УДК 517. 95

Н. М. Задорожна, асп. (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
О. М. Мельник, викл. (Кам'янець-Поділ. с.-г. ін-т),
Б. Й. Пташник, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ*

The problem with nonlocal time conditions and periodicity conditions in space variables for Shilov parabolic equations of arbitrary order with constant coefficients is studied. Conditions of existence and uniqueness of a classical solution of the problem are established. The metric theorems on lower bounds of small denominators which appear in the construction of a solution of the problem are proved.

Досліджена задача з нелокальними умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для параболічних за Г. Є. Шиловим рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Дослідженню задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь останнім часом приділяється значна увага [1–7]. Вивчення таких задач стимулювалось як проблемами загальної теорії граничних задач, так і конкретними задачами математичної фізики, які виникають при дослідженні фізики плазми, процесів коливань, вологопереносу, теплопровідності та ін. В роботах [1, 4, 7] досліджуються задачі з нелокальними умовами, які є узагальненням умов періодичності, для гіперболічних і безтипних рівнянь. Ці задачі, взагалі, є некоректними, а їх розв'язуваність пов'язана з проблемами малих знаменників, для аналізу яких використано метричний підхід.

В даній статті, яка продовжує вказану тематику, вивчається задача з нелокальними умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для параболічних за Г. Є. Шиловим рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Будемо використовувати такі позначення:

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

$$(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p, \quad (k, k) = \|k\|^2;$$

Ω^p — p-вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \le x_r \le 2\pi,\ r = \overline{1,p}\}$, $D = [0,T] \times \Omega^p$; A_s^β, $s > 0$, $\beta > 0$, — банахів простір 2π-періодичних функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, які зображуються у вигляді рядів Фур'є $\varphi(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_k \exp(ik, x)$ і для яких скінченна норма $\|\varphi\|_{s,\beta} = \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k| \exp(s|k|^\beta)$. Аналогічні простори при $\beta = 1$ розглядаються в роботі [8]. Легко показати, що $A_s^\beta \subset \mathfrak{G}_{(1/\beta)}$, де $\mathfrak{G}_{(1/\beta)}$ — клас Жевре 2π-періодичних функцій порядку $1/\beta$ типу Берлінга [9, с. 113]; $C^n([0,T], A_s^\beta)$ — простір функцій $v(t,x)$ таких, що $\partial^j v(t,x)/\partial t^j$, $j = \overline{0,n}$, для кожного $t \in [0,T]$ належить простору A_s^β і неперервна по t в нормі A_s^β;

$$\|v\|_{C^n([0,T], A_s^\beta)} = \sum_{p=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial t^p} \right\|_{s,\beta};$$

$C^{(n,q)}(D)$ — банахів простір функцій $u(t,x)$ з нормою

* Підтримана Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки і технологій.

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} = \sum_{\substack{|\nu|\le q \\ j\le n}} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^{j+|\nu|} u(t,x)}{\partial t^j \partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_p^{\nu_p}} \right|.$$

2. Розглянемо в області D задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u + \sum_{\substack{|\nu|\le q \\ j<n}} a_{j\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \frac{\partial^{|\nu|} u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_p^{\nu_p}} = f(t,x), \tag{1}$$

$$M_r\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \sum_{\substack{|\nu|\le q \\ j<n}} b^r_{\nu_j} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_p^{\nu_p}} \left(\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T} \right) = \varphi_r(x), \tag{2}$$

$r = 1, \ldots, n$, де $a_{j\nu} \in \mathbb{R}$, $b^r_{\nu_j} \in \mathbb{C}$, $\mu \ne 0$; оператор L — параболічний за Г. Є. Шиловим, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ корені $\lambda_j(\eta)$ рівняння

$$P(\lambda, \eta) \equiv \lambda^n + \sum_{\substack{|\nu|\le q \\ j<n}} i^{|\nu|} \eta_1^{\nu_1} \ldots \eta_p^{\nu_p} a_{j\nu} \lambda^j = 0 \tag{3}$$

задовольняють нерівність

$$\max_{1\le j\le n} \operatorname{Re}\lambda_j(\eta) \le -c_1 |\eta|^h + c_2, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad h > 0. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t) \exp(ik, x), \tag{5}$$

де $u_k(t)$ — розв'язок задачі

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) = f_k(t), \quad M_r(ik)\, u_k(t) = \varphi_{rk}, \quad r = \overline{1,n},$$

в якій $f_k(t)$, φ_{rk} — коефіцієнти Фур'є функцій $f(t,x)$ і $\varphi_r(x)$ відповідно.

Зауважимо, що $u_k(t) = w_k(t) + v_k(t)$, де $w_k(t)$ і $v_k(t)$ — розв'язки таких задач:

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) w_k(t) = 0, \quad M_r(ik)\, w_k(t) = \varphi_{rk}, \quad r = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) v_k(t) = f_k(t), \quad M_r(ik)\, v_k(t) = 0, \quad r = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Припустимо, що для кожного вектора $\eta = k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ рівняння (3) є прості. Тоді розв'язок задачі (6) зображується формулою $w_k(t) = \sum_{l=1}^n c_l(k) \exp(\lambda_l t)$, де константи $c_l(k)$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{l=1}^n \sum_{\substack{|\nu|\le q \\ j<n}} \psi(\nu) b^r_{\nu_j} \lambda_l^j \, (1 - \mu \exp(\lambda_l T))\, c_l = \varphi_{rk}, \quad r = \overline{1,n}. \tag{8}$$

$$\psi(\nu) = i^{|\nu|} k_1^{\nu_1} \ldots k_p^{\nu_p}, \quad \lambda_l = \lambda_l(k), \quad c_l = c_l(k).$$

Визначник системи (8)

$$\Delta(k) = \prod_{s=1}^{n} (1 - \mu \exp(\lambda_s T)) \det B(k) \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i), \tag{9}$$

де $B(k) = \left\| \sum_{|\nu| \le q} b_{\nu j}^i \psi(\nu) \right\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{0,n-1}}}$

Знайдемо алгебраїчні доповнення $\Delta_{m,l}(k)$ визначника $\Delta(k)$:

$$\Delta_{m,l}(k) = (-1)^{m+l} \prod_{\substack{s=1 \\ s \ne l}}^{n} (1 - \mu e^{\lambda_s T}) \sum_{r=1}^{n} \det B_{m,r} S_{n-r}^l \prod_{\substack{1 \le \beta < \alpha \le n \\ \alpha \ne l \\ \beta \ne l}} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta), \tag{10}$$

де S_{n-r}^l — сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_i(k)$, $i = \overline{1,n}$; $i \ne l$, взятих у кількості $n - r$; $\det B_{m,r}(k)$ — визначник, який одержуємо з $\det B(k)$ шляхом викреслення m-го рядка і r-го стовпця.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^{(n,q)}(D)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$1 - \mu \exp(\lambda_s(k) T) = 0, \quad s = \overline{1,n}; \quad \det B(k) = 0 \tag{11}$$

не мали розв'язків в цілих числах $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай одне з рівнянь (11) має розв'язок в цілих числах $k_1^0, \ldots, k_p^0$. Тоді для вектора $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_p^0)$ $\Delta(k^0) = 0$ і існує ненульовий розв'язок однорідної задачі, яка відповідає задачі (1), (2). Цей розв'язок має вигляд $u_0(t, x) = \sum_{l=1}^{n} c_l(k^0) \exp(\lambda_l t + i(k^0, x))$, де $(c_1(k^0), \ldots, c_n(k^0))$ — ненульовий розв`язок однорідної системи рівнянь, яка відповідає системі (8).

Достатність. Припустимо, що задача (1), (2) має два розв'язки $u_1(t, x)$ і $u_2(t, x)$ із простору $C^{(n,q)}(D)$. Тоді функція $\bar{u}(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ є розв'язком відповідної однорідної задачі із простору $C^{(n,q)}(D)$ і зображується рядом вигляду (5), причому $L(\bar{u})$ і $M_r(\bar{u})$ належать $C^{(0,0)}(D)$. З рівностей Парсеваля для функцій $L(\bar{u})$ і $M_r(\bar{u})$ випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $\bar{u}_k(t)$ функції $\bar{u}(t, x)$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає (6). За умовою теореми $\Delta(k) \ne 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}^p$, тому $\bar{u}_k(t) \equiv 0 (\forall k \in \mathbb{Z}^p)$. Тоді $\bar{u}(t, x) \equiv 0$.

***Зауваження* 1.** Вираз $1 - \mu \exp(\lambda_s T)$ відмінний від нуля для всіх цілих $k \in \mathbb{Z}^p$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

а) $\ln|\mu| + \operatorname{Re}\lambda_s(k) T \ne 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}^p$;

б) $\arg\mu + \operatorname{Im}\lambda_s(k) T + 2\pi m \ne 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}^p$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Із (4) випливає, що умова а) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_1$, де $K_1^h = \left[c_1^{-1} (c_2' + \ln|\mu| / T) \right]$ ($[b]$ — ціла частина числа b).

3. Припустимо, що умови єдиності розв'язку задачі (1), (2) виконуються. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (6), який на основі формул (9), (10) зображується у вигляді

$$w_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-m}\det B_{m,r}(k)\varphi_{mk}S_{n-r}^{l} \times$$

$$\times\ [\,(1-\mu\exp(\lambda_l T))\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq l}}^{n}(\lambda_l-\lambda_\alpha)\det B(k)\,]^{-1}\exp(\lambda_l T), \tag{12}$$

а також існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ однорідної задачі, яка відповідає задачі (7), за допомогою якої розв'язок задачі (7) має вигляд

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

У квадраті $K_T = \{(t,\tau)\,|\,0\le t\le T,\ 0\le\tau\le T\}$, крім сторін $\tau=0$, $\tau=T$, функція Гріна має вигляд

$$G_k(t,\tau) = 1/2\sum_{i=1}^{n}\exp(\lambda_i(t-\tau))\left[\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_\beta)\right]^{-1}\times$$

$$\times\{\,\mathrm{sgn}(t-\tau)+(1+\mu\exp(\lambda_i T))\,[\,1-\mu\exp(\lambda_i T)\,]^{-1}\}. \tag{14}$$

На основі формул (5), (12) – (14), враховуючи, що $u_k(t) = w_k(t)+v_k(t)$, одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляду ряду, який, взагалі, є розбіжний, бо величини $|\det B(k)|$, $|\lambda_p(k)-\lambda_\beta(k)|$, $|1-\mu\exp(\lambda_i T)|$, будучи відмінними від нуля, можуть приймати як завгодно малі значення для нескінченного числа векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Тому питання існування розв'язку задачі пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників.

Легко бачити, що для довільного $a\in(0,1)$ при $|k|>K_2$, де $K_2^h = \max\{c_2/c_1;\, c_1^{-1}(c_2+T^{-1}\ln|\mu|/(1-a))\}$, справджується оцінка

$$|\,1-\mu\exp(\lambda_j(k)T)\,|\ge a. \tag{15}$$

Із вигляду рівняння (3) випливає

$$|\lambda_j(k)|\le c_3|k|^q,\quad k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Нехай існують константи s_1, s_2, c_4, c_5 такі, що для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p\,(|k|>K_3)$ виконуються нерівності*

$$\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq l}}^{n}|\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k)|\ge c_4|k|^{-s_1},\quad l=1,\dots,n, \tag{17}$$

$$|\det B(k)|\ge c_5|k|^{-s_2}. \tag{18}$$

Якщо $\varphi_m(x)\in A_s^\beta\,(m=\overline{1,n})$, $f(t,x)\in C([0,T],A_s^\beta))$, де $s>c_3T$, $\beta=q$, то існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{(n,q)}(D)$.

Доведення. Зауважимо, що при $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ маємо

$$|\det B_{m,r}(k)|\le c_6|k|^{q(n-1)}. \tag{19}$$

$$|1 + \mu \exp(\lambda_i(k)T)| \leq 1 + |\mu| \exp(c_2 T). \tag{20}$$

Із формул (5), (12) – (14) та оцінок (15) – (20) випливає

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_7 \sum_{|k| \leq K} \left(|\varphi_{mk}| + \max_{t \in [0,T]} |f_k(t)| \right) +$$

$$+ c_8 \sum_{|k| > K} \|k\|^{\eta} \exp(c_3 |k|^q T) \left(|\varphi_{mk}| + \max_{t \in [0,T]} |f_k(t)| \right), \tag{21}$$

де $\eta = q(3n-1) + s_1 + s_2$, $K = \max\{K_2, K_3\}$.

Із (21) видно, що

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_9 \left(\|\varphi_m\|_{s,\beta} + \|f\|_{C([0,T], A_s^{\beta})} \right), \quad s > c_3 T, \quad \beta = q.$$

Теорема доведена.

Проаналізуємо можливість виконання умов (17), (18). Нехай

$$\det B(k) \equiv \sum_{|r| \leq qn} i^{|r|} B_r k_1^{r_1}, \ldots, k_p^{r_p}, \;\; \beta^{(1)} = \left(\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_h^{(1)}\right), \;\; \beta^{(2)} = \left(\beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_h^{(2)}\right)$$

— вектори, координати яких є відповідно дійсною і уявною частиною коефіцієнтів $i^{|r|} B_r$, де h — кількість цілочислових розв'язків нерівності $r_1 + \ldots + r_p \leq \leq qn$.

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^h$*) векторів* $\beta^{(1)}$ *і для всіх векторів* $\beta^{(2)}$ *(або для всіх* $\beta^{(1)}$ *та майже всіх* $\beta^{(2)}$*) нерівність* (18) *виконується при* $s_2 > p$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2.4 [7, гл. 5].

Позначимо через $y = (y_1, \ldots, y_\gamma)$ вектор, складений із коефіцієнтів рівняння (1), де γ — число всіх коефіцієнтів.

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\gamma$*) векторів* y *нерівності* (17) *виконуються при* $s_1 > (n-1)(p + q(n-3))/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Скористаємося методом доведення теореми 6 із [1]. Покажемо, що для майже всіх векторів y, які належать деякому паралелепіпеду $P_\gamma = [\alpha_0, \beta_0] \times P_{\gamma-1} \subset \mathbb{R}^\gamma$, для дискримінанта $D(P)$ характеристичного полінома $P(\lambda; k)$ із (3) справедлива така оцінка:

$$|D(P)| \geq |k|^{(q-p)(n-1)-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{22}$$

при досить великих $|k|$. Позначимо через B множину тих y, для яких протилежна нерівність виконується для нескінченного числа векторів k:

$$|D(P)| < |k|^{(q-p)(n-1)-\varepsilon}, \tag{23}$$

а через B_k — множину векторів y, для яких нерівність (23) справедлива при фіксованому k. Не порушуючи загальності, позначимо $|k_1| = \max_{1 \leq i \leq p} |k_i|$, $\alpha = = a_{0,q,0,\ldots,0} \neq 0$ і, використавши зображення $D(P)$ через коефіцієнти полінома $P(\lambda; k)$, знайдемо

$$\left| \frac{\partial^{n-1} D(P)}{\partial \alpha^{n-1}} \right| = n^n (n-1)! \, |k_1|^{q(n-1)} = \tilde{c}_1(k_1).$$

На основі леми 2 із [1] одержуємо, що міра множини B'_k тих значень $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, які задовольняють (23) (коли решта коефіцієнтів рівняння (1) фіксовані), має таку оцінку:

$$|B'_k| \le \tilde{c}_2 |k|^{-p-\varepsilon/(n-1)}. \tag{24}$$

Інтегруючи оцінку (24) по паралелепіпеду $P_{\gamma-1}$, маємо

$$|B_k| \le \tilde{c}_3 |k|^{-p-\varepsilon/(n-1)}.$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|>0} |B_k|$ збігається, то згідно з лемою 1 із [1] міра множини B дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\gamma}$) векторів y виконується нерівність (22) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що $D(P) = \prod_{1\le l<q\le n} [\lambda_q(k) - \lambda_l(k)]^2$, одержуємо для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ таку оцінку:

$$\prod_{1\le l<q\le n} |\lambda_q(k) - \lambda_l(k)| \ge \tilde{c}_4 |k|^{(n-1)(q-p)/2 - \varepsilon/2}.$$

З рівності

$$\prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\ne l}}^{n} |\lambda_l - \lambda_\alpha| = \prod_{1\le l<q\le n} |\lambda_q - \lambda_l| \left[\prod_{\substack{1\le\beta<\alpha\le n \\ \alpha\ne l \\ \beta\ne l}} |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \right]^{-1}$$

та оцінок (16) знаходимо

$$\prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\ne l}}^{n} |\lambda_l - \lambda_\alpha| \ge \tilde{c}_5 |k|^{-(n-1)(p+q(n-3))/2 - \varepsilon/2}.$$

Теорема доведена.

1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637 – 645.
2. *Дезин А. А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, № 1. – С. 144 – 149.
3. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 498 – 502.
4. *Илькив В. С, Пташник Б. Й.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 16. – С. 1012 – 1023.
5. *Кмить И. Я.* Нелокальные задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка. – Львов, 1991. – 69 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 842-Ук 91.
6. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 1. – С. 92 – 101.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. *Романов В. Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 2. – С. 275 – 283.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

Одержано 20.01.94