

Сходимость диффузионных процессов

Для стохастических диффузионных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра, получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости решений к решению стохастического диффузионного уравнения.

Для стохастичних дифузійних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від параметра, одержані необхідні та достатні умови слабкої збіжності розв'язків до розв'язку стохастичного дифузійного рівняння.

В работе исследуется сходимость распределений решений $\xi^\varepsilon(t)$ уравнения

$$\xi^\varepsilon(t) = x^\varepsilon + \int_0^t b^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \sigma^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s)) d\omega^\varepsilon(s) \quad (1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уравнения указанного вида укладываются в схему книги [1], где приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости ξ^ε в терминах «близости на допредельных траекториях». С другой стороны, в [2] получены аналитические условия типа (V), (N) слабой сходимости решений (1). В этой статье получены отличные от приведенных в [1] условия слабой сходимости ξ^ε в смысле «близости на допредельных траекториях», устанавливается их связь с условиями типа (V), (N).

Обозначим через E_d d -мерное евклидово пространство, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение его элементов, ∇ — символ градиента. Для функциональных пространств используем обычные [3,4] обозначения L_p , $L_{p,loc}$, $W_{p,loc}^{1,2}$, $C_0^\infty(E_d)$ и т. п. Норму в $L_{p,loc}$ обозначим символом $\|\cdot\|_{p,loc}$, слабую сходимость функций в $L_{2,loc}$ обозначим символом \rightharpoonup . Различные постоянные, независимые от ε , будем обозначать через c , E — символ математического ожидания.

Через $\mathcal{C}[0, T]$ обозначим пространство непрерывных функций $x(s)$ со значениями в E_d , $M_t^\varepsilon = \sigma\{x(s), s \leq t\}$. Рассматриваемые процессы $\xi^\varepsilon(t)$, $\xi(t)$ являются марковскими и ниже используется обычная символика марковских процессов.

В уравнении (1) $b^\varepsilon(t, x)$ — d -мерный вектор, $\sigma^\varepsilon(t, x)$ — $d \times k$ -мерная матрица, $t \in [0, T]$, $x \in E_d$, $\omega^\varepsilon(t)$ — при каждом $\varepsilon > 0$ стандартный винеровский процесс. Обозначим $a^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)'$, ' — символ транспонирования. Будем говорить, что выполнено условие (*), если:

- 1) функции $b_i^\varepsilon(t, x)$ измеримы, функции $a_{ij}^\varepsilon(t, x)$ непрерывны;
- 2) существуют постоянные $c > 0$, $\lambda > 0$ такие, что

$$|b_i^\varepsilon(t, x)|^2 + |a_{ij}^\varepsilon(t, x)| \leq c(1 + |x|^2), \\ (a^\varepsilon \theta, \theta) \geq \lambda |\theta|^2, \quad \forall \theta > 0.$$

При $d = 1$ п. 1 в условии (*) можно ослабить. Будем говорить, что выполнено условие (**), если $d = 1$ и

- 1) функции $b^\varepsilon(t, x)$, $a^\varepsilon(t, x)$ измеримы;
- 2) существуют постоянные $c > 0$, $\lambda > 0$ такие, что

$$|b^\varepsilon(t, x)| + a^\varepsilon(t, x) \leq c, \quad a^\varepsilon(t, x) \geq \lambda.$$

При условиях (*) (***) уравнение (1) имеет единственное слабое решение [5] ([6]) и процессы $\xi^\varepsilon(t)$ являются марковскими. Если коэффициенты $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию линейного роста, то для решений уравнения (1) справедливы оценки [7]

$$E \sup_{t \in [0, T]} |\xi^\varepsilon(t)|^2 \leq c(1 + |x^\varepsilon|^2), \quad (2)$$

$$E |\xi^\varepsilon(t) - \xi^\varepsilon(s)|^4 \leq c |t - s|^2. \quad (3)$$

Отсюда следует, что при $|x^\varepsilon| \leq c$ семейство мер μ^ε , порожденных процессами ξ^ε на пространстве $\mathbb{C}[0, T]$, слабо компактно. Слабую сходимость мер и слабую сходимость процессов будем обозначать \Rightarrow . При $\varepsilon \rightarrow 0$ ξ^ε будет слабо сходиться к решению стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s). \quad (4)$$

С коэффициентами $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ и $(b, a = \sigma\sigma')$ свяжем операторы L^ε и L :

$$L^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + (b^\varepsilon, \nabla) + \frac{1}{2} (a^\varepsilon \nabla, \nabla),$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (b, \nabla) + \frac{1}{2} (a \nabla, \nabla).$$

Для произвольной ограниченной области $D \subset E_d$ будем говорить, что $D \in O^2$, если ее граница $\partial D \in O^2$ [3]. Положим

$$\Gamma_t = \{(s, x) : (s \in [0, t], x \in \partial D) \cup (s = t, x \in D)\}, \quad \tau_D^\varepsilon = \inf \{t : \xi^\varepsilon(t) \in \partial D\}.$$

Лемма 1. Пусть функции $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию $(*)$ $(**)$, $f^\varepsilon(t, x)$ — измеримая функция, $t \in [0, T]$, $x \in D$, такая, что $\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in D}} |f^\varepsilon(t, x)| \leq c$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = 0. \quad (5)$$

Тогда для любой $F(x) \in L_{d+1}(D)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = 0.$$

Доказательство. Установим, что предел в (5) равен нулю равномерно по $s \in [0, t]$, $x \in D$. Для этого рассмотрим граничную задачу

$$L^\varepsilon u^\varepsilon = -f^\varepsilon, \quad s \in [0, t], \quad x \in D, \\ u^\varepsilon|_{\Gamma_t} = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение в классе $W_{d+1}^{1,2}([0, t] \times D)$ [3, 8]. Используем ее вероятностное представление

$$u^\varepsilon(s, x) = E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv.$$

Отсюда следует, что $|u^\varepsilon(s, x)| \leq c$ и согласно (5) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(s, x) = 0$. Устанавливаемая равномерность есть следствие равномерной по ε гельдеровости функций $u^\varepsilon(s, x)$ ([4], теорема IV. 2.7).

Пусть $F(x) \in C_0^\infty(D)$. Тогда для любого разбиения $s = t_1 < t_2 < \dots < t_k = t$

$$E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = \sum_{r=1}^{k-1} E_{s,x} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \chi(v < \tau_D^\varepsilon) [F(\xi^\varepsilon(v)) -$$

$$-F(\xi^\varepsilon(t_r))|f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv + \sum_{r=1}^{k-1} E_{s,x} F(\xi^\varepsilon(t_r)) \int_{t_r}^{t_{r+1} \wedge \tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = J_1^\varepsilon + J_2^\varepsilon. \quad (6)$$

Используя (3), оценим J_1^ε :

$$|J_1^\varepsilon| \leq c \max_r |t_{r+1} - t_r|^{1/2}.$$

Оценим $J_{2,r}^\varepsilon$. В силу марковости процесса $\xi^\varepsilon(t)$

$$|J_{2,r}^\varepsilon| = |E_{s,x} F(\xi^\varepsilon(t_r)) u^\varepsilon(t_r, \xi^\varepsilon(t_r))| \leq c \sup_{x \in D} |u^\varepsilon(t_r, x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, в (6) второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а первое может быть сделано равномерно по ε сколь угодно малым выбором разбиения. Лемма для $F \in C_0^\infty(D)$ доказана. Пусть $F \in L_{d+1}(D)$ и $F_n \in C_0^\infty(D)$ такая, что $\|F - F_n\|_{d+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Используя оценку Крылова [9], получаем

$$\begin{aligned} & \left| E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv \right| \leq \left| E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} [F(\xi^\varepsilon(v)) - F_n(\xi^\varepsilon(v))] \times \right. \\ & \left. \times f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv \right| + \left| E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} F_n(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv \right| \leq c \|F - F_n\|_{d+1} + \\ & + \left| E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} F_n(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv \right|. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу вначале по $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем по $n \rightarrow \infty$, получаем искомое. Лемма доказана.

В дальнейшем E^μ означает усреднение по мере μ .

Лемма 2. Пусть функции $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию (*) (***) и $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu$. Тогда для любого M_s -измеримого непрерывного ограниченного функционала $\varphi_s(x)$ и любой $\Phi(v, x) \in L_{d+1}([s, t] \times D)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E \varphi_s(\xi^\varepsilon) \int_s^t \Phi(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = E^\mu \varphi_s(x) \int_s^t \Phi(v, x(v)) dv.$$

Утверждение леммы очевидно для непрерывных ограниченных $\Phi(v, x)$. В общем случае он устанавливается с помощью оценки Крылова, как это сделано при доказательстве леммы 1.

Примем условие А.

Условие А. Существуют функции (b, a) , удовлетворяющие условию (*) (***) такие, что для любой ограниченной области $D \in O^2$, $s, t \in [0, T]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{s,r} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} |b_i^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) - b_i(v, \xi^\varepsilon(v))| dv = 0, \quad i = \overline{1, d},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^\varepsilon} |a_{ij}^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) - a_{ij}(v, \xi^\varepsilon(v))| dv = 0, \quad i, j = \overline{1, d}.$$

Теорема 1. Пусть для функций $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ выполнено условие (*) (***) $x^\varepsilon \rightarrow x$. Для того чтобы $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$, необходимо и достаточно выполнение условия А.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) \in C^3(D)$. При-

меня формулу Ито, получаем

$$E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^e} (L^e f)(v, \xi^e(v)) dv = E_{s,x} f(\xi^e(t \wedge \tau_D^e)) - f(x), \quad x \in D,$$

$$E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D} (L) (v, \xi(v)) dv = E_{s,x} f(\xi(t \wedge \tau_D)) - f(x), \quad x \in D,$$

$$\tau_D = \inf \{t > s, \xi^e(t) \in \partial D\}.$$

В [7, с. 579] доказано, что

$$\lim_{e \rightarrow 0} E_{s,x} f(\xi^e(t \wedge \tau_D^e)) = E_{s,x} f(\xi(t \wedge \tau_D)),$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^e} F(v, \xi^e(v)) dv = E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D} F(v, \xi(v)) dv, \quad \forall F \in L_{d+1}([s, t] \times D).$$

Из этих соотношений следует

$$\lim_{e \rightarrow 0} E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^e} [L^e f - L f](v, \xi^e(v)) dv = 0. \quad (7)$$

Положив в (7) $f(x) = x_i$, получим первое равенство в условии А. Выбрав в (7) $f(x) = x_i x_j$ и воспользовавшись леммой 1, получим второе равенство в условии А.

Достаточность. Как отмечалось, семейс во мер μ^e слабо компактно. Пусть μ — одна из предельных точек и $\mu^{e'} \Rightarrow \mu$ при $e' \rightarrow 0$. Применим к процессу $\xi^e(t)$ и функции $\Phi(x) \in C_0^\infty(E_d)$ формулу Ито, тогда для любого \mathcal{M}_s -измеримого непрерывного ограниченного функционала $\varphi_s(x)$

$$E \varphi_s(\xi^e) \left[\Phi(\xi^e(t)) - \Phi(\xi^e(s)) - \int_s^t (L^e \Phi)(v, \xi^e(v)) dv \right] = 0.$$

Переходя к пределу по подпоследовательности $e' \rightarrow 0$ и используя вначале лемму 1, а затем лемму 2, получаем

$$E^\mu \varphi_s(x) \left[\Phi(x(t)) - \Phi(x(s)) - \int_s^t (L\Phi)(v, x(v)) dv \right] = 0.$$

Таким образом, мера μ является решением проблемы мартингалов для коэффициентов (b, a) . Из единственности этого решения [5, 6] следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Введем условия V, N, позволяющие конструктивно описывать коэффициенты предельного процесса (4). Отметим, что здесь они пишутся в несколько отличной от [2] форме.

Условие V. Существует последовательность функций $v_k^e(t, x) \in W_{d+1,loc}^{1,2}$, $k = \overline{1, d}$, такая, что

$$1. \quad \widehat{b}_k^e \stackrel{\text{def}}{=} b_k^e + \frac{1}{2} (a^e \nabla, \nabla) v_k^e \xrightarrow{e \rightarrow 0} b_k;$$

$$2. \quad \lim_{e \rightarrow 0} \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in D}} |v_k^e(t, x)| = 0 \text{ для любой ограниченной области } D \subset E_d;$$

$$3. \quad \lim_{e \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial}{\partial t} v_k^e + (b^e, \nabla v_k^e) + \widehat{b}_k^e - b_k \right\|_{d+1,loc} = 0.$$

Условие N . Существует последовательность функций $N_{kl}^v(t, x) = N^v(t, x) \in W_{d+1, \text{loc}}^{1/2}$, $k, l = \overline{1, d}$, такая, что

1. $\hat{a}_{kl}^v \stackrel{\text{def}}{=} a_{kl}^v + (a_{kl}^v \nabla, \nabla) N_{kl}^v \xrightarrow{v \rightarrow 0} a_{kl}$;
2. $\lim_{v \rightarrow 0} \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in D}} |N_{kl}^v(t, x)| = 0$ для любой ограниченной области $D \subset E_d$;
3. $\lim_{v \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial}{\partial t} N_{kl}^v + (b^v, \nabla N_{kl}^v) + \hat{a}_{kl}^v - a_{kl} \right\|_{d+1, \text{loc}} = 0$.

Вектор-функцию b и матричную функцию a , определяемые условиями V , N , будем называть предельными для функций (b^v, a^v) .

Теорема 2. Пусть $x^v \rightarrow x$, для функций (b^v, a^v) выполнены условия $(*)$ $(**)$, V , N и предельные функции (b, a) также удовлетворяют условию $(*)$ $(**)$. Тогда $\xi^v \Rightarrow \xi$.

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях выполнено условие A . Применим формулу Ито

$$E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^v} [b_k^v(v, \xi^v(v)) - b_k(v, \xi^v(v))] dv = E_{s,x} [v_k^v(s, x) - v_k^v(t \wedge \tau_D^v, \xi^v(t \wedge \tau_D^v))] - E_{s,x} \int_s^{t \wedge \tau_D^v} \left[\frac{\partial}{\partial v} v_k^v + (b^v, \nabla v_k^v) + \hat{b}_k^v - b_k \right] dv.$$

Отсюда, из условия V и оценки Крылова следует первое равенство условия A . Аналогично доказывается и второе требование условия A . Утверждение теоремы вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

Таким образом, из условий V и N следует справедливость условия A . Выясним, насколько сами условия V , N близки к необходимым условиям для сходимости ξ^v к ξ . Введем условие H .

Пусть $f^v(t, x) \in L_2([0, T] \times D)$ и $u^v(t, x) \in W_2^{1,2}([0, T] \times D)$ — решение граничной задачи

$$L^v u^v = f^v, \quad t \in [0, T], \quad x \in D, \\ u^v|_{\Gamma_T} = 0.$$

Условие H . Если $\|f^v\|_2 \leq c$, то $\|u^v\|_{W_2^{1,2}} \leq c$.

Отметим, что условие H выполнено при $d=1$ и условии $(**)$, $d=2$ и условию $(*)$ для матриц a^v , удовлетворяющих условию Кордеса [10].

Теорема 3. Пусть коэффициенты уравнений (1), (4) удовлетворяют условию $(*)$ $(**)$, H и $\xi^v \Rightarrow \xi$. Тогда выполнены условия V , N .

Доказательство. Проверим справедливость условия N .

Условие V устанавливается аналогично. Определим $N_{kl}^v(t, x)$ как решение задачи Коши:

$$L^v N_{kl}^v = \frac{1}{2} (a_{kl} - a_{kl}^v), \quad t \in [0, T], \quad x \in E_d, \\ N_{kl}^v(T, x) = 0.$$

Пусть D — произвольная ограниченная область в E_d и $D \subset D_1$ — ограниченная область в E_d , $\rho(x) \in C^\infty$ и $\rho(x) = 1$ при $x \in D$, $\rho(x) = 0$ при $x \notin D_1$. Определим функцию $g_{kl}^v(t, x)$ как решение граничной задачи

$$L^v g_{kl}^v = \frac{1}{2} \rho (a_{kl} - a_{kl}^v), \quad t \in [0, T], \quad x \in D_1, \\ g_{kl}^v(T, x) = 0, \quad g_{kl}^v|_{\partial D} = 0. \quad (8)$$

Решение этой граничной задачи существует и единственно в классе $W_{d+1}^{1,2}([0, T] \times D_1)$ [3, 8]. Ясно, что $N_{kl}^\varepsilon(t, x) = g_{kl}^\varepsilon(t, x)$ при $x \in D$. Т. е. $N_{kl}^\varepsilon \in W_{d+1,loc}^{1,2}$. Воспользуемся вероятностным представлением для g_{kl}^ε :

$$g_{kl}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2} E_{t,x} \int_0^{T \wedge \tau_{D_1}^\varepsilon} \rho(\xi^\varepsilon(s)) [a_{kl}^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s)) - a_{kl}(s, \xi^\varepsilon(s))] ds.$$

Так как в силу теоремы 1 выполнено условие А, то по лемме 1 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{kl}^\varepsilon(t, x) = 0$. Отсюда и равномерной по ε гельдеровости решений задачи (8) [4] вытекает второе требование условия N. Третье требование условия N выполняется в силу определения функций N_{kl}^ε . Далее, так как $\|g_{kl}^\varepsilon\|_{W_2^{1,2}} \leq c$, то существует последовательность, вновь обозначенная g_{kl}^ε , такая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{kl}^\varepsilon \frac{L_2([0, T] \times D)}{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{kl}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Следовательно,

$$\hat{a}_{kl}^\varepsilon = a_{kl} - 2 \frac{\partial}{\partial t} N_{kl}^\varepsilon - 2(b^\varepsilon, \nabla N_{kl}^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_{kl}.$$

Условие N установлено. Теорема доказана.

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
2. Махно С. Я. Достаточные условия для сходимости решений стохастических уравнений // Теория случайн. процессов. — 1988. — Вып. 16. — С. 66—72.
3. Ладьженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
4. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985. — 374 с.
5. Strook D. W., Varadhan S. R. S. Multidimensional Diffusion Process. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979. — 338 p.
6. Веретенников А. Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. — 1979. — 24, вып. 2. — С. 348—360.
7. Гихман И. Н., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
8. Веретенников А. Ю. О сильных и слабых решениях одномерных стохастических уравнений с граничными условиями // Теория вероятностей и ее приложения. — 1981. — 26, вып. 4. — С. 685—701.
9. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977. — 398 с.
10. Алхутов Ю. А., Мамедов И. Т. Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1986. — 131, вып. 4. — С. 477—500.

Получено 09.10.91

УДК 517.54

В. И. Рязанов, канд. физ.-мат. наук

(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия

Получены необходимые и достаточные условия дифференцируемости по Белинскому квазиконформных отображений в точке.

Одержані необхідні і достатні умови диференційовності за Бєлінським квазіконформних відображень у точці.

© В. И. РЯЗАНОВ, 1992