УДК 517.926

А. Ю. Колесов (Ярослав. ун-т, Россия),
Н. Х. Розов (Моск. ун-т, Россия)

НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В КОЛЬЦЕВЫХ СИСТЕМАХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ*

We consider special systems of ordinary differential equations, namely, ring systems of unidirectionally coupled oscillators. A new method is developed for the investigation of the problem of the existence and stability of periodic solutions for this class of systems. The specific feature of this approach is the use of certain auxiliary delay systems for the determination of cycles and for the analysis of their properties. The proposed method is illustrated by a specific example.

Розглядаються спеціальні системи звичайних диференціальних рівнянь — так звані кільцеві ланцюжки однонаправлено зв'язаних осциляторів. Для даного класу систем розроблено новий метод дослідження питань існування та стійкості періодичних розв'язків. Характерною особливістю даного підходу є те, що як при відшуканні циклів, так і при аналізі їх властивостей стійкості використано деякі допоміжні системи з загаюванням. Запропонований метод проілюстровано на конкретному прикладі.

1. Общая схема исследования. Кольцевой цепочкой однонаправленно связанных осцилляторов назовем систему вида

$$\dot{x}_j = f(x_j, x_{j-1}), \qquad j = 1, \ldots, m, \quad x_0 = x_m, \tag{1}$$

где $m \geq 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(x, y)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируема по $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Такого рода системы описывают функционирование различных автогенераторов (см. [1, 2], где приведены соответствующие примеры), а также возникают при математическом моделировании в нейродинамике. В частности, к указанному типу уравнений относится известная модель кольцевой нейронной сети Хопфилда.

В дальнейшем будем рассматривать проблемы существования и устойчивости специальных периодических решений системы (1) — так называемых бегущих волн. Точнее говоря, речь будет идти о периодических решениях, допускающих представление

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где $\Delta > 0$ — некоторый фазовый сдвиг.

Для отыскания циклов вида (2) введем в рассмотрение вспомогательное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} = f(x, x(t - \Delta)), \tag{3}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, и будем считать, что на некотором интервале $(\Delta_1, \Delta_2) \subset (0, +\infty)$ изменения параметра Δ оно допускает периодическое решение $x = x_*(t, \Delta)$ периода $T_* = T_*(\Delta) > 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

*Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00384а и № 12-01-00155а).

Лемма 1. *Предположим, что найдется такое натуральное k, при котором уравнение*

$$T_*(\Delta) = m\Delta/k \tag{4}$$

имеет корень $\Delta = \Delta_{(k)} \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Тогда в исходной системе (1) *данному корню соответствует цикл* (*бегущая волна*)

$$C_k \colon x_j = x_{(k)}(t + (j-1)\Delta_{(k)}), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

периода $T_{(k)} = m\Delta_{(k)}/k$, где $x_{(k)}(t) = x_*(t, \Delta)|_{\Delta=\Delta_{(k)}}$.

Для доказательства заметим, что поскольку все функции

$$x_j(t) = x_{(k)}(t + (j-1)\Delta_{(k)}), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

являются решениями одного и того же уравнения (3) при $\Delta = \Delta_{(k)}$, то выполняются равенства

$$\dot{x}_j(t) = f\big(x_j(t), x_j(t - \Delta_{(k)})\big), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Далее, учтем в (7) вытекающие из (6) соотношения

$$x_j(t - \Delta_{(k)}) = x_{j-1}(t), \quad j = 2, \ldots, m;$$

$$x_1(t - \Delta_{(k)}) = x_{(k)}(t - \Delta_{(k)}) = x_{(k)}(t - \Delta_{(k)} + kT_{(k)}) = x_{(k)}(t + (m-1)\Delta_{(k)}) = x_m(t).$$

В результате убеждаемся, что функции (6) удовлетворяют исходной системе (1).

Лемма 1 доказана.

Вопрос об устойчивости цикла (5) сводится, очевидно, к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = A_{(k)}(t + (j-1)\Delta_{(k)})h_j + B_{(k)}(t + (j-1)\Delta_{(k)})h_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

где $h_j = h_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $h_0 = h_m$, а матрицы $A_{(k)}(t)$, $B_{(k)}(t)$ задаются равенствами

$$A_{(k)}(t) = f'_x(x_{(k)}(t), x_{(k)}(t - \Delta_{(k)})), \qquad B_{(k)}(t) = f'_y(x_{(k)}(t), x_{(k)}(t - \Delta_{(k)})). \tag{9}$$

Наряду с (8) в дальнейшем нам понадобится вспомогательное линейное уравнение

$$\dot{h} = A_{(k)}(t)h + \kappa\, B_{(k)}(t)h(t - \Delta_{(k)}), \tag{10}$$

где $h(t) \in \mathbb{C}^n$, κ — произвольный комплексный параметр. Точнее говоря, нас будут интересовать его мультипликаторы $\nu_s(\kappa)$, $s = 1, 2, \ldots$, занумерованные в порядке убывания модулей.

Поясним смысл термина „мультипликатор” применительно к уравнению с запаздыванием (10). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([-\Delta_{(k)}, 0]; \mathbb{C}^n)$ непрерывных при $-\Delta_{(k)} \le t \le 0$ вектор-функций $h^0(t) = (h_1^0(t), \ldots, h_n^0(t))^T$ с нормой

$$\|h^0\|_E = \max_{1 \le l \le n} \max_{-\Delta_{(k)} \le t \le 0} |h_l^0(t)|.$$

Далее, оператором монодромии уравнения (10) назовем линейный ограниченный оператор $V \colon E \to E$, действующий на произвольную функцию $h^0(t) \in E$ по правилу

$$Vh^0 = h(t + m\Delta_{(k)}/k), \qquad -\Delta_{(k)} \le t \le 0, \tag{11}$$

где $h(t)$ — решение уравнения (10) на отрезке времени $0 \le t \le m\Delta_{(k)}/k$ с начальной функцией $h^0(t)$, $-\Delta_{(k)} \le t \le 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m/k \ge 1$ компактен и сам V). Что же касается мультипликаторов уравнения (10), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (11).

Остановимся на вопросе о связи между мультипликаторами систем (8) и (10). Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Каждый мультипликатор ν системы* (8) *допускает представление*

$$\nu = \kappa^{m/k}, \tag{12}$$

где κ — корень одного из уравнений

$$[\nu_s(\kappa)]^k = \kappa^m, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

И обратно, если при некотором $s = s_0$ уравнение (13) *имеет корень $\kappa = \kappa_0 \ne 0$, то у исходной системы* (8) *существует мультипликатор $\nu = \nu_{s_0}(\kappa_0)$.*

Доказательство. Зафиксируем любой мультипликатор $\nu = \rho \exp(i\varphi)$, $\rho > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, системы (8) и предположим, что он является простым. В этом случае ему соответствует единственное (с точностью до множителя) решение Ляпунова – Флоке вида

$$h_j = \exp(\alpha t) h_{*,j}(t), \qquad h_{*,j}(t) \in \mathbb{C}^n, \qquad h_{*,j}(t + m\Delta_{(k)}/k) \equiv h_{j,*}(t), \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\alpha = \frac{k}{m\Delta_{(k)}}(\ln\rho + i\varphi). \tag{14}$$

Отметим, далее, что поскольку система (8) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta_{(k)} \to t, \qquad h_{j-1} \to h_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

то под действием этих замен решение (14) (в силу его единственности) перейдет в решение

$$h_j = \lambda \cdot \exp(\alpha(t + \Delta_{(k)})) h_{*,j}(t), \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $\lambda \ne 0$ — некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_*(t + \Delta_{(k)}) = \lambda\, h_*(t), \tag{16}$$

где $h_*(t) = \text{colon}\,(h_{*,1}(t), \ldots, h_{*,m}(t))$, а элементами квадратной nm-мерной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I \\ I & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}$$

являются нулевые и единичные матрицы размера $n \times n$.

Из установленного выше соотношения (16) следует, что

$$h_{*,m-j}(t) = \lambda^{j+1} h_{*,1}(t-(j+1)\Delta_{(k)}), \qquad j = 0, 1, \ldots, m-2, \quad \lambda^m = 1. \tag{17}$$

Что же касается компоненты $h_{*,1}(t)$, то в силу (8) она является решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{h} = -\alpha\, h + A_{(k)}(t)h + B_{(k)}(t)h_{*,m}(t).$$

А так как функция $h_{*,m}(t)$, в свою очередь, выражается через $h_{*,1}(t)$ посредством равенства $h_{*,m}(t) = \lambda \cdot h_{*,1}(t-\Delta_{(k)})$ (см. (17)), то компонента $h_{*,1}(t)$ удовлетворяет также и уравнению с запаздыванием

$$\dot{h} = -\alpha\, h + A_{(k)}(t)h + \lambda\, B_{(k)}(t)h(t-\Delta_{(k)}). \tag{18}$$

Выполненные построения показывают, что уравнение (18) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем, далее, в этом уравнении замену $\exp{(\alpha t)}h \to h$. В результате единичный мультипликатор перейдет в $\exp(m\alpha\Delta_{(k)}/k)$, а само уравнение (18) — в уравнение (10) при $\kappa = \lambda \cdot \exp{(\alpha\Delta_{(k)})}$. Таким образом, с необходимостью найдется номер s, для которого

$$\nu_s(\kappa)|_{\kappa=\lambda\cdot\exp{(\alpha\Delta_{(k)})}} = \exp(m\alpha\Delta_{(k)}/k) = \nu.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\nu^k = \kappa^m$ следуют соотношения (12), (13).

В случае, когда мультипликатор ν кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору соответствует ровно p линейно независимых решений Ляпунова – Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\alpha t)H(t)$, где столбцами матрицы $H(t)$ размера $mn \times p$ являются линейно независимые $T_{(k)}$-периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (8) под действием замен (15) здесь вместо (16) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t+\Delta_{(k)}) = H(t)D \tag{19}$$

с некоторой невырожденной постоянной матрицей D размера $p \times p$.

Свойство (19) позволяет свести проблему обоснования формул (12), (13) к предыдущему случаю. Для того чтобы сделать это, зафиксируем некоторое собственное значение λ матрицы D, а через e обозначим соответствующий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_*(t) = H(t)e$ справедливо соотношение (16). Последующие же рассуждения совпадают с изложенными выше.

Итак, мы установили, что любой мультипликатор ν системы (8) может быть представлен в виде (12), где κ удовлетворяет одному из уравнений (13). Убедимся теперь в справедливости обратного утверждения. В связи с этим предположим, что уравнение (13) с номером $s = s_0$ допускает корень $\kappa = \kappa_0 \neq 0$. Тогда уравнение

$$\dot{h} = -\alpha\, h + A_{(k)}(t)h + \kappa_0 \exp{(-\alpha\Delta_{(k)})} B_{(k)}(t)h(t-\Delta_{(k)}) \tag{20}$$

при

$$\alpha = \frac{k}{m\Delta_{(k)}}(\ln(\rho_0) + i\varphi_0), \qquad \rho_0 > 0, \quad 0 \le \varphi_0 < 2\pi, \tag{21}$$

где $\rho_0 \exp(i\varphi_0) = \nu_{s_0}(\kappa_0)$, имеет нетривиальное $T_{(k)}$-периодическое решение $\widetilde{h}(t)$. Далее, введем в рассмотрение величину

$$\lambda = \kappa_0 \exp(-\alpha\Delta_{(k)}) \tag{22}$$

и заметим, что в силу (21) и соотношения $\kappa_0^m = [\nu_{s_0}(\kappa_0)]^k$ указанное значение параметра λ удовлетворяет требуемому равенству $\lambda^m = 1$ (см. (17)). Отсюда, в свою очередь, следует, что при выбранном λ уравнения (20) и (18) совпадают.

На заключительном этапе доказательства введем в рассмотрение функцию $h_{*,1}(t) = \widetilde{h}(t)$, а остальные компоненты $h_{*,j}(t)$, $j = 2, \ldots, m$, определим посредством равенств (17), (22). Из установленной выше связи между уравнениями (20) и (18) следует, что в итоге получится решение Ляпунова – Флоке вида (14) исходной системы (8), соответствующее мультипликатору

$$\nu = \exp\left(m\alpha\Delta_{(k)}/k\right) = \nu_{s_0}(\kappa_0).$$

Лемма 2 доказана.

Установленные леммы доставляют некую общую методику исследования периодических решений типа бегущих волн в кольцевых системах (1). Действительно, вопрос о существовании циклов вида (2) сводится к отысканию цикла $x_*(t, \Delta)$ вспомогательного уравнения с запаздыванием (3) и к нахождению корней уравнений (4). Что же касается вопроса об устойчивости бегущих волн, то он решается отдельно и в силу леммы 2 состоит в анализе расположения корней уравнений (13). Следует также отметить, что хотя количество уравнений в системе (13), вообще говоря, счетно, совокупность всех их ненулевых корней заведомо конечна (в противном случае конечномерная система (8) имела бы счетное число различных мультипликаторов, что невозможно).

Достаточно ясно, что проблемы анализа вспомогательных уравнений (3), (10), лежащих в основе описанной выше методики, в общем случае нелокальны. Но, тем не менее, в некоторых ситуациях, когда есть возможность применить какие-либо асимптотические методы, с указанными проблемами удается справиться. Именно такая ситуация реализуется в рассматриваемом ниже примере.

2. Простейшая кольцевая система. В данном пункте опишем некоторый специальный класс кольцевых цепочек (1), состоящих из одномерных звеньев. А именно, введем в рассмотрение систему

$$\dot{x}_j = f(x_j, x_{j-1}/\varepsilon), \qquad j = 1, \ldots, m, \quad x_0 = x_m, \tag{23}$$

где $m \ge 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Что же касается скалярной функции $f(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, то для нее считаем выполненным следующее ограничение.

***Условие* 1.** *Равномерно по x из любого замкнутого и ограниченного множества имеют место асимптотические равенства*

$$f(x,u) = a_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l(x)}{u^l} \qquad \textit{при} \quad u \to -\infty,$$
$$f(x,u) = b_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l(x)}{u^l} \qquad \textit{при} \quad u \to +\infty. \tag{24}$$

Предполагаем также, что представления (24) *остаются в силе при дифференцировании по* x, u *в любом порядке и любое число раз.*

Сформулируем теперь ряд дополнительных ограничений, которым должны удовлетворять функции $a_0(x)$, $b_0(x)$ из (24).

***Условие* 2.** *Справедливы требования*:

$$a_0(x) > 0 \quad \textit{при} \quad -\infty < x < q_1, \qquad a_0(x) < 0 \quad \textit{при} \quad q_1 < x < +\infty, \qquad a_0(q_1) = 0;$$
$$b_0(x) > 0 \quad \textit{при} \quad -\infty < x < -q_2, \qquad b_0(x) < 0 \quad \textit{при} \quad -q_2 < x < +\infty, \qquad b_0(-q_2) = 0, \tag{25}$$

где q_1, q_2 *— некоторые положительные постоянные.*

Для описания дальнейших ограничений нам понадобятся функции $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, являющиеся решениями задач Коши $\dot{x} = a_0(x), x(0) = 0$ и $\dot{x} = b_0(x), x(0) = 0$ соответственно. Из соотношений (25) следует, что $\theta_1(t) \nearrow q_1$, $\theta_2(t) \searrow -q_2$ при $t \to +\infty$.

***Условие* 3.** *Считаем, что*

$$\frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} + \frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))} > -a - 1/a \quad \forall\, \Delta > 0, \tag{26}$$

где $a = -b_0(0)/a_0(0) > 0$.

***Условие* 4.** *Предполагаем, что для любого* $z \in (0, a + 1/a)$ *уравнение*

$$z + \frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} + \frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))} = 0 \tag{27}$$

имеет на полуоси $\Delta \in (0, +\infty)$ *единственное решение* $\Delta = \Delta_*(z) > 0$.

Заметим, что в класс систем (23) входит известная математическая модель кольцевой нейронной сети Хопфилда. Напомним, что системой Хопфилда принято называть предложенную в [3] систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_j = -\mu_j u_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i(u_i) + I_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{28}$$

описывающую функционирование простейшей нейронной сети. Здесь $u_j(t)$ — мембранные потенциалы нейронов, $\mu_j = \text{const} > 0$ — коэффициенты затухания за счет токов утечки, $a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}$ — синаптические веса, $I_j = \text{const} \in \mathbb{R}$ — внешние токи смещения, а гладкие функции $f_j(u), u \in \mathbb{R}$, представляющие собой вольт-амперные характеристики нелинейных элементов, таковы, что

$$\lim_{u \to -\infty} f_j(u) = 0, \qquad \lim_{u \to +\infty} f_j(u) = 1. \tag{29}$$

Достаточно подробное описание свойств этой системы, а также ее вывод можно найти в монографии [4].

Рассмотрим, далее, кольцевую систему

$$\dot{u}_j = -\mu\, u_j + \lambda[1 - (a+1)f(u_{j-1})], \qquad j = 1, \ldots, m, \quad u_0 = u_m, \tag{30}$$

являющуюся частным случаем системы (28). Здесь $\mu, a = \mathrm{const} > 0$, параметр $\lambda > 0$ предполагается большим (с биофизической точки зрения это означает, что электрические процессы в нейронной сети происходят быстро), а для скалярной нелинейности $f(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ в соответствии с требованиями (29) считаем выполненными асимптотические равенства

$$f(u) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^-}{u^l} \quad \text{при} \quad u \to -\infty, \qquad f(u) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^+}{u^l} \quad \text{при} \quad u \to +\infty. \tag{31}$$

Предполагаем также, что, как и в случае (24), представления (31) остаются в силе при дифференцировании по u любое число раз. Типичными представителями таких функций являются

$$f(u) = (\operatorname{arctg} u + \pi/2)/\pi, \qquad f(u) = (u/\sqrt{u^2+1} + 1)/2, \qquad f(u) = 1/(1 + \exp(-u))$$

(в последнем случае все коэффициенты $c_l^\pm$, $l \geq 1$, равны нулю).

Нетрудно убедиться, что система

$$\dot{x}_j = -\mu\, x_j + 1 - (a+1)f(x_{j-1}/\varepsilon), \qquad j = 1, \ldots, m, \quad x_0 = x_m, \tag{32}$$

получающаяся из (30) после замен $u_j = \lambda\, x_j$, $j = 1, \ldots, m$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, принадлежит введенному выше классу уравнений. Действительно, в случае (32) имеем

$$\begin{gathered} f(x,u) = -\mu\, x + 1 - (a+1)f(u), \qquad a_0(x) = -\mu\, x + 1, \qquad b_0(x) = -\mu\, x - a, \\ \theta_1(t) = \theta(t), \qquad \theta_2(t) = -a\,\theta(t), \qquad \theta(t) = (1 - \exp(-\mu t))/\mu. \end{gathered} \tag{33}$$

Что же касается требуемых условий 1 – 4, то они для функций (33) заведомо выполняются (соответствующую несложную проверку опустим).

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы на простейшем примере системы (23) наглядно проиллюстрировать эффективность предложенных нами новых методов исследования периодических решений типа бегущих волн.

3. Анализ вспомогательных уравнений. Обратимся сначала к вспомогательному уравнению (3), которое в случае системы (23) имеет вид

$$\dot{x} = f(x, x(t-\Delta)/\varepsilon). \tag{34}$$

Ниже будет установлено, что при любом фиксированном значении запаздывания $\Delta > 0$ и при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ это уравнение имеет экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл.

Исследование уравнения (34) существенно облегчает тот факт, что при $\varepsilon \to 0$ оно допускает предельный объект. Действительно, опираясь на свойства (24) функции $f(x,u)$, замечаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x, u/\varepsilon) = F(x, u) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} a_0(x) & \text{при} \quad u < 0, \\ b_0(x) & \text{при} \quad u > 0. \end{cases} \tag{35}$$

Учитывая затем соотношение (35) в (34), убеждаемся, что при $\varepsilon \to 0$ уравнение (34) переходит в релейное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} = F(x, x(t - \Delta)). \tag{36}$$

Как и в работах [5 – 7], понятие решения уравнения (36) определим конструктивно. В связи с этим зафиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на σ_0 будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \qquad \varphi(t) < 0 \quad \forall\, t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \qquad \varphi(-\sigma_0) = \theta_1(-\sigma_0) \tag{37}$$

(по поводу определения $\theta_1(t)$ см. п. 2) и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (36) с произвольной начальной функцией (37).

Рассмотрим сначала отрезок $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$ и заметим, что при указанных t выполняется неравенство $\varphi(t - \Delta) < 0$. Поэтому на данном промежутке времени в силу вытекающего из (35) соотношения $F(x, \varphi(t - \Delta)) = a_0(x)$ решение $x_\varphi(t)$ совпадает с решением задачи Коши

$$\dot{x} = a_0(x), \qquad x|_{t=-\sigma_0} = \theta_1(-\sigma_0) \tag{38}$$

и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = \theta_1(t). \tag{39}$$

Ясно также, что формула (39) справедлива до тех пор, пока $x_\varphi(t - \Delta) < 0$. Тем самым она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leq t < \Delta$ (см. рисунок).

При $t = \Delta$ первый раз происходит переключение и при $t \geq \Delta$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши

$$\dot{x} = b_0(x), \qquad x|_{t=\Delta} = \theta_1(\Delta), \tag{40}$$

т. е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = \theta_2(t - t_0), \tag{41}$$

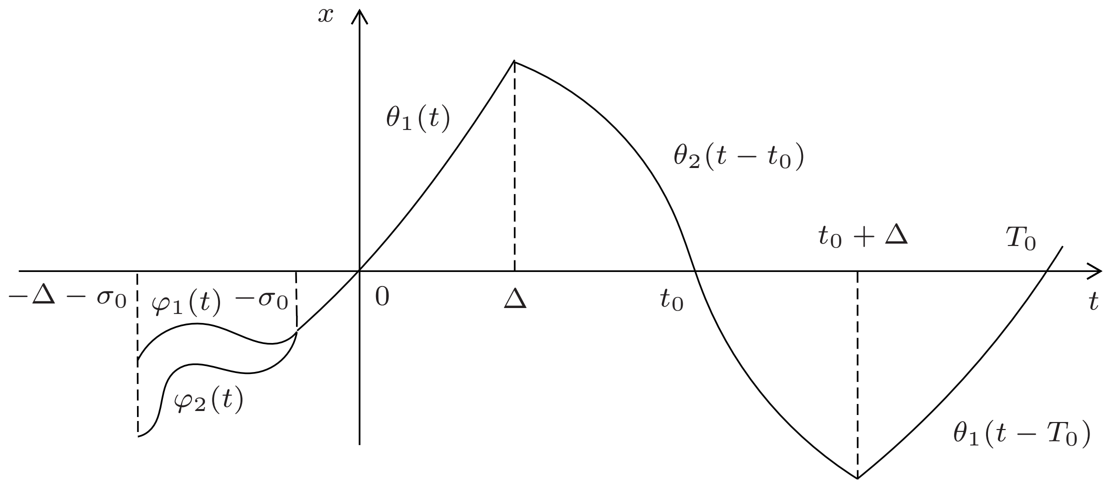
где

$$t_0 = \Delta - \int\limits_0^{\theta_1(\Delta)} \frac{ds}{b_0(s)} > \Delta. \tag{42}$$

В свою очередь, соотношения (40), (41) остаются в силе, пока $x_\varphi(t - \Delta) > 0$, т. е. до очередного момента переключения $t = t_0 + \Delta$.

При $t \geq t_0 + \Delta$ имеем дело с аналогичной (38) задачей Коши

$$\dot{x} = a_0(x), \qquad x|_{t=t_0+\Delta} = \theta_2(\Delta), \tag{43}$$



а значит, справедливо аналогичное (39) равенство

$$x_\varphi(t) = \theta_1(t - T_0), \tag{44}$$

где

$$T_0 = t_0 + \Delta + \int\limits_{\theta_2(\Delta)}^{0} \frac{ds}{a_0(s)} > t_0 + \Delta. \tag{45}$$

Что же касается соотношений (43), (44), то они сохраняют силу при априорном условии $x_\varphi(t - \Delta) < 0$, т. е. до следующего момента переключения $t = T_0 + \Delta$.

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (37)). Из приведенных выше построений следует, что при условии $\sigma_0 < T_0 - t_0 - \Delta$, которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-\Delta - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0$, принадлежит введенному ранее множеству (37). А это значит, что на промежутках времени

$$lT_0 - \sigma_0 \le t \le (l+1)T_0 - \sigma_0, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

весь описанный процесс нахождения $x_\varphi(t)$ циклически повторяется. Следовательно, при всех $t \ge -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (37) совпадает с одной и той же T_0-периодической функцией $x_0(t)$ (см. рисунок), для которой в силу (39) – (45) справедливы равенства

$$x_0(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & \text{при} \quad 0 \le t \le \Delta, \\ \theta_2(t - t_0) & \text{при} \quad \Delta \le t \le t_0 + \Delta, \\ \theta_1(t - T_0) & \text{при} \quad t_0 + \Delta \le t \le T_0. \end{cases} \tag{46}$$

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (34) и (36). Из общих результатов статьи [5] о C^1-близости траекторий релейной и релаксационной систем вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует такое достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *уравнение* (34) *имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл* $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \equiv \theta_1(-\sigma_0)$, *периода* $T_*(\varepsilon)$. *Для этого цикла справедливы асимптотические равенства*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)-\sigma_0} |x_*(t,\varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \qquad T_*(\varepsilon) = T_0 + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)),$$
$$\max_{t \in \Sigma} |\dot{x}_*(t,\varepsilon) - \dot{x}_0(t)| = O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{47}$$

где множество Σ *представляет собой отрезок* $[-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ *с выброшенными интервалами* $(\Delta - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \sqrt{\varepsilon}\,)$, $\big(t_0 + \Delta - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + \Delta + \sqrt{\varepsilon}\,\big)$.

Обратимся теперь к аналогичному (10) вспомогательному линейному уравнению

$$\dot{h} = A(t,\varepsilon)h + \kappa\, B(t,\varepsilon)h(t - \Delta) \tag{48}$$

с произвольно фиксированным запаздыванием $\Delta > 0$. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$, κ — комплексный параметр, а коэффициенты $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, являющиеся аналогами $A_{(k)}(t)$, $B_{(k)}(t)$ из (9), заданы равенствами

$$A(t,\varepsilon) = f'_x(x_*(t,\varepsilon), x_*(t-\Delta,\varepsilon)/\varepsilon), \qquad B(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\, f'_u(x_*(t,\varepsilon), x_*(t-\Delta,\varepsilon)/\varepsilon), \tag{49}$$

где $x_*(t,\varepsilon)$ — периодическое решение уравнения (34), доставляемое теоремой 1.

В связи с леммой 2 актуален вопрос об асимптотическом поведении при $\varepsilon \to 0$ мультипликаторов уравнения (48). Для его решения нам потребуются два вспомогательных утверждения. В первом из них речь идет о необходимых в дальнейшем свойствах коэффициентов (49).

Лемма 3. *Найдутся такое достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$ *и такие не зависящие от* ε *постоянные* M_1, M_2, $M_3 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *выполняются неравенства*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)-\sigma_0} |A(t,\varepsilon)| \leq M_1, \qquad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta-\sigma_0} |B(t,\varepsilon)| \leq M_2\varepsilon, \qquad \int\limits_{\Sigma} |B(t,\varepsilon)|dt \leq M_3\sqrt{\varepsilon}, \tag{50}$$

где Σ *— множество из* (47). *Кроме этого, справедливы асимптотические формулы*

$$\int\limits_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} B(t,\varepsilon)dt = \frac{b_0(\theta_1(\Delta)) - a_0(\theta_1(\Delta))}{a_0(0)} + O(\sqrt{\varepsilon}\,),$$
$$\int\limits_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} |B(t,\varepsilon)|dt = \frac{1}{a_0(0)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'_u(\theta_1(\Delta), u)|du + O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{51}$$

$$\int\limits_{t_0+\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+\Delta+\sqrt{\varepsilon}} B(t,\varepsilon)dt = \frac{a_0(\theta_2(\Delta)) - b_0(\theta_2(\Delta))}{b_0(0)} + O(\sqrt{\varepsilon}\,),$$

$$\int\limits_{t_0+\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+\Delta+\sqrt{\varepsilon}} |B(t,\varepsilon)|dt = \frac{1}{|b_0(0)|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'_u(\theta_2(\Delta),u)|du + O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{52}$$

где t_0 — *момент времени* (42).

Доказательство. Из свойств (24) функции $f(x,u)$ последовательно выводим

$$|f'_u(x,u)| + |f''_{xu}(x,u)| \le \frac{M}{1+u^2}, \quad |f'_x(x,u)| \le M,$$

$$|f''_{uu}(x,u)| \le \frac{M}{1+|u|^3} \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in K,$$

$$|f'_u(x_1,u_1) - f'_u(x_2,u_2)| \le M\left(\frac{|u_1-u_2|}{1+\min\,(|u_1|^3,|u_2|^3)} + \frac{|x_1-x_2|}{1+\min\,(u_1^2,u_2^2)}\right) \tag{53}$$

$$\forall\, u_1,u_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x_1,x_2 \in K,$$

где $K \subset \mathbb{R}$ — произвольно фиксированный компакт, а одной и той же буквой M здесь и ниже обозначены различные универсальные (зависящие, быть может, только от Δ и K) положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Далее, объединяя оценки на f'_x, f'_u из (53) с асимптотическими свойствами периодического решения $x_*(t,\varepsilon)$ (см. (47)), заключаем, что

$$|A(t,\varepsilon)| \le M \qquad \text{при} \quad t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0],$$

$$|B(t,\varepsilon)| \le \frac{M}{\varepsilon}\left(\frac{1}{1+(t-\Delta)^2/\varepsilon^2} + \frac{1}{1+(t-t_0-\Delta)^2/\varepsilon^2}\right) \qquad \text{при} \quad t \in \Sigma.$$

Отсюда требуемые неравенства (50) вытекают очевидным образом.

Обратимся теперь к асимптотическим соотношениям (51), (52) и докажем, к примеру, первые два из них. С этой целью перейдем на промежутке $\Delta - \sqrt{\varepsilon} \le t \le \Delta + \sqrt{\varepsilon}$ к переменной τ по формуле $\tau = (t - \tau_* - \Delta)/\varepsilon$, где τ_* — корень уравнения $x_*(t,\varepsilon) = 0$ из отрезка $-\sigma_0 \le t \le \Delta - \sqrt{\varepsilon}$. Используя вытекающие из (46), (47) формулы

$$x_*(t,\varepsilon) = \theta_1(t) + O(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)), \qquad \dot{x}_*(t,\varepsilon) = a_0(\theta_1(t)) + O(\sqrt{\varepsilon}\,), \quad -\sigma_0 \le t \le \Delta - \sqrt{\varepsilon}, \tag{54}$$

убеждаемся, что корень τ_* определяется однозначно и допускает асимптотическое представление

$$\tau_* = O(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)). \tag{55}$$

Что же касается переменной τ, то она меняется на отрезке $[\gamma_-(\varepsilon), \gamma_+(\varepsilon)]$, где в силу равенства (55)

$$\gamma_{\pm}(\varepsilon) = \pm 1/\sqrt{\varepsilon} - \tau_*/\varepsilon = \pm 1/\sqrt{\varepsilon} + O(\ln(1/\varepsilon)). \tag{56}$$

После перехода к новому времени τ для функции

$$x_*(t-\Delta,\varepsilon)/\varepsilon = x_*(\tau_* + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$$

с учетом равенства $x_*(\tau_*,\varepsilon) = 0$ получаем представление

$$x_*(\tau_* + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = \dot{x}_*(\tau_* + \varepsilon\overline{\tau}, \varepsilon)\tau, \tag{57}$$

где значение $\overline{\tau}$ таково, что $|\overline{\tau}| \le |\tau|$. Учитывая, далее, в (57) асимптотические формулы (54)–(56) и очевидную оценку

$$|\overline{\tau}| \le \max(|\gamma_-(\varepsilon)|, |\gamma_+(\varepsilon)|) \le 1/\sqrt{\varepsilon} + |\tau_*|/\varepsilon = 1/\sqrt{\varepsilon} + O(\ln(1/\varepsilon)),$$

приходим к выводу, что

$$x_*(\tau_* + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = a_0(0)(1 + O(\sqrt{\varepsilon}\,))\tau, \tag{58}$$

где остаток равномерен по $\tau \in [\gamma_-(\varepsilon), \gamma_+(\varepsilon)]$.

На заключительном этапе воспользуемся последним неравенством (53) и соотношениями (47), (58), из которых следует, что

$$|f'_u(x_*(\tau_* + \Delta + \varepsilon\tau, \varepsilon), x_*(\tau_* + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon) - f'_u(\theta_1(\Delta), a_0(0)\tau)| \le$$

$$\le M\left(\frac{|\tau|\sqrt{\varepsilon}}{1+|\tau|^3} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\tau^2}\right) \quad \forall\,\tau \in [\gamma_-(\varepsilon), \gamma_+(\varepsilon)]. \tag{59}$$

Применим затем оценку (59) непосредственно к вычислению интегралов из (51). В результате убеждаемся, что

$$\int\limits_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} B(t,\varepsilon)dt = \int\limits_{\gamma_-(\varepsilon)}^{\gamma_+(\varepsilon)} f'_u(\theta_1(\Delta), a_0(0)\tau)d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}\,) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_u(\theta_1(\Delta), a_0(0)\tau)d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}\,) =$$

$$= \frac{1}{a_0(0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_u(\theta_1(\Delta), u)du + O(\sqrt{\varepsilon}\,) = \frac{b_0(\theta_1(\Delta)) - a_0(\theta_1(\Delta))}{a_0(0)} + O(\sqrt{\varepsilon}\,),$$

$$\int\limits_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} |B(t,\varepsilon)|dt = \int\limits_{\gamma_-(\varepsilon)}^{\gamma_+(\varepsilon)} |f'_u(\theta_1(\Delta), a_0(0)\tau)|d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}\,) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'_u(\theta_1(\Delta), a_0(0)\tau)|d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}\,) = \frac{1}{a_0(0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'_u(\theta_1(\Delta), u)|du + O(\sqrt{\varepsilon}\,).$$

Лемма 3 доказана.

Перед формулировкой следующего утверждения введем в рассмотрение банахово пространство C_0 непрерывных на отрезке $-\Delta-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ комплекснозначных функций $h_0(t)$, $h_0(-\sigma_0)=0$ с нормой $\|h_0\| = \max_{-\Delta-\sigma_0\le t\le -\sigma_0}|h_0(t)|$. Обозначим, далее, через $h(t,\varepsilon)$, $t \ge \ge -\sigma_0$, решение уравнения (48) с произвольным начальным условием $h_0(t)$, $-\Delta-\sigma_0 \le \le t \le -\sigma_0$, из пространства C_0.

Лемма 4. *Для каждого* $r>0$ *можно указать такие постоянные* $M=M(r)>0$, $\varepsilon_0=\varepsilon_0(r)>0$, *что при всех значениях* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\kappa\in S(r)\overset{\mathrm{df}}{=}\{\kappa\in\mathbb{C}\colon |\kappa|\le r\}$ *и при* $h_0\in C_0$ *имеет место оценка*

$$\max_{-\sigma_0\le t\le T_*(\varepsilon)-\sigma_0}|h(t,\varepsilon)| \le M\varepsilon\,\|h_0\|. \tag{60}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно положительное r и будем считать, что $\kappa \in \in S(r)$. Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0\le t\le \Delta-\sigma_0$, на котором для коэффициентов $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ справедливы соответствующие оценки (50). Учитывая эти оценки в явной формуле

$$h(t,\varepsilon)=\kappa\int\limits_{-\sigma_0}^{t}\exp\left(\int\limits_{s}^{t}A(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right)B(s,\varepsilon)h_0(s-\Delta)ds, \quad -\sigma_0\le t\le\Delta-\sigma_0,$$

приходим к выводу, что

$$\max_t|h(t,\varepsilon)|\le M\varepsilon\,\|h_0\|, \qquad M=\text{const}>0. \tag{61}$$

Для распространения оценки (61) на оставшийся отрезок $[\Delta-\sigma_0, T_*(\varepsilon)-\sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем данный промежуток на отрезки времени $[\Delta-\sigma_0+l\Delta, 2\Delta-\sigma_0+l\Delta]$, $l=0,1,\ldots,l_0$, и $[2\Delta-\sigma_0+l_0\Delta, T_*(\varepsilon)-\sigma_0]$, где $l_0=\lfloor (T_*(\varepsilon)-2\Delta)/\Delta\rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ — целая часть. Используя, далее, свойство интегральной ограниченности

$$\int\limits_{-\sigma_0}^{T_*(\varepsilon)-\sigma_0}(|A(t,\varepsilon)|+|B(t,\varepsilon)|)dt\le M, \quad M=\text{const}>0,$$

имеющее место в силу (50) – (52), замечаем, что из неравенства

$$|h(t,\varepsilon)|\le|h(\Delta-\sigma_0+l\Delta,\varepsilon)|\exp\left(\int\limits_{\Delta-\sigma_0+l\Delta}^{t}|A(s,\varepsilon)|ds\right)+$$

$$+r\int\limits_{\Delta-\sigma_0+l\Delta}^{t}\exp\left(\int\limits_{s}^{t}|A(\sigma,\varepsilon)|d\sigma\right)|B(s,\varepsilon)|\cdot|h(s-\Delta,\varepsilon)|ds, \quad t\ge\Delta-\sigma_0+l\Delta,$$

и из полученной оценки вида (61) на $(l-1)$-м отрезке вытекает требуемая оценка на l-м отрезке изменения t.

Лемма 4 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к интересующему нас вопросу об асимптотическом вычислении мультипликаторов уравнения (48). С этой целью введем в рассмотрение оператор монодромии $W(\varepsilon)$ данного уравнения, действующий в пространстве $C[-\Delta-\sigma_0,-\sigma_0]$ (над полем комплексных чисел) по правилу

$$W(\varepsilon)h_0 = h(t+T_*(\varepsilon),\varepsilon), \qquad -\Delta-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0, \tag{62}$$

где $h(t,\varepsilon)$, $t \ge -\sigma_0$, — решение уравнения (48) с произвольной начальной функцией $h_0(t) \in \in C[-\Delta-\sigma_0,-\sigma_0]$, а $T_*(\varepsilon)$ — период цикла $x_*(t,\varepsilon)$. Далее, обозначим через $\nu_s(\kappa,\varepsilon)$, $s\in\mathbb{N}$, собственные значения оператора (62), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $r>0$ найдутся такие $\varepsilon_0=\varepsilon_0(r)>0$, $M=M(r)>0$, что при всех $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\kappa\in S(r)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{s\ge 2}|\nu_s(\kappa,\varepsilon)| \le M\sqrt{\varepsilon}. \tag{63}$$

Что же касается мультипликатора $\nu_1(\kappa,\varepsilon)$, то он допускает равномерное по параметру $\kappa\in S(r)$ асимптотическое представление

$$\nu_1(\kappa,\varepsilon) = (1+\beta_1(\kappa-1))(1+\beta_2(\kappa-1)) + O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{64}$$

где

$$\beta_1 = 1-\frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} > 1, \qquad \beta_2 = 1-\frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))} > 1. \tag{65}$$

Доказательство. Как и при обосновании леммы 4, зафиксируем произвольно $r>0$ и будем считать, что комплексный параметр κ пробегает шар $S(r)$. Далее, введем в рассмотрение конечномерный оператор

$$\widetilde{W}(\varepsilon)h_0 = h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t+T_*(\varepsilon),\varepsilon), \qquad -\Delta-\sigma_0\le t\le-\sigma_0, \tag{66}$$

где $\widetilde{h}(t,\varepsilon)$ — решение уравнения (48) на отрезке $-\sigma_0\le t\le T_*(\varepsilon)-\sigma_0$ с начальной функцией $\widetilde{h}\equiv 1$, $-\Delta-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (62) и (66). С этой целью рассмотрим функцию

$$h(t,\varepsilon) - h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t,\varepsilon) \tag{67}$$

и заметим, что при $t\in[-\sigma_0,T_*(\varepsilon)-\sigma_0]$ она также является решением уравнения (48), а при $t=-\sigma_0$ обращается в нуль. Тем самым мы вправе применить к (67) оценку (60). Из упомянутой оценки следует, что

$$\|W(\varepsilon)-\widetilde{W}(\varepsilon)\|_{C[-\Delta-\sigma_0,-\sigma_0]\to C[-\Delta-\sigma_0,-\sigma_0]} \le M\varepsilon, \tag{68}$$

где универсальная константа $M>0$ зависит лишь от выбора r.

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (66). Нетрудно видеть, что его спектр состоит из двух точек — собственного значения $\nu=\nu_*(\kappa,\varepsilon)\overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=}\widetilde{h}(T_*(\varepsilon)-\sigma_0,\varepsilon)$ (в общем случае простого) и собственного значения $\nu=0$ бесконечной кратности. Что же касается собственного значения $\nu_*(\kappa,\varepsilon)$, то для него, как будет показано ниже, имеет место равномерное по $\kappa\in S(r)$ асимптотическое равенство

$$\nu_*(\kappa,\varepsilon)=(1+\beta_1(\kappa-1))(1+\beta_2(\kappa-1))+O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{69}$$

где β_1, β_2 — постоянные (65).

Для обоснования соотношения (69) необходимо знать асимптотическое поведение решения $\widetilde{h}(t,\varepsilon)$. В связи с этим дополним уравнение (48) начальным условием $h\equiv 1$, $-\Delta-\sigma_0\le \le t\le -\sigma_0$, и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0\le t\le T_*(\varepsilon)-\sigma_0$ методом шагов с учетом того, что коэффициент $B(t,\varepsilon)$ меняется δ-образно (см. (50)–(52)), а для коэффициента $A(t,\varepsilon)$ справедливо вытекающее из (46), (47), (49) равномерное по $t\in\Sigma$ асимптотическое представление

$$A(t,\varepsilon)=A_0(t)+O(\sqrt{\varepsilon}\,),\quad A_0(t)=\begin{cases} {a_0}'(x)|_{x=\theta_1(t)} & \text{при} \quad -\sigma_0\le t<\Delta,\\ {b_0}'(x)|_{x=\theta_2(t-t_0)} & \text{при} \quad \Delta<t<\Delta+t_0,\\ {a_0}'(x)|_{x=\theta_1(t-T_0)} & \text{при} \quad \Delta+t_0<t\le T_0-\sigma_0.\end{cases}$$

В результате убеждаемся, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0\le t\le T_*(\varepsilon)-\sigma_0}|\widetilde{h}(t,\varepsilon)|\le M,\qquad M=\text{const}>0, \tag{70}$$

а во-вторых, равномерно по $t\in\Sigma$, $\kappa\in S(r)$

$$\widetilde{h}(t,\varepsilon)=h(t)+O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{71}$$

где $h(t)$, $t\ge-\sigma_0$ — решение импульсной задачи Коши

$$\dot h=A_0(t)h,\qquad h|_{t=-\sigma_0}=1,$$

$$h(\Delta+0)=h(\Delta-0)+\kappa\,\frac{b_0(\theta_1(\Delta))-a_0(\theta_1(\Delta))}{a_0(0)}\,h(0), \tag{72}$$

$$h(t_0+\Delta+0)=h(t_0+\Delta-0)+\kappa\,\frac{a_0(\theta_2(\Delta))-b_0(\theta_2(\Delta))}{b_0(0)}\,h(t_0).$$

Что же касается свойства (69), то оно очевидным образом следует из (71) и из равенства $h(T_0-{}-\sigma_0)=(1+\beta_1(\kappa-1))(1+\beta_2(\kappa-1))$, проверяемого посредством интегрирования системы (72) (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Вернемся к оператору $W(\varepsilon)$. Объединяя оценку (68) с проведенным выше асимптотическим анализом (см. (69), (70)), приходим к выводу, что все собственные значения этого оператора заведомо принадлежат шарам вида

$$\{\nu\in\mathbb{C}\colon |\nu|\le M_1\sqrt{\varepsilon}\},\qquad \{\nu\in\mathbb{C}\colon |\nu-\nu_*(\kappa,\varepsilon)|\le M_2\sqrt{\varepsilon}\},\qquad M_1,M_2=\text{const}>0.$$

Отсюда и из (69) требуемые соотношения (63), (64) вытекают очевидным образом.

Теорема 2 доказана.

4. Итоговые результаты. Обратимся теперь к исходной системе (23) и напомним, что в силу леммы 1 проблема существования ее бегущих волн сводится к отысканию периодических решений вспомогательного уравнения (34), имеющих периоды $m\Delta/k,\ k \in \mathbb{N}$. В связи с этим в дальнейшем периодическое решение уравнения (34), доставляемое теоремой 1, и его период будем обозначать через $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ и $T_*(\varepsilon, \Delta)$ соответственно, подчеркивая явно зависимость указанных функций от Δ. Аналогичным образом, через $T_0(\Delta)$ обозначим период функции (46).

Изучим сначала вопрос о существовании периодического решения с периодом $m\Delta/k$ у релейного уравнения (36). С этой целью обратимся к аналогичному (4) уравнению

$$T_0(\Delta) = m\Delta/k \tag{73}$$

для нахождения $\Delta > 0$ и заметим, что в силу (42), (45) оно эквивалентно уравнению

$$\psi(\Delta) \overset{\text{df}}{=} \Big(\frac{m}{k} - 2\Big)\Delta - \int\limits_{\theta_2(\Delta)}^{0} \frac{ds}{a_0(s)} + \int\limits_{0}^{\theta_1(\Delta)} \frac{ds}{b_0(s)} = 0. \tag{74}$$

Лемма 5. *При любом натуральном k, принадлежащем множеству*

$$k\colon m/(2 + a + 1/a) < k < m/2, \tag{75}$$

где, напомним, $a = -b_0(0)/a_0(0) > 0$, уравнение (74) *допускает единственное решение $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)} > 0$ такое, что*

$$\frac{m}{k} - 2 + \left(\frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} + \frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))}\right)\bigg|_{\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}} > 0. \tag{76}$$

В случае же $k \geq m/2$ или $k \leq m/(2 + a + 1/a)$ это уравнение не имеет корней на полуоси $(0, +\infty)$.

Доказательство. При $k \geq m/2$ в силу свойств (25) функций $a_0(x)$, $b_0(x)$ имеем $\psi(\Delta) < 0\ \forall\, \Delta > 0$. Аналогичным образом, в случае $k \leq m/(2 + a + 1/a)$ из оценки (26) следует, что

$$\psi'(\Delta) = \frac{m}{k} - 2 + \frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} + \frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))} \geq$$

$$\geq a + 1/a + \frac{a_0(\theta_1(\Delta))}{b_0(\theta_1(\Delta))} + \frac{b_0(\theta_2(\Delta))}{a_0(\theta_2(\Delta))} > 0 \quad \forall\, \Delta > 0. \tag{77}$$

Отсюда и из очевидного равенства $\psi(0) = 0$ заключаем, что $\psi(\Delta) > 0\ \ \forall\, \Delta > 0$.

Перейдем теперь к случаю (75), в котором функция $\psi(\Delta)$ обладает следующими свойствами. Во-первых, справедливы соотношения

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = m/k - a - 1/a < 0, \qquad \lim_{\Delta \to +\infty} \psi(\Delta) = +\infty, \tag{78}$$

из которых автоматически вытекает существование у уравнения (74) хотя бы одного корня $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)} > 0$. Во-вторых, используя явную формулу для $\psi'(\Delta)$ (см. (77)), замечаем, что уравнение $\psi'(\Delta) = 0$ имеет вид (27) при $z = m/k - 2 \in (0, a + 1/a)$. Тем самым в силу условия 4 это уравнение допускает единственный корень $\Delta = \Delta_* > 0$, причем

$$\psi'(\Delta) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \Delta < \Delta_*, \qquad \psi'(\Delta) > 0 \quad \text{при} \quad \Delta > \Delta_*. \tag{79}$$

Из свойств (78), (79) следует, что решение $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}$ уравнения (74), о котором говорилось выше, единственно и

$$\psi'(\widehat{\Delta}_{(k)}) > 0. \tag{80}$$

Что же касается требуемого неравенства (76), то оно эквивалентно оценке (80).

Лемма 5 доказана.

Установленная лемма гарантирует, что при любом натуральном k из множества (75) и при $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}$ периодическое решение (46) уравнения (36) имеет нужный период $m\widehat{\Delta}_{(k)}/k$. Обратимся теперь к периодическому решению $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (34) и рассмотрим соответствующее ему уравнение

$$T_*(\varepsilon, \Delta) = m\Delta/k, \tag{81}$$

где номер k, по-прежнему, принадлежит множеству (75). Напомним, далее, что в силу (47) период $T_*(\varepsilon, \Delta)$ допускает асимптотическое представление

$$T_*(\varepsilon, \Delta) = T_0(\Delta) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)),$$

причем это представление равномерно по Δ из любого компакта $\Omega \subset (0, +\infty)$. Отсюда с учетом простоты корня $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}$ уравнения (73) очевидным образом заключаем, что уравнение (81) имеет хотя бы один корень $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$\widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon) = \widehat{\Delta}_{(k)} + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)). \tag{82}$$

Суммируя приведенные построения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и при любом k из множества* (75) *система* (23) *допускает цикл* (*бегущую волну*)

$$C_k\colon x_j = x_{(k)}(t + (j-1)\widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{83}$$

где $x_{(k)}(t, \varepsilon) = x_*(t, \varepsilon, \Delta)|_{\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)}$, а $\widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ — корень (82) *уравнения* (81).

Интересно отметить, что при $m \to \infty$ количество номеров k из множества (75) стремится к бесконечности. А это значит, что при согласованном увеличении m и уменьшении ε количество сосуществующих в системе (23) циклов (83) неограниченно растет. Однако, как будет показано ниже, устойчивым среди них является только цикл C_k при условии $m = 2k + 1$.

В силу леммы 2 проблема устойчивости цикла (83) с номером k сводится к анализу расположения корней уравнений

$$\left(\widehat{\nu}_s(\kappa, \varepsilon)\right)^k = \kappa^m, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{84}$$

где через $\widehat{\nu}_s(\kappa, \varepsilon)$ обозначены мультипликаторы $\nu_s(\kappa, \varepsilon)$ уравнения (48) при значении $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ параметра Δ. Для решения поставленной проблемы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *При каждом натуральном k, удовлетворяющем требованиям* (75), *и при любых значениях параметров*

$$\beta_1, \beta_2 \colon \beta_j > 1, \quad j = 1, 2, \qquad \beta_1 + \beta_2 < m/k \tag{85}$$

уравнение

$$P(\kappa) \stackrel{\mathrm{df}}{=} [1 + \beta_1(\kappa - 1)]^k [1 + \beta_2(\kappa - 1)]^k - \kappa^m = 0 \tag{86}$$

имеет простой единичный корень, а все остальные его корни распадаются на два семейства $\Omega_1 \subset \{\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa| < 1\}$ и $\Omega_2 \subset \{\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa| > 1\}$. При этом множество Ω_1 содержит $2k$ элемента, а Ω_2 состоит из $m - 2k - 1$ корней и в случае $m = 2k + 1$ оказывается пустым.

Доказательство. Из явного вида полинома $P(\kappa)$ очевидным образом следует, что $P(1) = 0$. Кроме того, в силу (85) имеем $P'(1) = k(\beta_1 + \beta_2) - m < 0$. Что же касается остальных корней уравнения (86), то их исследование начнем со случая

$$\beta_1 = 1 + \varepsilon_1, \qquad \beta_2 = 1 + \varepsilon_2, \quad 0 < \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \ll 1. \tag{87}$$

Нетрудно увидеть, что при условиях (87) полином $P(\kappa)$ допускает ровно $2k$ корней, стремящихся к нулю при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Остальные же его корни (обозначим их через $\kappa_l(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $l = 1, \ldots, m - 2k - 1$), отличные от единичного, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ обращаются в $\exp\left(i2\pi l/(m - 2k)\right)$, $l = 1, \ldots, m - 2k - 1$. Кроме того, несложная проверка показывает, что

$$\frac{d}{d\varepsilon_j} |\kappa_l(\varepsilon_1, \varepsilon_2)|^2 \Big|_{\varepsilon_1 = 0,\, \varepsilon_2 = 0} = \frac{2k}{m - 2k} \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{m - 2k}\right) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, при условиях (87) утверждение леммы верно.

Предположим теперь, что при некоторых значениях β_1, β_2 из множества (85) уравнение (86) имеет корень $\kappa_0 = \exp(i\omega_0)$, $\omega_0 \geq 0$. Тогда с необходимостью

$$|\kappa_0|^{2m} = 1 = |1 + \beta_1(\kappa_0 - 1)|^{2k} |1 + \beta_2(\kappa_0 - 1)|^{2k} =$$

$$= (1 + 2(\beta_1 - 1)\beta_1(1 - \cos\omega_0))^k (1 + 2(\beta_2 - 1)\beta_2(1 - \cos\omega_0))^k.$$

Отсюда в силу неравенств β_1, $\beta_2 > 1$ очевидным образом имеем $\cos\,\omega_0 = 1$ и $\kappa_0 = 1$.

Обозначим через m_j количество корней уравнения (86), лежащих в множестве Ω_j. Из выполненного анализа следует, что величины m_j, $j = 1, 2$, не меняются при изменении параметров β_1, β_2 в пределах множества (85). Тем самым они остаются такими же, как и в случае (87), т. е. $m_1 = 2k$, $m_2 = m - 2k - 1$.

Лемма 6 доказана.

Установленная лемма позволяет разобраться со свойствами устойчивости циклов (83). Как было отмечено выше, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Цикл* (83) *с фиксированным номером k экспоненциально орбитально устойчив при $m = 2k + 1$ и неустойчив в противном случае.*

Доказательство. Рассмотрим систему в вариациях на цикле (83), имеющую вид

$$\dot{h}_j = \widehat{A}(t + (j-1)\widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon), \varepsilon)h_j + \widehat{B}(t + (j-1)\widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon), \varepsilon)h_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{88}$$

где $h_0 = h_m$, а $\widehat{A}(t,\varepsilon), \widehat{B}(t,\varepsilon)$ — коэффициенты (49), соответствующие значению $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ (см. (82)) параметра Δ. Заметим, далее, что для оператора монодромии $\mathcal{V}(\varepsilon)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ системы (88) имеет место оценка

$$\|\mathcal{V}(\varepsilon)\| \le M, \quad M = \text{const} > 0, \tag{89}$$

справедливость которой вытекает из свойств (50)–(52) коэффициентов $\widehat{A}(t,\varepsilon), \widehat{B}(t,\varepsilon)$. Таким образом, при исследовании уравнений (84) в силу очевидного неравенства $|\nu| \le \|\mathcal{V}(\varepsilon)\|$, выполняющегося для любого мультипликатора ν системы (88), и соотношения (12) мы вправе ограничиться значениями параметра $\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa| \le r$, где $r = (M+1)^{k/m}$, M — константа из (89).

Итак, при условиях $\kappa \in S(r)$, $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ воспользуемся теоремой 2. В результате убеждаемся, что все возможные решения $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \ne 0$ уравнений (84) при $s \ge 2$ лежат в круге радиуса порядка $\varepsilon^{k/2m}$ с центром в нуле, а соответствующие мультипликаторы $\nu = \kappa^{m/k}$ цикла (83) допускают оценку вида $|\nu| \le M\sqrt{\varepsilon}$ с некоторой универсальной постоянной $M > 0$. Впрочем, как будет ясно из дальнейшего анализа, на самом деле мультипликаторов порядка $\sqrt{\varepsilon}$ система (88) не имеет, поскольку полный их набор строится уже по корням уравнения (84) при $s = 1$.

Объединяя формулы (64), (65), (82), приходим к выводу, что уравнение (84) с номером $s = 1$ записывается в виде

$$[1 + \widehat{\beta}_1\,(\kappa - 1)]^k[1 + \widehat{\beta}_2\,(\kappa - 1)]^k = \kappa^m + O(\sqrt{\varepsilon}\,), \tag{90}$$

где

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1|_{\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}}, \qquad \widehat{\beta}_2 = \beta_2|_{\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}}, \tag{91}$$

а $\widehat{\Delta}_{(k)}$ — корень уравнения (74), доставляемый леммой 5. Заметим, далее, что при $\varepsilon = 0$ оно переходит в уравнение $\widehat{P}(\kappa) = 0$, где $\widehat{P}(\kappa)$ — полином (86) при значениях (91) параметров β_1, β_2. Добавим еще, что так как эти значения удовлетворяют условиям (85) (неравенство $\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 < m/k$ эквивалентно оценке (76)), то в силу леммы 6 интересующее нас уравнение $\widehat{P}(\kappa) = 0$ имеет простой корень $\kappa = 1$, а остальные его корни $\kappa = \widehat{\kappa}_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, принадлежат множествам $\Omega_1 \subset \{\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa| < 1\}$, $\Omega_2 \subset \{\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa| > 1\}$.

При $\varepsilon > 0$ уравнение (90) также допускает решение $\kappa = 1$, поскольку при $\kappa = 1$ уравнение (48) заведомо имеет единичный мультипликатор (в этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (34) на цикле, о котором идет речь в теореме 1). Далее, зафиксируем некоторое $\delta > 0$ и обозначим через $S_\delta(r)$ множество на комплексной плоскости $\{\kappa\colon \kappa \in \mathbb{C}\}$, получающееся из $S(r)$ при выбрасывании окрестностей $\{\kappa \in \mathbb{C}\colon |\kappa - (\widehat{\beta}_j - 1)/\widehat{\beta}_j| < \delta\}$, $j = 1, 2$. Обратим внимание, что при достаточно малом δ в силу очевидных неравенств $\widehat{P}((\widehat{\beta}_j - 1)/\widehat{\beta}_j) \ne 0$, $j = 1, 2$, эти окрестности заведомо не содержат корней уравнения (90). Тем самым в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением значений $\kappa \in S_\delta(r)$.

Переход от $S(r)$ к $S_\delta(r)$ продиктован тем обстоятельством, что в случае $\kappa \in S_\delta(r)$ имеем $[1+\widehat{\beta}_1(\kappa-1)]\cdot[1+\widehat{\beta}_2(\kappa-1)] \neq 0$. Таким образом, при $\kappa \in S_\delta(r)$, $\Delta = \widehat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ мультипликатор (64) является простым и в силу этого аналитически зависит от κ. Более того, справедливо аналогичное (64) равномерное по $\kappa \in S_\delta(r)$ асимптотическое равенство

$$\frac{\partial\,\widehat{\nu}_1}{\partial\kappa} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 2\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2(\kappa-1) + O(\sqrt{\varepsilon}\,). \tag{92}$$

Факт аналитичности функции $\widehat{\nu}_1(\kappa,\varepsilon)$ по κ и формула (92) позволяют утверждать, что, как и в случае $\varepsilon = 0$, при $0 < \varepsilon \ll 1$ количество корней уравнения (90) в множестве $S_\delta(r)$ равно m, причем корень $\kappa = 1$ является простым. Остальные же его корни при $\varepsilon \to 0$ стремятся к упомянутым выше корням $\kappa = \widehat{\kappa}_j$, $j = 1,\ldots,m-1$, полинома $\widehat{P}(\kappa)$. Тем самым на основании лемм 1 и 6 заключаем, что в случае $m = 2k+1$ цикл C_k экспоненциально орбитально устойчив, а при $m \geq 2k+2$ дихотомичен (с размерностью неустойчивого многообразия, равной $m-2k$).

Теорема 4 доказана.

5. Заключение. Обратим внимание, что теоремы 3, 4 не содержат никакой информации об аттракторах системы (23) при четном m. Для того чтобы восполнить этот пробел, при $m = 2m_0$, $m_0 \in \mathbb{N}$, перейдем в (23) к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате с учетом равенства (35) получим релейную систему

$$\dot{x}_j = F(x_j, x_{j-1}), \quad j = 1,\ldots,2m_0, \qquad x_0 = x_{2m_0}. \tag{93}$$

Предположим, что в дополнение к условиям (25) выполняются неравенства ${a_0}'(q_1) < 0$, ${b_0}'(-q_2) < 0$. Тогда, как нетрудно увидеть, система (93) допускает два экспоненциально устойчивых состояния равновесия O_l, $l = 1, 2$, с координатами $x_{2j-1} = -q_2$, $x_{2j} = q_1$, $j = 1,\ldots,m_0$, и $x_{2j-1} = q_1$, $x_{2j} = -q_2$, $j = 1,\ldots,m_0$, соответственно. Других же аттракторов у рассматриваемой системы, по всей видимости, нет. Во всяком случае их не удалось обнаружить ни аналитическими методами, ни с помощью численного анализа, проводившегося для

$$F(x,u) = \begin{cases} -\mu\, x + 1 & \text{при} \quad u < 0, \\ -\mu\, x - a & \text{при} \quad u > 0, \end{cases} \qquad m_0 = 2, 3.$$

В заключение отметим, что предложенные нами методы исследования периодических решений типа бегущих волн распространяются и на цепочки уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x}_j = f(x_j, x_j(t-h_1), x_{j-1}, x_{j-1}(t-h_2)), \qquad j = 1,\ldots,m, \quad x_0 = x_m, \tag{94}$$

где $m \geq 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $h_1, h_2 > 0$, а вектор-функция $f(x,y,z,v)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируема по $(x,y,z,v) \in \mathbb{R}^{4n}$. Примером цепочки (94) является математическая модель кольцевой нейронной сети Хопфилда с запаздыванием, представляющая собой систему

$$\dot{u}_j = -\mu\, u_j + \lambda[1 - (a+1)f(u_j(t-1)) - b\, g(u_{j-1})], \quad j = 1,\ldots,m. \tag{95}$$

Здесь $u_0 = u_m$, параметры μ, a, λ и функция $f(u)$ те же, что и в (30), $b = \mathrm{const} > 0$, а для функции $g(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливы аналогичные (31) асимптотические представления

$$g(u) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_l^-}{u^l} \qquad \text{при} \quad u \to -\infty, \qquad g(u) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_l^+}{u^l} \qquad \text{при} \quad u \to +\infty,$$

сохраняющие силу при дифференцировании по u любое число раз.

Другой пример — математическая модель кольцевой нейронной сети с однонаправленными химическими связями, имеющая вид

$$\dot{u}_j = [\lambda f(u_j(t-1)) + b\, g(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)]u_j, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad u_0 = u_m. \tag{96}$$

Здесь $\lambda \gg 1$, $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\,\lambda)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, а функции $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} \colon u \geq 0\}$ обладают свойствами

$$f(0) = 1; \quad f(u) + a,\ uf'(u),\ u^2 f''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \to +\infty;$$

$$g(u) > 0 \quad \forall u > 0, \quad g(0) = 0; \quad g(u) - 1,\ ug'(u),\ u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \to +\infty,$$

где $a = \text{const} > 0$.

Подробному рассмотрению вопросов о существовании и устойчивости в системах (95), (96) периодических решений типа бегущих волн будут посвящены отдельные статьи. Здесь же отметим, что в отличие от случая (23) в этих цепочках при подходящем выборе параметров может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых бегущих волн, т. е. реализуется известное явление буферности.

1. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2006. – **46**, № 10. – С. 1809 – 1821.
2. *Спротт Д. К.* Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки. – Ижевск: Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2012. – 328 с.
3. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1984. – **81**. – P. 3088 – 3092.
4. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – М.: Изд. дом „Вильямс”, 2006. – 1104 с.
5. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. – 1997. – **216**. – С. 126 – 153.
6. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2010. – **50**, № 12. – С. 2099 – 2112.
7. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 7. – С. 919 – 932.

Получено 19.11.12