

М. Т. Терехин

К теории бифуркаций систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В проблеме зависимости свойств решений дифференциальных уравнений от параметра особое место занимает задача определения условий существования бифуркационного значения параметра. Решению этой задачи посвящена обширная литература. Здесь следует упомянуть работы [1—5].

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, \lambda)x + \varphi(x, \lambda), \quad (1)$$

где $x \in E_n$, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, $f(x, \lambda)$ — $n \times n$ -матрица, $\varphi(x, \lambda)$ — n -мерная функция, E_p — p -мерное векторное пространство.

Символом $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ обозначим непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \alpha, \lambda) = \alpha$.

Пусть $|u| = \max |u_i|$, $u \in E_p$, $D = \{(x, \lambda) : x \in E_n, \lambda \in E_m, |x| \leq \delta_0, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0, \lambda_0 \in E_m\}$, $W(\delta) = \{\alpha : \alpha \in E_n, |\alpha| \leq \delta\}$, $\Lambda(\delta) = \{\lambda : \lambda \in E_m, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0\}$, $\lambda = (\mu, \nu)$, $\mu \in E_k, \nu \in E_s, k + s = m$, $G_s(\delta) = \{\nu : \nu \in E_s, |\nu - \nu_0| \leq \delta\}$, $\lambda_0 = (\mu_0, \nu_0)$, δ_0, δ — некоторые положительные числа.

Далее всюду полагаем, что на множестве D матрица $f(x, \lambda)$ и функция $\varphi(x, \lambda)$ непрерывны, система (1) обладает свойством единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра, $\varphi(0, \lambda_0) = 0$. Но тогда каково бы число $\omega^* > 0$ ни было, существует число $\delta^* \in]0, \delta_0[$ такое, что $\forall \alpha \in W(\delta^*), \forall \lambda \in \Lambda(\delta^*)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) определено на сегменте $[0, \omega^*]$.

Одновременно с системой (1) рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = A(t, \alpha, \lambda) y + A_0(t, \alpha, \lambda), \quad (2)$$

в которой $y \in E_n$, матрица $A(t, \alpha, \lambda)$ и функция $A_0(t, \alpha, \lambda)$ определены соответственно равенствами $A(t, \alpha, \lambda) = f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)$, $A_0(t, \alpha, \lambda) = \varphi(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)$.

Пусть $Y(t, \alpha, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = A(t, \alpha, \lambda) y$ $Y(0, \alpha, \lambda) = E$, E — единичная матрица.

О п р е д е л е н и е. Вектор λ_0 назовем бифуркационным значением параметра λ системы (1), если $\forall \varepsilon > 0$ существуют векторы $\alpha \in E_n, \alpha \neq 0, \lambda \in E_m$ и число $\omega_0 > 0$ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \det [E - Y(\omega_0, 0, \lambda_0)] = 0, x(\cdot, \alpha, \lambda)$ — ω -периодическое решение системы (1), $|\omega - \omega_0| < \varepsilon$ и $\forall t \in [0, \omega]$ выполняется неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1), определенное на сегменте $[0, \omega]$, было ω -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $y(\cdot, \alpha, \lambda), y(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, было ω -периодическим решением системы (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Достаточность. Из свойства единственности решения системы (2) следует, что решения $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ и $y(\cdot, \alpha, \lambda)$ совпадают на множестве $[0, \omega[$. Но тогда в силу непрерывности этих решений на сегменте $[0, \omega]$ справедливо равенство $x(\omega, \alpha, \lambda) = y(\omega, \alpha, \lambda)$. Теорема доказана.

Далее для упрощения записей положим $\lambda_0 = 0$.

Т е о р е м а 2. Пусть $\delta_1 \in]0, \delta_0[$, $\omega_1 > 0$ таковы, что $\forall \alpha \in W(\delta_1), \forall \lambda \in \Lambda(\delta_1)$ решение системы (1) определено на сегменте $[0, \omega_1]$. Тогда, если функции $\mu(\alpha, \nu)$ и $\omega(\alpha, \nu)$ определены и непрерывны на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$, $\mu(0, 0) = 0, \omega(0, 0) = \omega_0, \omega_0 \in]0, \omega_1[$, и при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ ранги матриц $E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)], \{E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]\}, F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]$, где $F(t, \alpha, \lambda) = \int_0^t Y(t, \alpha, \lambda) Y^{-1}(\xi, \alpha, \lambda) A_0(\xi, \alpha, \lambda) d\xi, Y^{-1}(t, \alpha, \lambda)$ — матрица, обратная для матрицы $Y(t, \alpha, \lambda)$, равны r и $r < n$, на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ выполняется неравенство

$$|F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]| \leq \gamma_1 |\alpha| + \gamma_2 |\nu|, \quad (3)$$

γ_1, γ_2 — неотрицательные числа, $\gamma_1 < 1$, то $\lambda = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M_r(\omega_0, 0, 0)$ — минор порядка r матрицы $E - Y(\omega_0, 0, 0)$ и $M_r(\omega_0, 0, 0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра, непрерывности функций $\mu(\alpha, \nu), \omega(\alpha, \nu)$ на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ существует такое число $\delta_2 \in]0, \delta_1[$, что при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ выполняется неравенство $M_r[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)] \neq 0$.

Выберем произвольные $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ и рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\{E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]\} \alpha^* = F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]. \quad (4)$$

Так как при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ ранги основной и расширенной

матриц системы (4) совпадают, ранг основной матрицы равен r и один и тот же минор порядка r основной матрицы отличен от нуля, то в качестве свободных неизвестных системы (4) можно взять одни и те же неизвестные.

Пусть свободными неизвестными будут α_{r+1}^* , α_{r+2}^* , ..., α_n^* . Из неравенства (3) следует, что число $\delta_3 \in]0, \delta_2]$ можно выбрать так, чтобы для любых фиксированных значений $v \in G_s(\delta_3)$ свободных неизвестных, удовлетворяющих условию

$$0 < \max_{1 \leq j \leq n-r} |\alpha_{r+j}^*| \leq \delta_3, \quad (5)$$

решение α^* системы (4) принадлежало множеству $W(\delta_2)$. Следовательно, для любого фиксированного $v \in G_s(\delta_3)$ система (4) определяет непрерывный оператор $\Gamma_v: \alpha \rightarrow \alpha^*$, отображающий множество $W(\delta_2)$ в себя. Тогда по принципу Шаудера на множестве $W(\delta_2)$ оператор Γ_v имеет неподвижную точку $\tilde{\alpha} \in W(\delta_2)$. Из неравенства (5) следует, что $\tilde{\alpha} \neq 0$. По теореме Ix ($\cdot, \tilde{\alpha}, (\mu(\tilde{\alpha}, v), v)$) есть $\omega(\tilde{\alpha}, v)$ -периодическое решение системы при $\lambda = (\mu(\tilde{\alpha}, v), v)$. Поэтому $\lambda = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (1). Теорема доказана.

2. Определим условия существования бифуркационного значения параметра λ системы

$$\dot{x} = C(\lambda)x + \varphi(x, \lambda) + \sigma(\lambda), \quad (6)$$

в которой $C(\lambda)$ — $n \times n$ -матрица, $\varphi(x, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ — вектор функции, λ — параметр.

Теорема 3. Пусть

1) матрица $C(\lambda)$, вектор-функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы на множестве D ;

2) существует такое число $\omega_0 > 0$, что ранг матрицы $E - Y(\omega_0)$ равен r , $r < n$, $r \leq m$, $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = C(0)y$, элементы минора порядка r матрицы $E - Y(0)$, отличного от нуля, принадлежат строкам этой матрицы с номерами i_1, i_2, \dots, i_r ;

3) $\varphi(0, 0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, $\varphi'_x(0, 0)$, $\varphi'_\lambda(0, 0) = 0$ — нулевые матрицы;

4) существует вектор $R_0^*(\lambda)$ размерности не менее, чем $n - r$, образованный из координат вектора $R_0(\lambda) = \sigma(\lambda) S_0^{\omega_0} Y(\omega_0) Y^{-1}(\xi) d\xi$, среди которых имеются все координаты с номерами, отличными от i_1, i_2, \dots, i_r , и существует вектор μ размерности вектора $R_0^*(\lambda)$, образованный из координат вектора λ , такие, что при $\lambda = 0$ $\partial R_0^*(\lambda)/\partial \mu \neq 0$.

Тогда $\lambda = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (6).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\omega^* > \omega_0$ — произвольные, но фиксированные числа. Тогда из условий 1) и 3) теоремы следует, что число $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любых векторов $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (6) определено на промежутке $[0, \omega^*]$ и при любом $t \in [0, \omega^*]$ было выполнено неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.

Пусть $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ — произвольные векторы. Тогда, если положить $\tilde{C}(\lambda) = B(\lambda) + C(0)$, то систему (2) для системы (6) можно записать

в виде $\dot{y} = C(0)y + B(\lambda)x(t, \alpha, \lambda) + \varphi(x(t, \alpha, \lambda), \lambda) + \sigma(\lambda)$. Из условий 3) и 4) следует, что $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что на множестве

$W(\delta) \times G_s(\delta)$, $s = m - k$, k — размерность вектора μ , будет существовать непрерывная функция $\mu(\alpha, v)$, $\mu(0, 0) = 0$, такая, что ранги матриц $E -$

$Y(\omega_0)$, $[E - Y(\omega_0), R(\alpha, v)]$, где $R(\alpha, v) = \int_0^{\omega_0} Y(\omega_0) Y^{-1}(\xi) \times$

$\times [B(\mu(\alpha, v), v)x(\xi, \alpha(\mu(\alpha, v), v)) + \varphi(x(\xi, \alpha, \mu(\alpha, v), v)) + \sigma(\mu(\alpha, v), v))] d\xi$, $\lambda = (\mu, v)$, равны r и выполнено неравенство $|R(\alpha, v)| \leq \leq \gamma_1 |\alpha| + \gamma_2 |v|$, γ_1, γ_2 — неотрицательные числа, $\gamma_1 < 1$. Доказательство теоремы завершается применением теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 позволяет найти условия существования бифуркационного значения параметра λ системы (6) в случаях, когда матрица $C(0)$ имеет как нулевые, так и чисто мнимые собственные числа.

С несущественным изменением могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 и 3, для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра.— Учен. зап. Горьков. ун-та, 1939, 6, с. 3—24.
2. Отроков Н. Ф. Об одном случае рождения предельных циклов.— Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. мат., 1961, 19, № 4, с. 23—44.
3. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы.— Докл. АН СССР, 1937, 14, № 5, с. 247—250.
4. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.— 487 с.
5. Неймарк Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметра.— Докл. АН СССР, 1959, 129, № 4, с. 736—739.

Рязан. пед. ин-т

Поступила 02.02.83

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКОВА ДУМКА» В 1985 г. (I кв.) ВЫЙДЕТ В СВЕТ КНИГА:

Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И. СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. 15 л. 2 р. 70 к.

В монографии приведены приближенные аналитические методы отыскания колебательных решений эволюционных систем дифференциальных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. Для периодических систем обоснованы метод Бубнова—Галеркина отыскания периодических решений эволюционных уравнений, содержащих отклоняющийся аргумент, и численно-аналитический метод. Для систем с условно-периодическими коэффициентами изложена теория возмущения инвариантных тороидальных многообразий, описано поведение решений на и в окрестности тороидальных многообразий систем с запаздыванием, систем разностных уравнений.

Для специалистов, интересующихся колебательными процессами, а также преподавателей и студентов математических факультетов вузов.

Предварительные заказы на эту книгу принимают все магазины книготоргов, магазины «Книга — почтой» и «Академкнига». Просим пользоваться услугами магазинов — опорных пунктов издательства: Дома книги — магазина № 200 (340048, Донецк 48, ул. Артема, 147а), магазина «Книжный мир» (310003, Харьков 3, пл. Советской Украины, 2/2), магазина научно-технической книги № 19 (290006, Львов 6, пл. Рынок, 10), магазина «Техническая книга» (270001, Одесса 1, ул. Ленина, 17) и магазина издательства «Наукова думка» (252001, Киев 1, ул. Кирова, 4).

Магазины во Львове и Киеве высылают книги иногородним заказчикам наложенным платежом.