УДК 519.21

Ю. В. Боровских, д-р физ.-мат. наук (Петербург. трансп. ин-т, С.-Петербург)

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ UH-СТАТИСТИК

The estimates of the rate of convergence in the central limit theorem for Hilbert-valued U-statistics are obtained.

Одержані оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для U-статистик зі значеннями в гільбертовому просторі.

1. Введение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{X})$ и одинаковым распределением P, H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Введем в рассмотрение UH-статистику [1]

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}). \tag{1}$$

с симметрическим ядром $\Phi\colon X^m \to H$. В частности, если в (1) $m = 1$, то

$$U_n = n^{-1}(\Phi(X_1) + \ldots + \Phi(X_n)) \tag{2}$$

есть сумма независимых одинаково распределенных H-значных случайных величин. Если $E\|\Phi(X_1, \ldots, X_m)\| < \infty$, то U_n является несмещенной оценкой H-значного элемента $\theta = E\Phi(X_1, \ldots, X_m)$.

В теории U-статистик одним из центральных утверждений является каноническое разложение Гефдинга [2]

$$U_n - \theta = \sum_{c=1}^{m} \binom{m}{c} U_{nc}, \tag{3}$$

где

$$U_{nc} = \binom{n}{c}^{-1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_c \le n} g_c(X_{i_1}, \ldots, X_{i_c})$$

есть U-статистика с вырожденным ядром

$$g_c(x_1, \ldots, x_c) = \int\limits_X \ldots \int\limits_X \Phi(y_1, \ldots, y_m) \prod_{s=1}^{c} \left(\delta_{x_s}(dy_s) - P(dy_s)\right) \prod_{s=c+1}^{m} P(dy_s).$$

Из теоремы о слабой сходимости UH-статистик [1–3], доказательство которой основано на формуле (3), следует, что если выполняются условия

$$E\|g_1(X_1)\|^2 \ne 0, \tag{4}$$

$$E\|g_c(X_1, \ldots, X_c)\|^{2c/(2c-1)} < \infty, \quad c = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

то при $r = O(1)$ справедливо

$$P(\|m^{-1}\sqrt{n}\,(U_n - \theta)\| > r) - P(\|\tau\| > r) \to 0 \tag{6}$$

при $n \to \infty$, где τ — гауссовский случайный элемент в H с нулевым средним значением и ковариационым оператором S:

$$(Sx, y) = \int_X (x, g_1(z))(y, g_1(z)) P(dz), \quad x, y \in H. \tag{7}$$

В [1 – 3] изучалась скорость сходимости в (6) и было показано, что

$$\left| P(\| m^{-1} \sqrt{n}\,(U_n - \theta)\| > r) - P(\|\tau\| > r) \right| \le c(s)\, n^{-1/2} \tag{8}$$

с некоторой постоянной $c(s)$, зависящей от S-оператора (7). Соотношение (6) можно записать в виде

$$P(\| m^{-1} \sqrt{n}\,(U_n - \theta)\| > r) / P(\|\tau\| > r) - 1 \to 0. \tag{9}$$

Выражение слева в (9) трактуется как относительная погрешность гауссовской аппроксимации UH-статистики. В связи с (9) возникает задача об оценке величины

$$\Delta_{nm}(H; r) = \left| P(\| m^{-1} \sqrt{n}\,(U_n - \theta)\| > r) / P(\|\tau\| > r) - 1 \right| \tag{10}$$

при $n \to \infty$ в зоне $r = o(n^{\beta})$ с некоторым $0 < \beta \le 1$. Эта задача о скорости сходимости вероятностей больших уклонений для UR-статистик изучалась в [4 – 15], а для UH-статистик $m = 1$ — в [16 – 21]. Экспоненциальные неравенства для UR-статистик с ограниченным ядром получены в [13]. Умеренные уклонения UR-статистик с $r \sim \delta \sqrt{\ln n}$ сначала изучались в [14, 15], и затем уточнялись в [4, 10 – 12]. В [4] установлена справедливость (9) с $\beta = 1/2(5 + 2\gamma)$ при некотором $\gamma \ge 0$, входящем в условия теоремы, а в [10 – 12] — с $\beta = 1/2(3 + 2\gamma)$. В [5 – 7] приведены условия на ядро Φ, при которых выполняется (9) с $\beta = 1/6$, а если ядро Φ ограничено, то и с $\beta = 1/2$. В [11] для UR-статистик рассматривались большие уклонения типа Чернова. Случай UH-статистик исследовался только для $m = 1$, что совпадает с задачей об оценке скорости сходимости вероятностей больших уклонений сумм независимых H-значных случайных величин вида (2). В [17, 19] показано, что в условиях Крамера справедлива оценка

$$\Delta_{n1}(H; r) \le c(s)(1 + r)^3 n^{-1/2} \tag{11}$$

при $0 \le r \le \delta n^{1/6}$.

Основная цель данной работы заключается в том, чтобы оценить величину $\Delta_{n2}(H; r)$ и обобщить результаты работ [10 – 12] о степенных зонах нормальной сходимости на UH-статистики степени $m = 2$. Представляет интерес задача об оценке $\Delta_{nm}(H; r)$ для $m \ge 2$ в случае вырожденного ядра Φ.

2. Теорема. Всюду в дальнейшем предполагается, что в (1) $m = 2$. Следовательно, в (3)

$$U_n - \theta = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) + \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j), \tag{12}$$

$$\theta = E\Phi(x_1, x_2),$$

$$g_1(x) = E(\Phi(x_1, x_2) - \theta \mid X_1 = x),$$

$$g_2(x, y) = \Phi(x, y) - \theta - g_1(x) - g_1(y).$$

Теорема. *При некотором $t > 0$ выполняется условие Крамера*

$$E \exp (t \| g_1(X_1) \|^{1/2}) < \infty$$

и для $k = 1, 2, \ldots$

$$E \| g_2(X_1, X_2) \|^k < C^k k^{\gamma k}$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ *и* $\gamma \ge 0$, *не зависящими от* k. *Тогда в области* $0 \le r \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)}$ *справедлива оценка*

$$\Delta_{n2}(H; r) \le A(1+r) n^{-1/2(3+2\gamma)}, \tag{13}$$

где постоянная $A > 0$ *не зависит от* n *и* r, *а*

$$\delta^2 \le \min \{ 2, (4Ce^2)^{-1} \}^{-1/(1+\gamma)}.$$

3. Доказательство теоремы. Разобьем доказательство (13) на ряд лемм. В процессе нашего рассуждения существенным моментом является вывод оценок для математических ожиданий H-значных случайных величин, имеющих мартингальные свойства. Для R-значных мартингалов аналогичные неравенства имеются в [9, 22, 23]. Сначала отметим, что в силу (10) для справедливости (13) достаточно установить неравенство

$$| P(\| 2^{-1} \sqrt{n} (U_n - \theta) \| > r) - P(\| \tau \| > r) | \le$$

$$\le A(1+r) n^{-1/2(3+2\gamma)} P(\| \tau \| > r). \tag{14}$$

При $0 \le r \le 1$ по оценке (8) и неравенствам $P(\| \tau \| \ge r) \ge P(\| \tau \| \ge 1) \ne 0$ можно написать

$$| P(\| 2^{-1} \sqrt{n} (U_n - \theta) \| > r) - P(\| \tau \| > r) | \le c(s) n^{-1/2} =$$

$$= A n^{-1/2} P(\| \tau \| \ge 1) \le A(1+r) n^{-1/2(3+2\gamma)} P(\| \tau \| > r),$$

где $A \le c(s) / P(\| \tau \| \ge 1)$.

Следовательно, в процессе доказательства (14) достаточно рассматривать область $1 \le r \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)}$.

Лемма 1. *Пусть* $r \ge 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любых* H*-значных случайных элементов* X *и* Y *справедливы неравенства*

$$P(\| X \| > r + \varepsilon) - P(\| Y \| > \varepsilon) \le P(\| X + Y \| > r) \le$$

$$\le P(\| X \| > r - \varepsilon) + P(\| Y \| > \varepsilon). \tag{15}$$

Доказательство. Для правого неравенства в (15) пишем

$$P(\| X + Y \| > r) \le P(\| X \| + \| Y \| > r) =$$

$$= EI(\| X \| + \| Y \| > r) I(\| Y \| \le \varepsilon) +$$

$$+ EI(\| X \| + \| Y \| > r) I(\| Y \| > \varepsilon) \le EI(\| X \| + \varepsilon > r) +$$

$$+ EI(\| Y \| > \varepsilon) = P(\| X \| > r - \varepsilon) + P(\| Y \| > \varepsilon).$$

Для левого неравенства в (15) имеем

$$P(\| X + Y \| > r) = P(\| X + Y \|^2 > r^2) =$$

$$= P(\| X \|^2 + \| Y \|^2 + 2(X, Y) > r^2) =$$

$$= P((\| X \| - \| Y \|)^2 + 2(\| X \| \| Y \| + (X, Y)) > r^2).$$

Так как $\| X \| \| Y \| + (X, Y) \ge 0$, то отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
P(\|X+Y\|>r) \geq P\left(\,\big|\, \|X\|+\|Y\| \,\big| > r\,\right)= \\
=P\left(\{\|X\|-\|Y\|<-r\} \cup\{\|X\|-\|Y\|>r\}\right) \geq \\
\geq P(\|X\|>r+\|Y\|)=E I(\|X\|>r+\|Y\|)= \\
=E I(\|X\|>r+\|Y\|) I(\|Y\| \leq \varepsilon)+ \\
+E I(\|X\|>r+\|Y\|) I(\|Y\|>\varepsilon) \geq \\
\geq E I(\|X\|>r+\|Y\|) I(\|Y\| \leq \varepsilon) \geq \\
\geq P(\|X\|>r+\varepsilon)-P(\|Y\|>\varepsilon),
\end{gathered}
$$

что и доказывает (15).

В последующих рассуждениях мы будем применять лемму 1 при $\varepsilon = n^{-1/2(3+2\gamma)}$ и

$$
X=\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_{1}(X_{j}),
$$

$$
Y=2^{-1} \sqrt{n}\, U_{n 2}.
$$

Лемма 2. *Пусть H-значная стохастическая последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_n$ является мартингал-разностью, т. е.*

$$
E(\xi_{j} \mid \xi_{1}, \ldots, \xi_{j-1}) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{16}
$$

Тогда для целых $1 \leq k \leq n$ справедливо неравенство

$$
E\|S_{n}\|^{2 k} \leq(8 e k)^{k} n^{k} m_{n, k}, \tag{17}
$$

где

$$
S_{n}=\xi_{1}+\ldots+\xi_{n},
$$

$$
m_{n, k}=\max _{1 \leq j \leq n} E\|\xi_{j}\|^{2 k}.
$$

Доказательство. Применим метод работы [9] и будем вести доказательство индукцией по n при каждом фиксированном k, $k \leq n$. Сначала пусть $n = k$. Тогда

$$
\begin{gathered}
E\|S_{k}\|^{2 k}=E(S_{k}, S_{k})^{k}=E(\xi_{1}+\ldots+\xi_{k}, \xi_{1}+\ldots+\xi_{k})^{k}= \\
=E\left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{j=1}^{k}(\xi_{i}, \xi_{j})\right)^{k} \leq E\left(\sum_{j=1}^{k}\|\xi_{j}\|\right)^{2 k} \leq \\
\leq k^{2 k-1} \sum_{j=1}^{k} E\|\xi_{j}\|^{2 k} \leq k^{2 k} m_{k, k} .
\end{gathered} \tag{18}
$$

Таким образом, (17) справедливо при $n = k$. Покажем далее, что (17) истинно и при $n = l \geq k$. Для этого записываем

$$
\begin{gathered}
E\|S_{l+1}\|^{2 k}=E\|S_{l}+\xi_{l+1}\|^{2 k}=E(S_{l}+\xi_{l+1}, S_{l}+\xi_{l+1})^{k}= \\
=E(\|S_{l}\|^{2}+\|\xi_{l+1}\|^{2}+2(S_{l}, \xi_{l+1}))^{k}= \\
=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} E\left(\|S_{l}\|^{2(k-j)}(2(S_{l}, \xi_{l+1})+\|\xi_{l+1}\|^{2})^{j}\right)=
\end{gathered}
$$

$$= E\|S_l\|^{2k} + \binom{k}{1} E(\|S_l\|^{2(k-1)}\|\xi_{l+1}\|^2) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} E\left(\|S_l\|^{2(k-j)}(2(S_l, \xi_{l+1}) + \|\xi_{l+1}\|^2)^j \right). \quad (19)$$

Здесь последнее равенство написано на том основании, что согласно свойству (16)

$$E(\|S_l\|^{2(k-1)}(S_l, \xi_{l+1})) = 0.$$

В (19)

$$|2(S_l, \xi_{l+1}) + \|\xi_{l+1}\|^2|^j \le 2^{j-1}(2^j|(S_l, \xi_{l+1})|^j + \|\xi_{l+1}\|^{2j}) \le$$

$$\le 2^{2j-1}\|S_l\|^j\|\xi_{l+1}\|^j + 2^{j-1}\|\xi_{l+1}\|^{2j}.$$

Таким образом, из (19) имеем

$$E\|S_{l+1}\|^{2k} \le E\|S_l\|^{2k} + \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} 2^{2j-1} E\left(\|S_l\|^{2k-j}\|\xi_{l+1}\|^j \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^{j-1} E\left(\|S_l\|^{2(k-j)}\|\xi_{l+1}\|^{2j} \right). \quad (20)$$

По неравенству Гельдера

$$E\left(\|S_l\|^{2k-j}\|\xi_{l+1}\|^j) \right) \le \left(E\|S_l\|^{2k} \right)^{1-j/2k} \left(E\|\xi_{l+1}\|^{2k} \right)^{j/2k} \le$$

$$\le (d_k l^k m_{l,k})^{1-j/2k}(m_{l+1,k})^{j/2k} = (d_k l^k m_{l+1,k})\left(d_k^{1/2k} l^{1/2} \right)^{-j},$$

$$E\left(\|S_l\|^{2(k-j)}\|\xi_{l+1}\|^{2j}) \right) \le \left(E\|S_l\|^{2k} \right)^{1-j/k} \left(E\|\xi_{l+1}\|^{2k} \right)^{j/k} \le$$

$$\le (d_k l^k m_{l,k})^{1-j/k}(m_{l+1,k})^{j/k} \le$$

$$\le (d_k l^k m_{l+1,k})^{1-j/k}(m_{l+1,k})^{j/k} = d_k l^k m_{l+1,k}\left(d_k^{1/k} l \right)^{-j},$$

где $d_k = (8ek)^k$.

Подставляя эти оценки в (20), с учетом индукционного предположения о справедливости (17) при $n = l \ge k$ получаем

$$E\|S_{l+1}\|^{2k} \le d_k l^k m_{l+1,k}(1 + A_k + B_k). \quad (21)$$

$$A_k = \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} 2^{2j-1}\left(d_k^{1/2k} l^{1/2} \right)^{-j},$$

$$B_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^{j-1}\left(d_k^{1/k} l \right)^{-j}.$$

Поскольку при всех $0 \le j \le k-2$

$$\binom{k}{j+2} \le \frac{k(k-1)}{2}\binom{k-2}{j},$$

то имеем оценки

$$A_k = 2^3\left(d_k^{1/k} l \right)^{-1} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j+2} 2^{2j}\left(d_k^{1/2k} l^{1/2} \right)^{-j} \le$$

$$\le 4k(k-1)\left(d_k^{1/k} l\right)^{-1} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} \left(4^{-1} d_k^{1/2k} l^{1/2}\right)^{-j} =$$

$$= 4k(k-1)\left(d_k^{1/k} l\right)^{-1} \left(1 + 4\left(d_k^{1/2k} l^{1/2}\right)^{-1}\right)^{k-2} =$$

$$= \frac{k-1}{2el}\left(1 + 2(2ekl)^{-1/2}\right)^{k-2} \le \frac{k-1}{2el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k,$$

и так как при всех $0 \le j \le k-1$

$$\binom{k}{j+1} \le k\binom{k-1}{j},$$

то справедливы оценки

$$B_k = \left(d_k^{1/k} l\right)^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} 2^j \left(d_k^{1/k} l\right)^{-j} \le$$

$$\le k\left(d_k^{1/k} l\right)^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(2^{-1} d_k^{1/k} l\right)^{-j} =$$

$$= k\left(d_k^{1/k} l\right)^{-1} \left(1 + 2\left(d_k^{1/k} l\right)^{-1}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{8el}\left(1 + \frac{1}{4ekl}\right)^{k-1} \le \frac{1}{8el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k.$$

Следовательно, в (21)

$$E\|S_{l+1}\|^{2k} \le d_k l^k m_{l+1,k}\left\{1 + \frac{k}{2el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k - \frac{3}{8el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k\right\} \le$$

$$\le d_k l^k m_{l+1,k}\left(1 + \frac{k}{el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k\right). \tag{22}$$

Справа в (22)

$$\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{2}{e}\right)^{1/2}\right)^k \le \exp\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{1/2}\right) \le e$$

и при всех $l \ge k$

$$1 + \frac{k}{el}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{e}}\right)^k \le \left(1 + \frac{k}{l}\right) \le \left(1 + \frac{1}{l}\right)^k.$$

Следовательно, утверждение (17) истинно и при всех $n = l \ge k$.

Лемма 3. *Для всех* $k = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$E\left\|\sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j)\right\|^{2k} \le (8ek)^{2k}(n-1)^{2k} E\|g_2(X_1, X_2)\|^{2k}. \tag{23}$$

Доказательство. Сначала запишем формулу

$$\sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) = \sum_{i=2}^{n} \xi_i, \tag{24}$$

где

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{i-1} g_2(X_i, X_j).$$

Так как функция $g_2(x, y)$ имеет свойство вырожденности, то стохастическая последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ является мартингал-разностью, т. е. удовлетворяет (16). Поэтому согласно неравенству (17) и с учетом (24) можно записать

$$E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{2k} \le (8ek)^k (n-1)^k \max_{2 \le i \le n} E\|\xi_i\|^{2k}. \tag{25}$$

Далее, при фиксированном i стохастическая последовательность $g_2(X_i, X_1)$, $g_2(X_i, X_2), \ldots, g_2(X_i, X_{i-1})$ также имеет мартингальное свойство (16). Так что вновь согласно неравенству (17) имеем

$$E\|\xi_i\|^{2k} \le (8ek)^k (i-1)^k E\|g_2(X_1, X_2)\|^{2k}. \tag{26}$$

При выводе (26) учтено, что $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные величины. Подставляя (26) в (25), получаем (23).

Лемма 4. *Если для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$E\|g_2(X_1, X_2)\|^k \le C^k k^{\gamma k} \tag{27}$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ *и* $\gamma \ge 0$, *не зависящими от* k, *то для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *и всех вещественных* $p \in [2, 2n]$ *справедливо*

$$E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{p} \le e^{2(1+\gamma)} (4eC)^p p^{(1+\gamma)p} (n-1)^p. \tag{28}$$

Доказательство. Для $p \in [2, 2n]$ определим целое число r, $r = 1, \ldots, n$, так что $2(r-1) < p \le 2r$. Согласно неравенству Гельдера

$$E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{p} \le \left(E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{2r} \right)^{p/2r}.$$

Так как $1 \le r \le n$, то согласно неравенству (23) и условию (27) имеем

$$E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{2r} \le (8er)^{2r} (n-1)^{2r} E\|g_2(X_1, X_2)\|^{2r} \le$$

$$\le (8er)^{2r} (n-1)^{2r} C^{2r} (2r)^{\gamma 2r}.$$

Таким образом,

$$E\left\| \sum_{1 \le i < j \le n} g_2(X_i, X_j) \right\|^{p} \le (8er)^p (n-1)^p C^p (2r)^{\gamma p} =$$

$$= (4eC)^p (n-1)^p (2r)^{(1+\gamma)p}. \tag{29}$$

В силу выбора r

$$\frac{p}{2} \le r < \frac{p}{2} + 1$$

для всех вещественных $p \in [2, 2n]$. Поэтому в (29)

$$(2r)^{(1+\gamma)p} \le (p+2)^{(1+\gamma)p} = p^{(1+\gamma)p}\left(1+\frac{2}{p}\right)^{(1+\gamma)p} \le p^{(1+\gamma)p} e^{2(1+\gamma)},$$

что и доказывает (28).

Лемма 5. *При* $1 \le r \le A\,n^{1/6}$ *справедливы оценки*

$$C_1 r^{\nu-2}\exp(-r^2/2) \le P(\|\tau\| > r) \le C_2 r^{\nu-2}\exp(-r^2/2), \tag{30}$$

где ν *— кратность первого собственного значения* λ_1 *ковариационного оператора* S, *и если* $\varepsilon \le r$ *для* $\varepsilon > 0$, *то*

$$P(r-\varepsilon \le \|\tau\| \le r+\varepsilon) \le C_3\varepsilon(1+r)P(\|\tau\| > r). \tag{31}$$

Доказательство см. в [16, 18, 19, 21]. При этом соотношение (31) можно вывести из (30).

Лемма 6. *Пусть для всех* $k = 1, 2, \dots$

$$E\|g_2(X_1, X_2)\|^k \le C^k k^{\gamma k}$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ *и* $\gamma \ge 0$, *не зависящими от* k. *Тогда в области* $1 \le r \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)}$, $\delta > 0$, *справедливо соотношение*

$$P\left(\|2^{-1}\sqrt{n}\,U_{n2}\| > n^{-1/2(3+2\gamma)}\right) = O(n^{-1})P(\|\tau\| > r) \tag{32}$$

при $n \to \infty$.

Доказательство. Для всех $n = 1, 2, \dots$ и всех вещественных $p \in [2, 2n]$ сначала имеем

$$P\left(\|2^{-1}\sqrt{n}\,U_{n2}\| > n^{-1/2(3+2\gamma)}\right) = P\left(\|nU_{n2}\| > 2n^{(1+\gamma)/(3+2\gamma)}\right) \le$$
$$\le 2^{-p} n^{-p(1+\gamma)/(3+2\gamma)} E\|nU_{n2}\|^p.$$

Согласно лемме 4

$$E\|nU_{n2}\|^p = \left(\frac{2}{n-1}\right)^p E\left\|\sum_{1\le i<j\le n} g_2(X_i, X_j)\right\|^p \le e^{2(1+\gamma)}(8eC)^p p^{(1+\gamma)p},$$

так что

$$P\left(\|2^{-1}\sqrt{n}\,U_{n2}\| > n^{-1/2(3+2\gamma)}\right) \le$$
$$\le e^{2(1+\gamma)}\left((4eC)p^{1+\gamma}n^{-(1+\gamma)/(3+2\gamma)}\right)^p. \tag{33}$$

Рассмотрим выражение справа в (33) при следующем выборе p:

$$p = \alpha n^{1/(3+2\gamma)},$$

где

$$\alpha = \min\{2, (4Ce^2)^{-1/(1+\gamma)}\}.$$

Очевидно, что для достаточно больших n параметр $p \in [2, \dots, 2n]$. При таком выборе p имеем

$$(4eC)p^{1+\gamma}n^{-(1+\gamma)/(3+2\gamma)} \le e^{-1}.$$

Тогда из (33) получаем

$$P\left(\|2^{-1}\sqrt{n}\,U_{n2}\| > n^{-1/2(3+2\gamma)}\right) \le e^{2(1+\gamma)}e^{-p} = e^{2(1+\gamma)}e^{-\alpha n^{1/(3+2\gamma)}}. \tag{34}$$

Так как по условию теоремы $\delta^2 \le \alpha$, то при $1 \le r \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)}$ справедливо

$$e^{-(\alpha/2)n^{1/(3+2\gamma)}} \le e^{-r^2/2}$$

и, таким образом, с учетом леммы 5

$$e^{-(\alpha/2)n^{1/(3+2\gamma)}} \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)} r^{\nu-2} e^{-r^2/2} \le \delta C_1^{-1} n^{1/2(3+2\gamma)} P(\|\tau\| > r). \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), находим в области $1 \le r \le \delta n^{1/2(3+2\gamma)}$ оценку

$$P\left(\|2^{-1}\sqrt{n}\, U_{n2}\| > n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) \le$$
$$\le e^{2(1+\gamma)} \delta C_1^{-1} n^{1/2(3+2\gamma)} e^{-(\alpha/2)n^{1/(3+2\gamma)}} P(\|\tau\| > r),$$

из которой следует (32).

Лемма 7. *Если при некотором* $t > 0$

$$E\exp(t\|g_1(X_1)\|^{1/2}) < \infty,$$

то в области $1 \le r \le \delta n^{1/6}$ *справедливы оценки*

$$\left| P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r \pm n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) - P(\|\tau\| > r) \right| \le$$
$$\le C(1+r) n^{-1/2(3+2\gamma)} P(\|\tau\| > r). \tag{36}$$

Доказательство. Сначала отметим, что

$$P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r + n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) - P(\|\tau\| > r) =$$
$$= P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r + n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) -$$
$$- P(\|\tau\| > r + n^{-1/2(3+2\gamma)}) - P(r \le \|\tau\| \le r + n^{-1/2(3+2\gamma)}), \tag{37}$$

$$P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r - n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) - P(\|\tau\| > r) =$$
$$= P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r - n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) -$$
$$- P(\|\tau\| > r - n^{-1/2(3+2\gamma)}) + P(r - n^{-1/2(3+2\gamma)} \le \|\tau\| \le r).$$

Согласно теореме о больших уклонениях в гильбертовом пространстве [16–20, 21] в области $1 \le r \le \delta n^{1/6}$

$$\left| P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) \right\| > r \pm n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) - P\left(\|\tau\| > r \pm n^{-1/2(3+2\gamma)} \right) \right| \le$$
$$\le C \frac{(1+r)^3}{\sqrt{n}} P\left(\|\tau\| > r - n^{1/2(3+2\gamma)} \right) =$$

$$= C\,\frac{(1+r)^3}{\sqrt{n}}\,\left\{\,P(\|\tau\|>r)+P\left(\,r-n^{-1/2(3+2\gamma)}\le\|\tau\|\le r\,\right)\right\}. \tag{38}$$

В (37) и (38) согласно неравенству (31) с $\varepsilon = n^{-1/2(3+2\gamma)}$ имеем

$$\begin{aligned} &P\left(\,r-n^{-1/2(3+2\gamma)}\le\|\tau\|\le r\,\right)\Big\}\le C_3(1+r)\,n^{-1/2(3+2\gamma)}P(\|\tau\|>r),\\ &P\left(\,r\le\|\tau\|\le r+n^{-1/2(3+2\gamma)}\right)\Big\}\le C_3(1+r)\,n^{-1/2(3+2\gamma)}P(\|\tau\|>r).\end{aligned} \tag{39}$$

Из (37) – (39) вытекает оценка (36).

Из лемм 1, 6 и 7 следует неравенство (14), что и доказывает теорему.

1. *Боровских Ю. В.* Теория U-статистик в гильбертовом пространстве. – Киев, 1986. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.78).
2. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Теория U-статистик. – Киев: Наук. думка, 1989. – 384 с.
3. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Скорость сходимости в центральной предельной теореме для UH-статистик // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1043 – 1050.
4. *Малевич Т. Л., Абдалимов Б.* Вероятности больших уклонений для U-статистик // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – **24**, вып. 1. – С. 215 – 220.
5. *Алешкявичене А. К.* Вероятности больших уклонений для U-статистик и функционалов Мизеса // Там же. – 1990. – **35**, вып. 1. – С. 3 – 14.
6. *Алешкявичене А. К.* О больших уклонениях для M- и L-статистик // Там же. – 1991. – **36**, вып. 4. – С. 774 – 775.
7. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших уклонениях. – Вильнюс: Мокслас, 1989. – 208 с.
8. *Dasgupta R.* On large deviation probability of U-statistics in non i. i. d. case // Sankhya. Ser. A. – 1984. – **46**, № 1. – P. 110 – 116.
9. *Bickel P. Y.* Edgeworth expansions in nonparametric statistics // Ann. Statist. – 1974. – **2**, № 1. – P. 1 – 20.
10. *Vandemaele M.* On large deviation probabilities for U-statistics // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – **27**, вып. 3. – С. 573 – 574.
11. *Vandemaele M., Veraverbeke N.* Cramer type large deviations for linear combinations of order statistics // Ann. Probab. – 1982. – **10**, № 2. – P. 423 – 434.
12. *Vandemaele M., Veraverbeke N.* Cramer type large deviations for studentized U-statistics // Metrika. – 1985. – **32**, № 3–4. – P. 165 – 180.
13. *Hoeffding W.* Probabilities inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. – 1963. – **58**, № 301. – P. 13 – 30.
14. *Rubin H., Sethuraman J.* Probabilities of moderate deviations // Sankhya. Ser. A. – 1965. – **27**, № 2 – 4. – P. 325 – 346.
15. *Ghosh M.* Probabilities of moderate deviations under m-dependence // Can. J. Statist. Sect. A and B. – 1974. – **2**, № 2. – P. 157 – 168.
16. *Залесский Б. А.* Вероятности больших уклонений в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, вып. 4. – С. 650 – 655.
17. *Залесский Б. А.* Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах // Там же. – С. 815 – 817.
18. *Бенткус В. Ю.* О больших уклонениях в банаховых пространствах // Там же. – 1986. – **31**, вып. 4. – С. 710 – 716.
19. *Рачкаускас А.* Вероятности больших уклонений в зонах Линника в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб. – 1988. – **28**, № 3. – С. 520 – 533.
20. *Юринский В. В.* Об асимптотике больших уклонений в гильбертовом пространстве. I, II // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, вып. 1. – С. 78 – 92.
21. *Bentkus V. I., Rackauskas A. I.* On probabilities of large deviations in Banach spaces // Probab. Theory and Relat. Fields. – 1990. – **86**, № 2. – P. 131 – 154.
22. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Мартингальная аппроксимация. – Киев: Наук. думка, 1988. – 248 с.
23. *Burkholder D. L.* Distribution function inequalities for martingales // Ann. Probab. – 1973. – **1**, № 1. – P. 19 – 42.

Получено 18.02.93