УДК 519.21

**И. А. Вестфрид** (Днепродзерж. произв. об-ние „АЗОТ")

# ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

An ultrametric space in which any separable ultrametric space is isometrically inbedded is constructed. We show how, by using this universal space, any separable ultrametric space can be imbedded into $l_1$, $l_2$ and $c_0$.

Побудовано такий ультраметричний простір, що будь-який сепарабельний ультраметричний простір ізометрично вкладається в нього. Показано, як за допомогою цього універсального простору можна ізометрично вкласти будь-який сепарабельний ультраметричний простір у $l_1$, $l_2$ і $c_0$.

**1.** Метрическое пространство $R$ называется ультраметрическим [1, с. 52], если неравенство треугольника $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для любых трех точек $x$, $y, z \in R$ выполняется в более сильной форме:

$$\rho(x, y) \le \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

Тривиальный пример ультраметрического пространства — дискретное пространство $R$ с такой метрикой $\rho$, что для всех $x, y, \in R$ $(x \ne y)$ $\rho(x, y) = 1$; $\rho(x, x) = 0$. Исторически одним из первых нетривиальных примеров ультраметрических пространств было бэровское нуль-пространство [2, с. 104]. Среди других известных примеров важное место занимают пространства $Z_p$ целых $p$-адических чисел и $p$-адические расширения $Q_p$ поля всех рациональных чисел (см. [3], гл. 18). Кроме того, решая обратную задачу для $\varepsilon$-энтропии и $\varepsilon$-емкости (формулировку проблемы см. в [4, с. 690]), А. Ф. Тиман и В. Я. Крейнович показали, что частично эту задачу можно свести к изометрическому вложению некоторых ультраметрических компактов в банаховы пространства [5–7]. Там же были сформулированы и доказаны теоремы о таком вложении в пространства $l_p$ и $L_p, p \ge 1$, а также в $C$.

А. Ф. Тиман поставил вопрос: можно ли любое сепарабельное ультраметрическое пространство изометрически вложить в $l_2$? (Можно указать пример метрического пространства, состоящего из четырех точек, которое не вкладывается изометрически в $l_2$ (см.например, [5]).

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Автор строит такое ультраметрическое пространство, в которое изометрически вкладываются все сепарабельные ультраметрические пространства, а затем, используя это универсальное пространство, доказывает следующую теорему.

**Теорема.** *Любое сепарабельное ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в* $l_1, l_2$ и $c_0$.

***Следствие.*** *Ультраметрическое пространство $R$ тогда и только тогда изометрически вкладывается в конечномерное евклидово пространство $E$, когда* $\dim E > \operatorname{Card} R - 1$.

Для доказательства понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** *Если квадратичная форма* $Q_N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$ *относи-*

*тельно* $N$ *переменных* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *с симметричной матрицей* $A = (a_{ij})$ *имеет следующие свойства: для всех* $1 \le i \le k \le m \le n \le N$ 1) $a_{ki} \ge 0$, $a_{11} > 0$; 2) $a_{km} \ge a_{kn}$; 3) $a_{km} - a_{kn} \ge a_{im} - a_{in}$; 4) $a_{kk} > a_{ki}$ *при* $i < k$; 5) $a_{in} \le a_{kn}$, *то эта форма является положительно определенной.*

**2.** Приведем доказательства сформулированных результатов.

Докажем сначала лемму. Для этого индукцией по $N$ докажем, что все главные миноры матрицы $A$ положительны. В силу свойства 1 лемма верна при $N = 1$. Пусть теперь она верна при $N = P - 1$. Покажем, что она верна и при $N = P$.

Итак, пусть матрица $A = (a_{ij})$ размера $P \times P$ имеет свойства 1–5. Тогда эти свойства имеет и матрица, получающаяся из матрицы $A$ путем отбрасывания последней строки и последнего столбца. Из индукционного предположения следует, что все первые $P - 1$ главные миноры матрицы $A$ положительны. Остается доказать, что определитель этой матрицы также положителен. Методом Гаусса получим эквивалентную матрицу $A' = (a'_{ij})$, где

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \dfrac{a_{i1} \cdot a_{j1}}{a_{11}} & \text{при } i = 2, 3, \ldots, P; \\ a_{1j} & \text{при } i = 1. \end{cases}$$

Обозначим $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = a_{i+1, j+1}$, $i = 1, 2, \ldots, P - 1$; $j = 1, 2, \ldots, P - 1$. Тогда $|A| = |A'| = |B| \cdot a_{11}$. Покажем, что $|B| > 0$. Для этого в силу индукционного предположения достаточно непосредственно проверить, что матрица $B$ имеет свойства 1–5, поскольку размер этой матрицы $(P - 1) \times (P - 1)$. Лемма доказана.

Обозначим через $*$ пространство всех монотонно невозрастающих последовательностей $x(x^1, x^2, x^3, \ldots)$ неотрицательных вещественных чисел с метрикой $\rho$:

$$\forall\, a, b \in * \, (a \ne b) \quad \rho(a, b) = \max\{a^n, b^n\}; \quad \rho(a, a) = 0,$$

где $n$ — наименьший индекс $k$ такой, что $a^k \ne b^k$.

Определим функцию $n(a, b)$ для любых $a, b \in * \; (a \ne b)$ следующим образом:

$$n(a, b) + 1 = \min\{n\colon a^n \ne b^n\}.$$

Очевидно, что $\rho(a, b) = \max\{a^{n(a,b)+1}, b^{n(a,b)+1}\}$.

Легко видеть, что $*$ — ультраметрическое пространство.

Покажем, что $*$ — полное пространство. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность пространства $*$. Очевидно, что существует $M$ такое, что для любых $i, j$ $x_i^j \le M$. Легко также видеть, что для произвольного $k$ существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^k$. Обозначим $y^k = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^k$. Так как $x_n^k \ge x_n^{k+1} \ge 0$, то и $y^k \ge y^{k+1} \ge 0$. Значит, $y \in *$. Покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = y. \tag{1}$$

Достаточно рассмотреть следующие два случая:

1. Существует последовательность индексов $\{n_i\}$ и точка $x_0 \in *$ такие, что для произвольного $i$ $x_{n_i} = x_0$. Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и $x_0 = y$.

2. Существует $N$ такое, что для любых $n, m \geq N$ $x_n \neq x_m$. (Не теряя общности, повторяющиеся члены можно опустить.)

Покажем, что тогда

$$\lim_{k \to \infty} y^k = 0. \tag{2}$$

Допустим противное. Тогда в силу (1):

$$\exists\, r > 0 \;\; \forall\, k \;\; \exists\, N_k \;\; \forall\, n \geq N_k \;\; x_n^k > r. \tag{3}$$

С другой стороны, в силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$

$$\exists\, N_0 \;\; \forall\, n > N_0 \;\; \rho(x_n, x_{N_0}) < r. \tag{4}$$

Обозначим $q = \min\limits_m \mathrm{n}(x_m, x_{N_0}) + 1$. Тогда в силу (4)

$$x_{N_0}^q < r \quad \text{и} \quad \forall\, n > N_0 \quad x_n^q < r. \tag{5}$$

Обозначим $R = \max\{N_q, N_0\}$. Тогда из (3) следует $x_R^q > r$, а из (5) — $x_R^q < r$. Полученное противоречие доказывает равенство (2).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (2)

$$\exists\, N_1 = \min\{N\colon \forall\, K \geq N \;\; y^k < \varepsilon\}. \tag{6}$$

Отсюда следует

$$\exists\, N_2 \;\; \forall\, n \geq N_2 \;\; x_n^{N_1} < \varepsilon. \tag{7}$$

Если $N_1 > 1$, то из (2) и (6) следует, что для всех $1 \leq i < N_1$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^i \geq \varepsilon$ и в силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$

$$\exists\, N_3 \;\; \forall\, i < N_1 \;\; \forall\, n \geq N_3 \quad x_n^i = x_{N_3}^i \quad \text{и} \quad y = x_{N_3}^i. \tag{8}$$

Из (6) – (8) вытекает

$$\forall\, n \geq \max\{N_2; N_3\} \quad \rho(x_n, y) \leq \max\{x_n^{N_1}, y^{N_1}\} < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ равенство (1) доказано. Следовательно, $*$ — полное пространство.

***Замечание* 1.** Обозначим через $**$ подмножество пространства $*$ элементов $x = \{x^k\}$, у которых $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = 0$. Из приведенного выше доказательства следует замкнутость множества $**$.

Покажем, что любое сепарабельное ультраметрическое пространство $B$ изометрически вкладывается в пространство $**$.

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное в пространстве $B$ множество. Каждому элементу $a_i$ множества $A$ поставим в соответствие элемент $x_i = \{x_i^j\}$ пространства $*$ такой, что

$$x_i^j = \min_{0 \leq s \leq j-1} \{\rho(a_i, a_s)\}. \tag{9}$$

Очевидно, что $x_i \in **$. Очевидно также, что отображение (9) — взаимно однозначное. Остается доказать, что это изометрическое отображение, т.е. для любых $i, k$ $\rho_B(a_i, a_k) = \rho_*(x_i, x_k)$.

Положим для определенности, что $x_i^{n+1} = \max\{x_i^{n+1}, x_k^{n+1}\}$, где $n = n(x_i, x_k)$. Тогда из равенства (9) и того, что $x_i^j = x_k^j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$ и $x_i^{n+1} > x_k^{n+1}$, следует

$$x_k^{n+1} = \rho(a_k, a_n) < \min\{\rho(a_i, a_n), x_k^n\} = \min\{\rho(a_i, a_n), x_i^n\} = x_i^{n+1}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что $i > n$ и $\rho(x_i, x_k) = x_i^{n+1}$. В силу (10) и ультраметричности пространства $B$

$$\rho(a_i, a_k) = \rho(a_i, a_n) \geq \min_{0 \leq s \leq n}\{\rho(a_i, a_s)\} = x_i^{n+1} = \rho(x_i, x_k).$$

Остается показать, что $\rho(a_i, a_k) \leq x_i^{n+1}$. Допустим противное, т. е. $\rho(a_i, a_k) > x_i^{n+1} = \min_{0 \leq s \leq n}\{\rho(a_i, a_s)\}$. Пусть $s_1 = \min_s\{s \leq n: \rho(a_i, a_s) < \rho(a_i, a_k)\}$. Поскольку $\rho(a_i, a_k) = \rho(a_n, a_i)$, то $\rho(a_i, a_s) < \rho(a_n, a_i)$. Кроме того, $\rho(a_i, a_{s_1}) < \rho(a_i, a_k) = \rho(a_k, a_{s_1})$. Легко видеть, что $s_1 < n$ и $\rho(a_i, a_{s_1}) = \min_{0 \leq s \leq s_1}\{\rho(a_i, a_s)\} = \min_{0 \leq s \leq s_1}\{\rho(a_k, a_s)\}$. Так как

$$\exists\, s_2 \leq s_1 \;\; \rho(a_k, a_{s_2}) = \min_{0 \leq s \leq s_1}\{\rho(a_k, a_s)\} =$$
$$= \rho(a_i, a_{s_1}) < \rho(a_k, a_{s_1}) = \rho(a_i, a_k),$$

то $s_2 < s_1$. Но тогда $\exists\, s_3 \leq s_2: \rho(a_i, a_{s_3}) = \min_{0 \leq s \leq s_2}\{\rho(a_i, a_s)\}$ и $\min_{0 \leq s \leq s_2}\{\rho(a_i, a_s)\} = \min_{0 \leq s \leq s_2}\{\rho(a_k, a_s)\} = \rho(a_k, a_{s_2}) < \rho(a_i, a_k)$. А это противоречит определению $s_1$. Следовательно, $\rho(a_i, a_k) = x_i^{n+1} = \rho(x_i, x_k)$.

Теперь из полноты пространства ** следует доказательство существования изометрического вложения пространства $B$ в пространство **.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы, разбив его на три независимые части.

Пусть $\{a_0, a_1, \ldots\}$ — произвольное счетное множество из ** ($a_i = \{x_i^j\}$, где $x_i^j = \min_{0 \leq k \leq j-1}\{\rho(a_i, a_s)\}$, $a_0 = (0, 0, \ldots)$). Покажем, что это множество изометрически вкладывается в: i) $c_0$; ii) $l_1$; iii) $l_2$.

i). Положим $b_0 = 0$, $b_i = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_i^n e_n$, где $\{e_n\}$ — канонический базис пространства $c_0$.

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i^j = x_i^{j+1}; \\ x_i^j, & \text{если } x_i^j > x_i^{j+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что для всех $k > i$ $\alpha_i^k = 0$, $\alpha_i^i = x_i^i$.

Докажем, что для любого $0 \leq m < i$ $\|b_i - b_m\|_{c_0} = \rho(a_i, a_m)$. Пусть $n_i = \min\{n : x_i^n > x_i^{n+1}\}$. Тогда $x_i^{n_i} = x_i^1 = \rho(a_i, a_0)$. С другой стороны, $\|b_i - b_0\| = \max_j |\alpha_i^j| = x_i^1 = \rho(a_i, a_0)$.

Зафиксируем $m$, $i$, $m < i$. Допустим, что $x_i^m > x_i^{m+1}$. Тогда $x_i^{m+1} = \rho(a_i, a_m) < \min_{0 \leq k \leq m-1}\{\rho(a_i, a_k)\}$ и в силу ультраметричности для любого $0 \leq k \leq m -$

$-1$ $\rho(a_i, a_k) = \rho(a_k, a_m)$. Отсюда для каждого $0 \le j \le m$ $x_i^j = \min_{0\le k\le j-1} \{\rho(a_i, a_k)\} = \min_{0\le k\le j-1} \{\rho(a_m, a_k)\} = x_m^j$. Но тогда $\|b_i - b_m\| = x_i^{m+1} = \rho(a_i, a_m)$.

Пусть теперь $x_i^m = x_i^{m+1}$. Допустим, что существует $n < m$ такое, что $(x_i^n > x_i^{n+1}) \wedge (x_m^n > x_m^{n+1})$. Тогда $x_i^{n+1} = \rho(a_i, a_n) < \min_{0\le k\le n-1} \{\rho(a_i, a_k)\}$ и $x_m^{n+1} = \rho(a_m, a_n) < \min_{0\le k\le n-1} \{\rho(a_m, a_k)\}$. Отсюда, как и выше, для каждого $0 \le k \le n-1$ $\rho(a_m, a_k) = \rho(a_k, a_n) = \rho(a_i, a_k)$, т. е. для любого $1 \le j \le n$ $x_m^j = x_i^j$. Поэтому

$$\rho(a_i, a_m) = \max\{x_i^{n+1}, x_m^{n+1}\} \ge \|b_i - b_m\|.$$

Пусть $n_0 = \max\{n : (x_i^n > x_i^{n+1}) \wedge (x_m^n > x_m^{n+1})\}$. Тогда $\exists\, n_1, n_2 > n_0$: $x_i^{n_0+1} = x_i^{n_1} > x_i^{n_1+1}$ $x_m^{n_1} = x_m^{n_1+1}$, $x_m^{n_0+1} = x_m^{n_2} > x_m^{n_2+1}$, $x_i^{n_2} = x_i^{n_2+1}$. Поэтому $\alpha_i^{n_1} = x_i^{n_0+1}$, $\alpha_m^{n_2} = x_m^{n_0+1}$, $\alpha_m^{n_1} = \alpha_i^{n_2} = 0$. Отсюда $\|b_i - b_m\| \ge \max\{|\alpha_i^{n_1} - \alpha_m^{n_1}|, |\alpha_i^{n_2} - \alpha_m^{n_2}|\} = \max\{x_i^{n_0+1}, x_m^{n_0+1}\} = \rho(a_i, a_m)$.

Пусть, наконец, для любого $n$ $(x_i^n = x_i^{n+1}) \vee (x_m^n = x_m^{n+1})$. Тогда

$$\|b_i - b_m\| = \max_j \{|\alpha_m^j - \alpha_i^j|\} = \max\{x_i^1, x_m^1\} =$$

$$= \max\{\rho(a_i, a_0), \rho(a_m, a_0)\} = \rho(a_i, a_m).$$

Таким образом, i) доказано.

ii). Положим $b_0 = 0$, $b_i = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_i^n e_n$, где $\{e_n\}$ — канонический базис пространства $l_1$,

$$\alpha_i^0 = \frac{1}{2} x_i^1, \quad \alpha_i^j = \frac{1}{2}(x_i^j - x_i^{j+1}), \quad j \ge 1.$$

Тогда $\|b_i - b_m\|_{l_1} = \rho(a_i, a_m)$ $\forall\, i, m$.

Доказательство аналогично приведенному выше.

iii). Рассмотрим линейное многообразие $D$, элементы которого имеют вид $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in R$, $x_i \in D$, причем коэффициенты $\alpha_i$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \rho(a_i, a_0) < \infty. \tag{11}$$

Определим на $D \times D$ функцию $(x, y)$ следующим образом:

a) $(x_i, x_j) = \frac{1}{2}[\rho^2(a_i, a_0) + \rho^2(a_j, a_0) - \rho^2(a_i, a_j)]$;

b) $\left(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j x_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (x_i, x_j)$.

Покажем, что это скалярное произведение, т. е. $\forall\; x, y, z \in D$ где $x = \sum_i \alpha_i x_i$, $y = \sum_i \beta_i x_i$, $z = \sum_i \sigma_i x_i$: 1) $|(x, y)| < \infty$; 2) $(x, y) = (y, x)$; 3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; 4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; 5) $(x, x) \ge 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Проверка условий 1 – 4 тривиальна. Перейдем к условию 5. В силу ультраметричности

$$0 \le (x_i, x_j) < \rho(a_i, a_0) \cdot \rho(a_j, a_0). \tag{12}$$

Из (12) и условий 1 – 4 следует

$$(x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i\right) +$$

$$+ \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i, \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i\right).$$

Отсюда

$$\left|(x, x) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right| \le 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_i||\alpha_j| \cdot (x_i, x_j) +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{n\infty} |\alpha_i||\alpha_j| (x_i, x_j) < 2\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \; \rho(a_i, a_0)\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i| \; \rho(a_i, a_0)\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i| \; \rho(a_i, a_0)\right)^2.$$

В силу (11)

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = (x, x).$$

Следовательно, если мы докажем, что $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) > 0$ при любом ненулевом наборе $\{\alpha_i\}$, то тем самым будет доказано условие 5. Т. е. надо доказать, что квадратичная форма $Q_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\rho^2(a_i, a_0) + \rho^2(a_j, a_0) - \rho^2(a_i, a_j)] \alpha_i \alpha_j$ является положительно определенной.

Перенумеруем элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ следующим образом: $a_0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\forall\, 0 < i < n \;\; x_i^1 \le x_{i+1}^1$, $\forall\, 0 < i, j < n \;\; (\forall\, 0 < s \le j \;\; x_i^s = x_{i+1}^s) \;\Rightarrow\; x_i^{j+1} \le x_{i+1}^{j+1}$. Легко видеть, что при такой нумерации

$$\forall\, 0 < i < k < j \le n \;\; \rho(a_i, a_j) = \max\{\rho(a_k, a_i) \rho(a_k, a_j)\},$$

$$\forall\, 0 \le i \le k \le m \le j \le n \;\; \rho^2(a_j, a_k) - \rho^2(a_m, a_k) +$$

$$+ \rho^2(a_m, a_i) - \rho^2(a_j, a_i) \ge 0.$$

Легко проверить, что матрица $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = (x_i, x_j)$ в этом случае удовлетворяет условиям 1 — 5 леммы 1. Следовательно, функция $(x, y)$ является скалярным произведением на $D$, и, определив норму на $D$ $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, мы превратим $D$ в предгильбертово пространство. Для завершения доказательства теоремы покажем, что $\rho(a_i, a_j) = \|x_i - x_j\|_D$:

$$\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2(x_i, x_j) + \|x_j\|^2 = \rho^2(a_i, a_0) - [\rho^2(a_i, a_0) + \\ + \rho^2(a_j, a_0) - \rho^2(a_i, a_j)] + \rho^2(a_j, a_0) = \rho^2(a_i, a_j).$$

Аналогично лемме 1 доказывается следующая лемма.

**Лемма 2.** *Если квадратичная форма* $Q_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j$ *относительно* $N$ *переменных* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *с симметричной матрицей* $A = (a_{ij})$ *имеет следующие свойства: для любых* $1 \le i \le k \le m \le n \le N$ 1) $a_{in} \ge a_{kn}$; 2) $a_{km} \ge a_{kn}$; 3) $a_{km} - a_{kn} \ge a_{im} - a_{in}$; 4) $a_{kk} > a_{ki}$ *при* $i < k$; 5) $a_{kk} > 0$, *то эта форма является положительно определенной.*

Некоторые результаты настоящей работы были анонсированы в [8].


1. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 420 с.
2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.: Гостехиздат, 1937. – 304 с.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
4. *Тиман А. Ф.* О некоторых исследованиях в теории аппроксимации функций действительного переменного // Тр. IV Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 1961). – Л.: Наука, 1964. – Т.2. – С. 683–693.
5. *Тиман А. Ф.* Об изометрическом отображении некоторых ультраметрических пространств в пространство $L_p$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **134**. – С. 314–327.
6. *Тиман А. Ф.* Реализация некоторых ультраметрических пространств и обратная задача для $\varepsilon$-энтропии в $h_p$-пространствах // Докл. АН СССР. – 1974. – **218**, № 3. – С. 525-527.
7. *Крейнович В. Я.* К обратной задаче А.Ф.Тимана для $\varepsilon$-энтропии компактов // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, вып.1. – С. 241–242.
8. *Вестфрид И. А., Тиман А. Ф.* Об одном свойстве универсальности гильбертовых пространств // Докл. АН СССР. – 1979. – **246**, № 3. – С. 528–530.


Получено 24.11.92