составляют систему образующих группы $H_2(W, V_1)$. Назовем элементарными преобразованиями следующие операции: 1) замену ω_i на $\omega_i \pm \omega_j$, где $i \ne j$; 2) умножение образующей ω_i на -1; 3) перенумерацию образующих. Очевидно, что в результате элементарных преобразований система образующих переходит в систему образующих. Покажем, что проведя элементарные преобразования над образующими ω_i, из этой системы можно выделить систему с минимальным числом образующих $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$.

Пусть система $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ с минимальным числом образующих соответствует разложению группы в прямую сумму циклических групп (γ_i — образующие прямых слагаемых). Тогда

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\omega_j, \quad \omega_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\gamma_i.$$

Если γ_i имеет порядок p_i, то коэффициент b_{ij} берется по модулю p_i. Для фиксированного i рассмотрим коэффициенты $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}$. Если γ_i — свободная образующая, то коэффициенты $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}$ имеют наибольший общий делитель равный 1. Тогда путем элементарных преобразований ω_j их можно привести к виду $0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0$. Подставив новые ω_j в формулу $\gamma_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\omega_j$, убедимся, что коэффициент a_{ii} равен 1. Т. е. $\gamma_i = \omega_i + \sum_{i \ne j} a_{ij}\omega_j$ и, таким образом, путем элементарных преобразований ω_i заменяется на γ_i. Если γ_i имеет порядок p_i, то тогда путем элементарных преобразований ω_j коэффициенты $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}$ можно привести к виду $0, \ldots, 0, q_i, 0, \ldots, 0$, где q_i и p_i — взаимно простые числа и, следовательно, $q_i\gamma_i$ также будет образующей. Домножив формулу $\gamma_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\omega_j$ на q_i, получим, что путем элементарных преобразований ω_i заменяется на $q_i\gamma$. Таким образом, из системы образующих ω_i можно выделить систему с минимальным числом образующих.

Проведем аналогичные операции с образующими $\beta_1, \ldots, \beta_k$. А именно, если в $H_2(W, V_1)$ при приведении к минимальной системе образующих ω_i заменяется на $\omega_i \pm \omega_j$, то соответствующая образующая β_i в $\pi_2(W, V_1)$ заменяется на $\beta_i \pm \beta_j$. Таким образом, новая система образующих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ останется минимальной системой образующих группы $\pi_2(W, V_1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ перейдут в минимальную систему образующих группы $H_2(W, V_1)$, а образующие $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_k$ будут лежать в коммутаторе $[\pi_2(W, V_1), \pi_2(W, V_1)]$.

Теорема. *Пусть W — гладкое односвязное компактное пятимерное многообразие с краем $\partial W = V_0 \cup V_1$. Обозначим через V_0 ту компоненту края, для которой $\mu(\pi_2(W, V_0)) - \mu(H_2(W, V_0)) \geq \mu(\pi_2(W, V_1)) - \mu(H_2(W, V_1))$. Тогда на W существует единственное минимальное топологическое разложение на ручки без ручек индексов 0, 1, 4 и 5 и с $\mu(\pi_2(W, V_0))$ ручками индекса 2 и с $\mu(\pi_2(W, V_0)) - \mu(H_2(W, V_0)) + \mu(H_2(W, V_1))$ ручками индекса 3, где $\mu(H)$ — минимальное число образующих группы H. $\pi_2(W, V_i)$, $i = 1, 2$, рассматриваем как скрещенный $\pi_1(V_i)$-модуль.*

Доказательство. Пусть W — гладкое многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы. Введем обозначения:

$$k := \mu(\pi_2(W, V_0)),$$

$$s := \mu(H_2(W, V_0)),$$

$$m := \mu(\pi_2(W, V_1)),$$

$$n := \mu(H_2(W, V_1)).$$

Будем рассматривать разложение многообразия на ручки, начиная с $V_0 \times I$. Так как $\pi_1(W, V_i) = 0$, $i = 0, 1$, то можно найти разложение на ручки без ручек индексов 0, 1, 4 и 5 [6, 7]. Пусть $h_1^\alpha, \ldots, h_k^\alpha$ — трубчатые окрестности дисков, которые являются минимальной системой образующих группы $\pi_2(W, V_0)$, как $\pi_1(V_0, x)$-модуля, а $H_1^\alpha, \ldots, H_m^\alpha$ — трубчатые окрестности дисков, которые являются минимальной системой образующих группы $\pi_2(W, V_1)$, как $\pi_1(V_1, y)$-модуля, такие, что средние диски $h_1^\alpha, \ldots, h_s^\alpha$ и $H_1^\alpha, \ldots, H_n^\alpha$ являются минимальными системами образующих групп $H_2(W, V_0)$ и $H_2(W, V_1)$ соответственно. Эти окрестности будем рассматривать как 2- и 3-ручки. Рассмотрим разложение W на ручки, в которое входят ручки $h_1^\alpha, \ldots, h_k^\alpha$ и $H_1^\alpha, \ldots, H_m^\alpha$, а другие 2- и 3-ручки лежат в $\overline{W \setminus (\cup h_i^\alpha \cup H_i^\alpha)}$. Добавим к этому разложению на ручки $k + m$ пар взаимносокращающихся 2- и 3-ручек: $h_1^\beta, \ldots, h_k^\beta$, $h_1^\gamma, \ldots, h_m^\gamma$ — 2-ручки, $H_1^\beta, \ldots, H_k^\beta$, $H_1^\gamma, \ldots, H_m^\gamma$ — соответствующие 3-ручки. Заменим ручки h_i^β на $h_i = h_i^\alpha + h_i^\beta$, проскользив ручкой h_i^β по h_i^α, и ручки H_i^γ на $H_i = H_i^\alpha + H_i^\gamma$. Тогда индекс пересечения $\gamma(h_i, H_j^\beta) =$

$= \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases}$ $\gamma(h_i^\gamma, H_j) = \delta_i^j$ и матрица A, состоящая из индексов пересечения 2- и 3-ручек, имеет вид

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & H_1^\beta \ldots H_k^\beta & H_1 \ldots H_m & * \\
\hline
\begin{matrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 & * \\
\hline
\begin{matrix} h_1^\gamma \\ \vdots \\ h_k^\gamma \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\
\hline
* & 0 & * & * \\
\hline
\end{array}
$$

Путем сложения ручек приводим ее к виду

E	0	0
0	E	0
0	0	B

при этом средние диски h_i и H_i, как h_i^α и H_i^α, будут минимальными системами образующих групп $\pi_2(W, V_0)$ и $\pi_2(W, V_1)$, рассматриваемых как скрещенные модули.

В дальнейшем будем считать, что в рассматриваемом разложении на ручки отсутствует воротник $V_0 \times I$, а имеется воротник между 2- и 3-ручками.

Положим $W^1 = \overline{W \setminus (\bigcup h_i \bigcup H_j \bigcup h_p^\gamma \bigcup H_q^\beta)}$, $\partial W = V_0^1 \cup V_1^1$, где V_1^1 — связные компоненты края. Тогда W^1 состоит из оставшихся 2- и 3-ручек. Его группы гомологий $H_2(W^1, V_0^1)$ и $H_2(W^1, V_1^1)$ задаются матрицей B и совпадают с соответствующими группами гомологий многообразия W, так как ручки h_i и H_i^β, h_j^γ и H_j, имеющие индекс пересечения равный 1, не дают вклада в группы гомологий.

Воспользовавшись теоремой ван Кампена, можно показать, что $\pi_1(W^1) = \pi_1(V_0^1) = \pi_1(V_1^1) = 0$. С помощью процесса сложения ручек на многообразии W^1 приведем матрицу B к диагональному виду, так чтобы ручкам $h_1^\alpha, \ldots, h_s^\alpha$ и $H_1^\alpha, \ldots, H_n^\alpha$, средние диски которых являются минимальными системами образующих групп $H_2(W, V_0)$ и $H_2(W, V_1)$, и только им соответствовали на диагонали числа ± 1. Положим $W^2 = \overline{W^1 \setminus (\bigcup h_i^\alpha \bigcup H_j^\alpha)}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n$. Тогда матрица, состоящая из индексов пересечения 2- и 3-ручек на W^2, является единичной и гомологии $H_i(W^2, V_0^2) = 0$, $1 \leq i \leq 4$, где V_0^2 — компонента края ∂W^2. По теореме Уайтхеда W^2 будет h-кобордизмом, а из теоремы Фридмана следует, что W^2 гемеоморфно $V_0^2 \times I$ [8].

По построению средние диски ручек $h_1, \ldots, h_s$ и $H_1, \ldots, H_n$ задают те же элементы групп $H_2(W, V_0)$ и $H_2(W, V_1)$, что и $h_1^\alpha, \ldots, h_s^\alpha$ и $H_1^\alpha, \ldots, H_n^\alpha$. Поменяем их местами. Тогда если из W вырезать все ручки, кроме $h_1, \ldots, h_s$,

$H_1^{\beta}, \ldots, H_s^{\beta}$, и $h_1^{\gamma}, \ldots, h_s^{\gamma}, H_1, \ldots, H_s$, то получится многообразие с односвязными краями, которое является односвязным h-кобордизмом и согласно теореме Фридмана [8] имеет структуру топологического произведения.

Таким образом, матрица A приводится к виду

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
 & H_1^{\omega} & \ldots & H_n^{\omega} & H_{n+1} & \ldots & H_m & H_{s+1}^{\gamma} & \ldots & H_k^{\gamma} \\
\hline
h_1^{\omega} & n_1 & & 0 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
\vdots & & n_l & & & 0 & & & 0 & \\
 & & & 0 & & & & & & \\
h_s^{\omega} & 0 & & 0 & & & & & & \\
\hline
h_{s+1} & & & & & & & 1 & & 0 \\
\vdots & & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\
h_k & & & & & & & & & 1 \\
\hline
h_{n+1}^{\gamma} & & & & 1 & & 0 & & & \\
\vdots & & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\
h_m^{\gamma} & & & & & & 1 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Из договоренности в обозначениях компонент краев V_i, $i = 0, 1$, следует что $k - s \geq m - n$. По построению средние диски ручек $h_1^{\alpha}, \ldots, h_s^{\alpha}, h_{s+1}, \ldots, h_k$ — образующие $\pi_2(W, V_0)$, $H_1^{\alpha}, \ldots, H_n^{\alpha}, H_{n+1}, \ldots, H_m$ — образующие $\pi_2(W, V_1)$, а $h_{n+1}^{\gamma}, \ldots, h_m^{\gamma}$ и $H_{s+1}^{\beta}, \ldots, H_k^{\beta}$ — тривиальные элементы этих групп. Заменим H_{s+i}^{β} на $H_{n+i}^{\omega} = H_{s+i}^{\beta} + H_{n+i}$, $1 \leq i \leq m-n$, а h_{n+i}^{γ} на $h_{s+i}^{\omega} = h_{n+i}^{\gamma} - h_{s+i}$, $1 \leq i \leq m-n$. Тогда средние диски ручек h_{s+i}^{ω} определяют те же элементы группы $\pi_2(W, V_0)$, что и h_{s+i}. Положим $h_i^{\omega} = h_i^{\alpha}$, $1 \leq i \leq s$, $H_i^{\omega} = H_i^{\alpha}$, $1 \leq i \leq n$. Тогда средние диски h_i^{ω} и H_i^{ω} определяют минимальные системы образующих групп $\pi_2(W, V_0)$ и $\pi_2(W, V_1)$, и матрица A приводится к виду

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
 & H_1^{\omega} & & & \ldots & & H_m^{\omega} & H_{s+m-n+1}^{\beta} & \ldots & H_k^{\beta} \\
\hline
 & n_1 & & 0 & & & & & & \\
h_1^{\omega} & & \ddots & & & & & & & \\
 & & n_l & & & 0 & & & 0 & \\
 & & & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & \\
\vdots & & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & \\
h_k^{\omega} & & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Таким образом, мы построили разложение на ручки с k ручками индекса 2 и с $k-s+n$ ручками индекса 3.

Докажем, что это разложение на ручки является минимальным. Рассмотрим произвольное разложение W на ручки, начиная с $V_0 \times I$. Пусть W_2 — подмногообразие, содержащее все ручки индексов не больше 2 и только их. Покажем, что число q критических ручек индекса 2 в этом разложении на ручки не меньше k. Отображение $\pi_2(W_2, V_0) \to \pi_2(W, V_0)$ является эпиморфизмом, поскольку любой элемент группы $\pi_2(W, V_0)$ реализуется вложением двухмерного диска и по соображениям общего положения может быть произотопирован в многообразие W_2. Используя теорему Уайтхеда о строении второй относительной гомотопической группы, можно показать, что средние диски ручек индекса 2 определяют образующие группы $\pi_2(W, V_0)$, поэтому их не меньше чем k. Пусть ручки $h_1, \dots, h_k$ и $H_1, \dots, H_k$ из данного разложения определяют минимальные системы образующих групп $\pi_2(W, V_0)$ и $\pi_2(W, V_1)$ соответственно. Положим $X = \bigcup h_i$, $Y = \bigcup H_i$. Рассмотрим многообразие $Z = W \backslash (X \cup V)$ с краем $\partial Z = V_0^1 \cup V_1^1$, где $V_0^1 = \partial X \backslash V_0$, $V_1^1 = \partial Y \backslash V_1$. Используя теорему ван Кампена – Зейферта, можно показать, что $\pi_1(Z) = \pi_1(Y) = \pi_1(X) = \pi_1(V_0^1) = \pi_1(V_1^1) = 0$. Эпиморфизм $\pi_2(X, V_0) \to \pi_2(W, V_0)$ индуцирует эпиморфизм $\pi_2(X) \to \pi_2(W)$ в точной гомотопической последовательности пары (W, X). Следовательно, группы $\pi_2(W, X)$ и $H_2(W, X)$ тривиальны. Тогда согласно теореме о вырезании и двойственности Пуанкаре

$$H_2(W, X) = H_2(Y \cup Z, V_0^1) = H_3(Y \cup Z, V_1) = 0.$$

Так как W получается из $Y \cup Z$ с помощью приклейки 3-ручек, то

$$H_3(X, V_0^1) = H_3(W, Y \cup Z) = kZ, \quad H_2(X, V_0^1) = 0.$$

Аналогично

$$\pi_2(W, Y) = H_2(W, Y) = H_2(X \cup Z, V_1^1) = H_3(X \cup Z, V_0) = 0,$$

$$H_3(Y, V_1^1) = H_3(W, X \cup Z) = mZ, \quad H_2(Y, V_1^1) = 0.$$

Рассмотрим отрезок точной гомологической последовательности тройки $(X \cup Z, X, V_0)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H_3(X \cup Z, X) & \to & H_2(X, V_0) & \to & H_2(X \cup Z, V_0) & \to & H_2(X \cup Z, X) & \to 0, \\ & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & H_3(Z, V_0^1) & & k\mathbb{Z} & & \lambda\mathbb{Z} & & H_2(Z, V_0^1) & \end{array}$$

где λ может быть найдено из точной гомологической последовательности тройки $(W, X \cup Z, V_0)$

$$0 \to H_3(W, V_0) \to H_3(W, X \cup Z) \to H_2(X \cup Z, V_0) \to H_2(W, V_0) \to 0,$$

$$\lambda = \mu(H_2(X \cup Z, V_0)) = m + s - n.$$

Тогда $\mu(H_3(Z, V_0)) - \mu(H_2(Z, V_0^1)) = k - \lambda = k - m + n - s$ и $\mu(H_3(Z, V_0)) \geq \geq k - \lambda = k - m + n - s$. Из неравенств Морса следует, что на многообразии Z ручек индекса 3 не меньше чем $k - m + n - s$. Таким образом, на многообразии

W ручек индекса 3 не меньше чем $k + n - s$ и, следовательно, построенное в доказательстве теоремы разложение на ручки является минимальным.

***Следствие* 1.** *Пусть W — гладкое односвязное компактное пятимерное многообразие со связным краем $\partial W = V_0$. Тогда на W существует единственное минимальное топологическое разложение на ручки без ручек индексов* 0, 1, 4 и 5 *и с* $\mu(\pi_2(W, V_0))$ *ручками индекса* 2 *и с* $\mu(\pi_2(W, V_0)) - \mu(H_2(W, V_0)) + \mu(H_2(W, V_1))$ *ручками индекса* 3, *где* $\mu(H)$ — *минимальное число образующих группы* H, $\pi_2(W, V_1)$, $i = 1, 2$, *рассматриваем как скрещенный* $\pi_1(V_i)$*-модуль.*

***Следствие* 2.** *Пусть W — компактное стягиваемое пятимерное многообразие с краем. Тогда на W существует минимальное топологическое разложение на ручки с одной ручкой индекса* 5 *без ручек индексов* 0, 1 *и* 4 *и по* $\mu(\pi_2(W, \partial W))$ *ручек индекса* 2 *и* 3, *где* $\mu(H)$ — *минимальное число образующих группы* H, $\pi_2(W, \partial W)$, *рассматриваемой как скрещенный* $\pi_1(\partial W)$*-модуль.*

1. *Kirby R., Sibenman L.* Faundational essay on topological manifolds, smoothing and triangulations // Ann. Math. Stud. – 1977. – **88**. – 368 p.
2. *Смейл С.* Обобщенная гипотеза Пуанкаре в размерностях больших четырех // Математика. – 1962. – **6**, № 3. – С. 139 – 155.
3. *Barden D.* Simply connected five-manifolds // Ann. Math. – 1965. – **82**. – P. 365 – 385.
4. *Shkolnikov Yu. A.* Handle decomposition of simply connected five-manifolds. III // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 935 – 940.
5. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.
6. *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. – М.: Мир, 1974. – 206 с.
7. *Милнор Дж.* Теорема о h-кобордизме. – М.: Мир, 1969. – 114 с.
8. *Freedman M.* The topology of four-dimensional manifolds // J. Different. Geom. – 1982. – **17**. – P. 357 – 453.

Получено 20.04.93,
после доработки – 17.05.94