УДК 517.925

М. Т. Терехин

К теории бифуркаций систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В проблеме зависимости свойств решений дифференциальных уравнений от параметра особое место занимает задача определения условий существования бифуркационного значения параметра. Решению этой задачи посвящена обширная литература. Здесь следует упомянуть работы [1—5].

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, \lambda) x + \varphi(x, \lambda), \tag{1}$$

где $x \in E_n$, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, $f(x, \lambda)$ — $n \times n$-матрица, $\varphi(x, \lambda)$ — n-мерная функция, E_p — p-мерное векторное пространство.

Символом $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ обозначим непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \alpha, \lambda) = \alpha$.

Пусть $|u| = \max_i |u_i|$, $u \in E_p$, $D = \{(x, \lambda): x \in E_n, \lambda \in E_m, |x| \leqslant \delta_0, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0, \lambda_0 \in E_m\}$, $W(\delta) \in \{\alpha: \alpha \in E_n, |\alpha| \leqslant \delta\}$, $\Lambda(\delta) = \{\lambda: \lambda \in E_m, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0\}$, $\lambda = (\mu, \nu)$, $\mu \in E_k$, $\nu \in E_s$, $k + s = m$, $G_s(\delta) = \{\nu: \nu \in E_s, |\nu - \nu_0| \leqslant \delta\}$, $\lambda_0 = (\mu_0, \nu_0)$, δ_0, δ — некоторые положительные числа.

Далее всюду полагаем, что на множестве D матрица $f(x, \lambda)$ и функция $\varphi(x, \lambda)$ непрерывны, система (1) обладает свойством единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра, $\varphi(0, \lambda_0) = 0$. Но тогда каково бы число $\omega^* > 0$ ни было, существует число $\delta^* \in]0, \delta_0[$ такое, что $\forall \alpha \in W(\delta^*)$, $\forall \lambda \in \Lambda(\delta^*)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) определено на сегменте $[0, \omega^*]$.

Одновременно с системой (1) рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = A(t, \alpha, \lambda) y + A_0(t, \alpha, \lambda), \tag{2}$$

в которой $y \in E_n$, матрица $A(t, \alpha, \lambda)$ и функция $A_0(t, \alpha, \lambda)$ определены соответственно равенствами $A(t, \alpha, \lambda) = f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)$, $A_0(t, \alpha, \lambda) = \varphi(x(t \alpha, \lambda), \lambda)$.

Пусть $Y(t, \alpha, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = A(t, \alpha, \lambda) y$ $Y(0, \alpha, \lambda) = E$, E — единичная матрица.

Определение. *Вектор λ_0 назовем бифуркационным значением параметра λ системы* (1), *если $\forall \varepsilon > 0$ существуют векторы $\alpha \in E_n$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in E_m$ и число $\omega_0 > 0$ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$,* $\det [E - Y(\omega_0, 0, \lambda_0)] = 0$, *$x(\cdot, \alpha, \lambda)$ — ω-периодическое решение системы* (1), *$|\omega - \omega_0| < \varepsilon$ и $\forall t \in [0, \omega]$ выполняется неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.*

Теорема 1. *Для того чтобы решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы* (1), *определенное на сегменте* $[0, \omega]$, *было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $y(\cdot, \alpha, \lambda)$, $y(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, было ω-периодическим решением системы* (2).

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Из свойства единственности решения системы (2) следует, что решения $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ и $y(\cdot, \alpha, \lambda)$ совпадают на множестве $[0, \omega[$. Но тогда в силу непрерывности этих решений на сегменте $[0, \omega]$ справедливо равенство $x(\omega, \alpha, \lambda) = y(\omega, \alpha, \lambda)$. Теорема доказана.

Далее для упрощения записей положим $\lambda_0 = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\delta_1 \in]0, \delta_0]$, $\omega_1 > 0$ таковы, что $\forall \alpha \in W(\delta_1)$, $\forall \lambda \in \Lambda(\delta_1)$ решение системы* (1) *определено на сегменте $[0, \omega_1]$. Тогда, если функции $\mu(\alpha, \nu)$ и $\omega(\alpha, \nu)$ определены и непрерывны на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$, $\mu(0, 0) = 0$, $\omega(0, 0) = \omega_0$, $\omega_0 \in]0, \omega_1[$, и при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ ранги матриц $E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]$, $\{E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)], F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]\}$, где $F(t, \alpha, \lambda) = \int_0^t Y(t, \alpha, \lambda) Y^{-1}(\xi, \alpha, \lambda) A_0(\xi, \alpha, \lambda) d\xi$, $Y^{-1}(t, \alpha, \lambda)$ — матрица, обратная для матрицы $Y(t, \alpha, \lambda)$, равны r и $r < n$, на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ выполняется неравенство*

$$|F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]| \leqslant \gamma_1 |\alpha| + \gamma_2 |\nu|, \tag{3}$$

γ_1, γ_2 — неотрицательные числа, $\gamma_1 < 1$, то $\lambda = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (1).

Доказательство. Пусть $M_r(\omega_0, 0, 0)$ — минор порядка r матрицы $E - Y(\omega_0, 0, 0)$ и $M_r(\omega_0, 0, 0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра, непрерывности функций $\mu(\alpha, \nu)$, $\omega(\alpha, \nu)$ на множестве $W(\delta_1) \times G_s(\delta_1)$ существует такое число $\delta_2 \in]0, \delta_1]$, что при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ выполняется неравенство $M_r[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)] \neq 0$.

Выберем произвольные $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ и рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\{E - Y[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]\} \alpha^* = F[\omega(\alpha, \nu), \alpha, (\mu(\alpha, \nu), \nu)]. \tag{4}$$

Так как при любых $(\alpha, \nu) \in W(\delta_2) \times G_s(\delta_2)$ ранги основной и расширенной матриц системы (4) совпадают, ранг основной матрицы равен r и один и тот же минор порядка r основной матрицы отличен от нуля, то в качестве свободных неизвестных системы (4) можно взять одни и те же неизвестные.

Пусть свободными неизвестными будут $\alpha^*_{r+1}, \alpha^*_{r+2}, \ldots, \alpha^*_n$. Из неравенства (3) следует, что число $\delta_3 \in]0, \delta_2]$ можно выбрать так, чтобы для любых фиксированных значений $\nu \in G_s(\delta_3)$ свободных неизвестных, удовлетворяющих условию

$$0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant n-r} |\alpha^*_{r+j}| \leqslant \delta_3, \tag{5}$$

решение α^* системы (4) принадлежало множеству $W(\delta_2)$. Следовательно, для любого фиксированного $\nu \in G_s(\delta_3)$ система (4) определяет непрерывный оператор $\Gamma_\nu : \alpha \to \alpha^*$, отображающий множество $W(\delta_2)$ в себя. Тогда по принципу Шаудера на множестве $W(\delta_2)$ оператор Γ_ν имеет неподвижную точку $\tilde{\alpha} \in W(\delta_2)$. Из неравенства (5) следует, что $\tilde{\alpha} \neq 0$. По теореме 1$x(\cdot, \tilde{\alpha}, (\mu(\tilde{\alpha}, \nu), \nu))$ есть $\omega(\tilde{\alpha}, \nu)$-периодическое решение системы при $\lambda = (\mu(\tilde{\alpha}, \nu), \nu)$. Поэтому $\lambda = 0$—бифуркационное значение параметра λ системы (1). Теорема доказана.

2. Определим условия существования бифуркационного значения параметра λ системы

$$\dot{x} = C(\lambda)x + \varphi(x, \lambda) + \sigma(\lambda), \tag{6}$$

в которой $C(\lambda)$ — $n \times n$-матрица, $\varphi(x, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ — вектор функции, λ — параметр.

Т е о р е м а 3. *Пусть*

1) *матрица $C(\lambda)$, вектор-функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы на множестве D;*

2) *существует такое число $\omega_0 > 0$, что ранг матрицы $E - Y(\omega_0)$ равен r, $r < n$, $r \leqslant m$, $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = C(0)y$, элементы минора порядка r матрицы $E - Y(0)$, отличного от нуля, принадлежат строкам этой матрицы с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$;*

3) $\varphi(0, 0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, $\varphi'_x(0, 0)$, $\varphi'_\lambda(0, 0)$ — *нулевые матрицы;*

4) *существует вектор $R^*_0(\lambda)$ размерности не менее, чем $n - r$, образованный из координат вектора $R_0(\lambda) = \sigma(\lambda) S_0^{\omega_0} Y(\omega_0) Y^{-1}(\xi) d\xi$, среди которых имеются все координаты с номерами, отличными от $i_1, i_2, \ldots, i_r$, и существует вектор μ размерности вектора $R^*_0(\lambda)$, образованный из координат вектора λ, такие, что при $\lambda = 0$ $\partial R^*_0(\lambda)/\partial\mu \neq 0$.*

Тогда $\lambda = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, $\omega^* > \omega_0$ — произвольные, но фиксированные числа. Тогда из условий 1) и 3) теоремы следует, что число $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любых векторов $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (6) определено на промежутке $[0, \omega^*]$ и при любом $t \in [0, \omega^*]$ было выполнено неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.

Пусть $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ — произвольные векторы. Тогда, если положить $C(\lambda) = B(\lambda) + C(0)$, то систему (2) для системы (6) можно записать в виде $\dot{y} = C(0)y + B(\lambda)x(t, \alpha, \lambda) + \varphi(x(t, \alpha, \lambda), \lambda) + \sigma(\lambda)$. Из условий 3) и 4) следует, что $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что на множестве $W(\delta) \times G_s(\delta)$, $s = m - k$, k — размерность вектора μ, будет существовать непрерывная функция $\mu(\alpha, \nu)$, $\mu(0, 0) = 0$, такая, что ранги матриц $E - Y(\omega_0)$, $[E - Y(\omega_0), R(\alpha, \nu)]$, где $R(\alpha, \nu) = \int\limits_0^{\omega_0} Y(\omega_0) \quad Y^{-1}(\xi) \times [B(\mu(\alpha, \nu), \nu)x(\xi, \alpha(\mu(\alpha, \nu), \nu)) + \varphi(x(\xi, \alpha), (\mu(\alpha, \nu), \nu)) + \sigma(\mu(\alpha, \nu), \nu)] d\xi$, $\lambda = (\mu, \nu)$, равны r и выполнено неравенство $|R(\alpha, \nu|) \leqslant \gamma_1|\alpha| + \gamma_2|\nu|$, γ_1, γ_2 — неотрицательные числа, $\gamma_1 < 1$. Доказательство теоремы завершается применением теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 позволяет найти условия существования бифуркационного значения параметра λ системы (6) в случаях, когда матрица $C(0)$ имеет как нулевые, так и чисто мнимые собственные числа.

С несущественным изменением могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 и 3, для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра.— Учен. зап. Горьков. ун-та, 1939, **6**, с. 3—24.
2. *Отроков Н. Ф.* Об одном случае рождения предельных циклов.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1961, **19**, № 4, с. 23—44.
3. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы.— Докл. АН СССР, 1937, **14**, № 5, с. 247—250.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.— 487 с.
5. *Неймарк Ю. И.* О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметра.— Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 4, с. 736—739.

Рязан. пед. ин-т Поступила 02.02.83