УДК 517. 9

**А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев**
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We consider the problem of finding conditions of solvability and algorithms for construction of solutions of weakly nonlinear boundary-value problems for operator equations (with Noether linear part) with pulse influence at fixed times. The method used is based on passing by methods of Lyapunov–Schmidt type from a pulse boundary-value problem to an equivalent operator system that can be solved by iteration procedures based on the principle of fixed point.

Розглянуто задачу про знаходження умов розв'язності та алгоритмів побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для операторних рівнянь (з нетеровою лінійною частиною) з імпульсною дією в фіксовані моменти часу.

Схему дослідження побудовано на переході за допомогою методів типу Ляпунова–Шмідта від імпульсної крайової задачі до еквівалентної операторної системи, для розв'язання якої можуть бути застосовані ітераційні процедури, які грунтуються на принципі нерухомої точки.

Изучение проблем качественной теории дифференциальных систем с импульсным воздействием, начатое в [1, 2], в дальнейшем получило свое развитие и обобщение в многочисленных публикациях. Так, подход к исследованию импульсных периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных систем [1] успешно развит и применен на случай слабонелинейных импульсных краевых задач (с нетеровой линейной частью) для обыкновенных дифференциальных систем [3] и линейных краевых задач для дифференциальных систем с сосредоточенным запаздыванием [4]. С точки зрения теории операторов одной из существенных особенностей этих задач является всюду разрешимость [5] задачи Коши для исходных дифференциальных систем. Однако [6] существует достаточно широкий класс краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений, у которых исходное операторное уравнение не является всюду разрешимым. Они и будут предметом рассмотрения данной работы, в которой ставится задача получить критерии разрешимости и формулы для представления решений линейных краевых задач для нетеровых операторных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Для слабонелинейных (с нетеровой линейной частью) импульсных краевых задач найдены условия разрешимости, построен сходящийся итерационный алгоритм для нахождения решений. Полученные в [3] критерии разрешимости и формулы для построения решений линейных нетеровых операторных уравнений в банаховых и гильбертовых пространствах позволяют решить эту задачу. Схема исследования основана на переходе с помощью методов типа Ляпунова – Шмидта от импульсной краевой задачи к операторной системе, для решения которой применимы сходящиеся итерационные процедуры, основанные на принципе неподвижной точки [7, 8].

Обозначим через $I_{[a,b]}$ промежуток $-\infty < a \le t \le b < +\infty$; $I_{[0,\varepsilon_0]}$ — промежуток $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$; $R^n$ — пространство $n$-мерных векторов $x = \operatorname{col}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ с нормой $\|x\| = \max_{1\le i\le n}|x_i|$, $R^{n\times n}$ — пространство $(n\times n)$-мерных матриц с нормой, согласованной с нормой в $R^n$, $\chi_\tau(t)$ — функция Хевисайда: $\chi_\tau(t) = 0$, если $t \le \tau$, и $\chi_\tau(t) = 1$, если $t > \tau$. По аналогии с [6, с. 123] введем в рассмотрение следующие пространства функций $x\colon [a, b] \to R^n$: $L^n$ — пространство суммируемых функций с нормой

$$\|x\|_{L^n} = \int_a^b \|x(s)\|\, ds;$$

$D^n$ — пространство абсолютно непрерывных функций, $\|x\|_{D^n} = \|x(a)\| + \|\dot{x}\|_{L^n}$; $C$ — пространство непрерывных функций, $\|x\|_C = \max_{s\in[a,b]}\|x(s)\|$; $BV$ — пространство функций с ограниченной вариацией $\|x\|_{BV} = \|x(a)\| + \operatorname{var}_a^b x$; $SP$ — подпространство пространства $BV$, состоящее из функций скачков:

$$SP = \left\{ y \in BV \mid y = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\tau_i},\ a_i \in R^n,\ \tau_i \in [a, b),\ i = 1, \ldots, n,\ \tau_i \neq \tau_j,\ \text{если}\ i \neq j \right\}$$

с индуцированной из $BV$ нормой; $D^n S$ — подпространство пространства $BV$, состоящее из функций, представимых в виде суммы абсолютно непрерывной функции и функции скачков

$$D^n S = \{ z \in BV \mid \exists\, x \in D^n,\ \exists\, y \in SP:\ z = x + y \}, \quad \|z\|_{D^n S} = \|x\|_{D^n} + \|y\|_{SP}.$$

**Постановка задачи.** Рассмотрим слабонелинейное операторное уравнение

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \tag{1}$$

где $L: D^n \to L^n$ — линейный ограниченный нетеров оператор [5, с. 38] ( $\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\ker L^* = s - k$), $L^*$ — оператор, сопряженный к оператору $L$, $Z: D^n \times I_{[a,b]} \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to L^n$ — нелинейный оператор, $\varepsilon$ — малый неотрицательный параметр.

Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ — фиксированная строго упорядоченная система точек промежутка $[a, b]$ и в моменты времени $\tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, решения уравнения (1) имеют скачки, определяемые равенствами

$$\Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i -, \varepsilon) = a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i -, \varepsilon), \varepsilon), \tag{2}$$

где $\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i +, \varepsilon) - z(\tau_i -, \varepsilon)$, $S_i \in R^{n\times n}$ такие, что $\det(E + S_i) \neq 0$, $J_i: D^n \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to R^n$ — нелинейный векторный функционал, $a_i \in R^n$.

Пусть решения системы (1), (2) удовлетворяют условиям

$$lz(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{3}$$

где $l: D^n \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to R^m$, $J: D^n \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to R^m$ — $m$-мерные соответственно линейный и нелинейный ограниченные векторные функционалы.

**Линейные краевые задачи.** Прежде чем исследовать слабонелинейную импульсную краевую задачу (1)–(3), рассмотрим задачу о нахождении критерия разрешимости и формул для представления решений порождающей линейной краевой задачи, которая получается из задачи (1)–(3) при $\varepsilon = 0$:

$$(Lz)(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{4}$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i -, 0) = a_i, \tag{5}$$

$$lz(\cdot, 0) = \alpha. \tag{6}$$

Решением линейной импульсной краевой задачи (4)–(6) называется функция $z(t) \in D^n S$, удовлетворяющая уравнению (4) при почти всех $t \in [a, b]$ и условиям (5), (6).

Известно [3, с. 53], что линейное нетерово операторное уравнение (4) разрешимо для тех и только тех $f(t) \in L^n$, которые удовлетворяют условию $(P_Y f)(t) = 0$, и имеет решение вида

$$z(t, c_s) = X(t)c_s + (L^- f)(t), \tag{7}$$

где $X(t)$ — $(n \times s)$-мерная матрица, составленная из базисных векторов нуль-пространства $N(L)$ оператора $L$; $P_Y$: $L^n \to Y$ — проектор на подпространство $Y \in L^n$, изоморфное нуль-пространству $N(L^*)$ оператора $L^*$; $L^-$ — обобщенный обратный оператор к нетерову оператору $L$.

Для импульсного нетерова операторного уравнения (4), (5) справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Нетерово операторное уравнение с импульсным воздействием* (4), (5) *разрешимо для любых* $a_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *и тех и только тех* $f(t) \in L^n$, *которые удовлетворяют условию*

$$(P_Y f)(t) = 0, \tag{8}$$

*и имеет общее решение вида*

$$z(t, c) = \overline{X}(t)c + \left(\tilde{L}^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t), \quad c \in R^s, \tag{9}$$

*где*

$$\overline{X}(t) = X(t) \sum_{i=1}^{k} \prod_{\nu=i}^{k-1} \overline{S}_\nu P_{i-1}, \quad t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k]$$

— $(n \times s)$*-мерная матрица, составленная из базисных векторов нуль-пространства импульсного нетерова оператора* $\Lambda = \operatorname{col}[L, \Delta - S_i]$;

$$\left(\tilde{L}^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) = (L^- f)(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \left(\tilde{L}_i^- f\right)(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{X}_i(t) a_i, \quad t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k]$$

— *обобщенный обратный оператор к оператору импульсного уравнения* (4), (5). *Здесь*

$$\left(\tilde{L}_i^- f\right)(t) = X(t) \prod_{\nu=i+1}^{k-1} \overline{S}_\nu \left(L_i^- f\right)(\tau_i),$$

$$\tilde{X}_i(t) = X(t) \prod_{\nu=i+1}^{k-1} \overline{S}_\nu X^+(\tau_i), \quad P_0 = E_s, \quad \prod_{\nu=k+1}^{k} \overline{S}_\nu = E_s,$$

$$\overline{S}_i = X^+(\tau_i)(E + S_i)X(\tau_i); \quad \left(L_i^- f\right)(\tau_i) = X^+(\tau_i) S_i \left(L^- f\right)(\tau_i),$$

*где* $X^+(\tau_i)$ — $(s \times n)$*-мерная единственная псевдообратная матрица к* $(n \times \times s)$*-мерной постоянной матрице* $X(\tau_i)$; $P_i: R^s \to N(X(\tau_i))$ — $(s \times s)$*-мерная матрица-ортопроектор евклидова пространства* $R^s$ *на нуль-пространство* $N(X(\tau_i))$ *матрицы* $X(\tau_i)$.

***Доказательство.*** Пусть выполнено условие (8) разрешимости нетерова операторного уравнения (4). Тогда его общее решение на промежутках $[a, \tau_1]$ и $]\tau_1, \tau_2]$ представимо в виде

$$z_1(t) = X(t)c + (L^- f)(t), \quad t \in [a, \tau_1],$$
$$z_2(t) = X(t)c_2 + (L^- f)(t), \quad t \in ]\tau_1, \tau_2]. \qquad (1$$

Из импульсных условий (5) имеем

$$X(\tau_1 +)c_2 + (L^- f)(\tau_1 +) =$$
$$= (E + S_1)\{X(\tau_1 -)c + (L^- f)(\tau_1 -)\} + a_1. \qquad (1$$

С целью упрощения записей, не нарушая общности, всюду в дальнейшем буде полагать

$$X(\tau_i -) = X(\tau_i +), \quad (L^- f)(\tau_i -) = (L^- f)(\tau_i +).$$

Обозначим через $P_1$ $(s \times s)$-мерную матрицу-ортопроектор, проектирующи евклидово пространство $R^s$ на нуль-пространство $N(X(\tau_1))$ постоянно $(s \times n)$-мерной матрицы $X(\tau_1)$, $P_1 : R^s \to N(X(\tau_1))$, а через $P_1^{(*)}$ $(n \times n)$-мер ную матрицу-ортопроектор, проектирующий евклидово пространство $R^n$ н нуль-пространство $N(X^*(\tau_1))$ $(n \times s)$-мерной матрицы $X^*(\tau_1)$, сопряженной матрице $X(\tau_1)$, $P_1^{(*)} : R^n \to N(X^*(\tau_1))$.

Известно, что система (11) разрешима относительно $c \in R^s$ тогда и тольк тогда, когда

$$P_1^{(*)}\{(E + S_1)X(\tau_1)c + S_1(L^- f)(\tau_1) + a_1\} = 0. \qquad (1$$

Так как $(n \times s)$-мерная матрица $X(t)$ составлена из полной системы $s$ линей но независимых базисных векторов $\{f_i\}_{i=1}^s$, то постоянная матрица $X(\tau$ имеет полный ранг $(\operatorname{rank} X(\tau_1) = n, n \le s)$, поэтому $P_1^{(*)} \equiv 0$ и, следовательн условие (12) всегда выполнено. При этом система (11) имеет $(r_0 = s - n)$-пара метрическое семейство решений

$$c_2 = P_1 c + X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)c + X^+(\tau_1)S_1(L^- f)(\tau_1) + X^+(\tau_1)a_1,$$

где $X^+(\tau_1)$ — единственная $(s \times n)$-мерная псевдообратная матрица к матриц $X(\tau_1)$, которую можно построить по формуле [3, с. 91]

$$X^+(\tau_1) = X^*(\tau_1)[X(\tau_1)X^*(\tau_1)]^{-1},$$

имея в виду, что $P_{N(X^*(\tau_1))} = 0$; $P_1 c \in N(X(\tau_1))$, где $c \in R^s$ — произвольный $s$ мерный вектор.

Подставив полученное значение $c_2$ в формулу (10), получим выражени для общего решения $z_2(t)$ импульсного операторного уравнения (4), (5) н промежутке $]\tau_1, \tau_2]$:

$$z_2(t) = X(t)[P_1 + X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)]c +$$
$$+ (L^- f)(t) + X(t)X^+(\tau_1)S_1(L^- f)(\tau_1) + X(t)X^+(\tau_1)a_1,$$

которое после ввода обозначений

$$\overline{S}_1 = X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1), \quad (L_1^- f)(\tau_1) = X^+(\tau_1)S_1(L^- f)(\tau_1)$$

запишем в виде

$$z_2(t) = X(t)[\overline{S}_1 + P_1]c + (L^- f)(t) + X(t)(L_1^- f)(\tau_1) + X(t)X^+(\tau_1)a_1.$$

На промежутке $]\tau_2, \tau_3]$ решение нетерова операторного уравнения (4) имеет вид

$$z_3(t) = X(t)c_3 + (L^- f)(t), \quad t \in \, ]\tau_2, \tau_3]. \tag{13}$$

С учетом импульсных условий (5) имеем

$$\begin{gathered} X(\tau_2+)c_3 + (L^- f)(\tau_2+) = \\ = (E+S_2)\{X(\tau_2-)[\overline{S}_1 + P_1]c + (L^- f)(\tau_2-) + \\ + X(\tau_2-)\left(L_1^- f\right)(\tau_1) + X(\tau_2-)X^+(\tau_1)a_1\} + a_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Как и ранее, обозначим через $P_2$ $(s \times s)$-мерную матрицу-ортопроектор, $P_2\colon R^s \to N(X(\tau_2))$, а через $P_2^{(*)}$ $(n \times n)$-мерную матрицу-ортопроектор, $P_2^{(*)}\colon R^n \to N(X^*(\tau_2))$.

Так как постоянная $(n \times s)$-мерная матрица $X(\tau_2)$ имеет полный ранг, то $P_2^{(*)} \equiv 0$, и уравнение (14) всегда разрешимо относительно $c_3 \in R^s$ и имеет $(r_0 = s - n)$-параметрическое семейство решений

$$\begin{gathered} c_3 = P_2 c + X^+(\tau_2)(E+S_2)X(\tau_2)[\overline{S}_1 + P_1]c + \\ + X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2) + X^+(\tau_2)(E+S_2)X(\tau_2)\left(L_1^- f\right)(\tau_1) + \\ + X^+(\tau_2)(E+S_2)X(\tau_2)\wedge\ (\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2. \end{gathered}$$

После ввода обозначений

$$\overline{S}_2 = X^+(\tau_2)(E+S_2)X(\tau_2), \qquad \left(L_2^- f\right)(\tau_2) = X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2),$$

подставив найденное значение $c_3$ в уравнение (13), получим выражение для решения $z_3(t)$ на промежутке $]\tau_2, \tau_3]$:

$$\begin{gathered} z_3(t) = X(t)[\overline{S}_2\,\overline{S}_1 + \overline{S}_2 P_1 + P_2]c + (L^- f)(t) + \\ + X(t)[\overline{S}_2\left(L_1^- f\right)(\tau_1) + \left(L_2^- f\right)(\tau_2)] + X(t)[\overline{S}_2 X^+(\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2]. \end{gathered}$$

Аналогичными рассуждениями на промежутке $]\tau_3, \tau_4]$ для решения $z_4(t)$ будем иметь

$$\begin{gathered} z_4(t) = X(t)[\overline{S}_3\,\overline{S}_2\,\overline{S}_1 + \overline{S}_3\,\overline{S}_2 P_1 + \overline{S}_3 P_2 + P_3]c + (L^- f)(t) + \\ + X(t)[\overline{S}_3\,\overline{S}_2\left(L_1^- f\right)(\tau_1) + \overline{S}_3\left(L_2^- f\right)(\tau_2) + \left(L_3^- f\right)(\tau_3)] + \\ + X(t)[\overline{S}_3\,\overline{S}_2 X^+(\tau_1)a_1 + \overline{S}_3 X^+(\tau_2)a_2 + X^+(\tau_3)a_3]. \end{gathered}$$

Продолжая этот процесс дальше, для нетерова операторного уравнения с импульсным воздействием получим утверждение теоремы.

***Замечание* 1.** Если уравнение (4) имеет решение при любых $f(t) \in L^n$, то в теореме 1 условие (8) всегда выполнено. В этом случае импульсное операторное уравнение (4), (5) является всюду разрешимым, что верно, например, для импульсных обыкновенных дифференциальных систем [3, с. 235], импульсных систем с запаздыванием [4]. Более того, в случае обыкновенных дифференциальных систем формула (9) значительно упрощается [1].

Далее рассмотрим вопросы разрешимости и представления общего решения порождающей краевой задачи (4)–(6). Для того чтобы решение (9) импульсного нетерова операторного уравнения (4), (5) удовлетворяло краевым условиям (6), необходимо и достаточно, чтобы $lz(\cdot, c) = \alpha$, откуда для определения векторной константы $c \in R^s$ получим алгебраическую систему

$$Qc = \alpha - l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot), \tag{15}$$

где $Q = lX(\cdot)$ — $(m \times s)$-мерная постоянная матрица. Пусть $\operatorname{rank} Q = r_1$.

Уравнение (15) разрешимо относительно $c \in R^s$ тогда и только тогда, когда

$$P_{N(Q^*)_d}\left\{\alpha - l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot)\right\} = 0; \quad d = m - r_1$$

и при этом имеет $(r = n - r_1)$-параметрическое семейство решений

$$c = P_{N(Q)_r}c_r + Q^{+}\alpha - Q^{+}l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot). \tag{16}$$

Здесь $Q^{+}$ — единственная псевдообратная к $Q$ $(s \times m)$-мерная матрица; $P_{N(Q)_r}$ — $(s \times r)$-мерная матрица, столбцы которой — полная система $r$ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{N(Q)}$: $R^s \to N(Q)$; $P_{N(Q^*)_d}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, строки которой — полная система $d$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$ [3, с. 91].

Подставив решение (16) в (9), получим общее решение линейной краевой задачи для импульсного нетерова операторного уравнения вида

$$z(t, c_r) = \overline{X}(t)P_{N(Q)_r}c_r + \overline{X}(t)Q^{+}\alpha + (L^{-}f)(t) -$$

$$- \overline{X}(t)Q^{+}l(L^{-}f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\tilde{L}_i^{-}f\right)(t) - \sum_{i=1}^{p}\overline{X}(t)Q^{+}l\left(\tilde{L}_i^{-}f\right)(\cdot) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i - \sum_{i=1}^{p}\overline{X}(t)Q^{+}l\tilde{X}_i(\cdot)a_i, \quad t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k].$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Линейная импульсная краевая задача* (4)–(6) *для нетерова операторного уравнения разрешима для тех и только тех* $f(t) \in L^n$, $\alpha \in R^m$, $a_i \in R^n$, *которые удовлетворяют условиям*

$$(P_Y f)(t) = 0, \tag{17}$$

$$P_{N(Q^*)_d}\left\{\alpha - l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot)\right\} = 0, \tag{18}$$

*и при этом имеет общее решение вида*

$$z(t, c_r) = \overline{X}(t)c_r + \left(\tilde{G}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + \overline{X}(t)Q^{+}\alpha, \tag{19}$$

*где* $\overline{X}_r(t) = \overline{X}(t)P_{N(Q)_r}$ — $(n \times r)$-*мерная матрица, составленная из базисных векторов нуль-пространства оператора* $\Lambda_1 = \operatorname{col}[\Lambda, l]$;

$$\left(\tilde{G}\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) = (L^- f)(t) -$$

$$- \overline{X}(t)Q^+ l(L^- f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\tilde{L}_i^- f\right)(t) - \sum_{i=1}^{p}\overline{X}(t)Q^+ l\left(\tilde{L}_i^- f\right)(\cdot) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i - \sum_{i=1}^{p}\overline{X}(t)Q^+ l\tilde{X}_i(\cdot)a_i, \quad t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k] \tag{20}$$

— *обобщенный оператор Грина соответствующей* (4)–(6) *полуоднородной* $(\alpha = 0)$ *импульсной краевой задачи.*

***Замечание* 2.** Если линейное операторное уравнение (4) является всюду разрешимым [5, с. 8], что имеет место, например, для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием и без него, то в теореме 2 условие (17) отсутствует и она переходит в известные теоремы [3, с. 238; 4] для соответствующих классов систем.

**Слабонелинейные краевые задачи.** Рассмотрим слабонелинейную импульсную краевую задачу

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon),$$
$$\Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i -, \varepsilon) = a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i -, \varepsilon), \varepsilon), \tag{21}$$
$$lz(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Предположим, что:

$a_1$) $L: D^n \to L^n$ — линейный ограниченный нетеров оператор;

$a_2$) $Z: D^n \times I_{[a,b]} \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to L^n$ — нелинейный оператор, непрерывный по $z$, непрерывно дифференцируемый по Фреше в окрестности порождающего решения по $z$ и непрерывный по $\varepsilon$,

$$Z(0, t, 0) = 0, \qquad \partial Z(0, t, 0)\backslash\partial z = 0;$$

$a_3$) $J_i: D^n \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to R^m$ и $J: D^n \times I_{[0,\varepsilon_0]} \to R^m$ — нелинейные соответственно $n$- и $m$-мерные функционалы по $z$, непрерывно дифференцируемые по Фреше в окрестности решений порождающей краевой задачи и непрерывные по $\varepsilon$,

$$J_i(0, 0) = 0, \quad \partial J_{i_z}(0, 0)\backslash\partial z = 0; \quad J(0, 0) = 0, \quad \partial J_z(0, 0)\backslash\partial z = 0;$$

$a_4$) $l: D^n C \to R^m$ — линейный ограниченный $m$-мерный вектор-функционал;

$a_5$) $f(t) \in L^n$, $\alpha \in R^m$, $a_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Решением импульсной краевой задачи (21) называется непрерывная по $\varepsilon$ функция $z(t, \varepsilon)$, удовлетворяющая уравнению (1) при почти всех $t \in [a, b]$, условиям (2), (3). В дальнейшем пространство таких решений будем обозначать через $D^n SC$.

Ставится задача об определении условий существования и алгоритма построения решений $z(t, \varepsilon)$, принадлежащих пространству $D^n SC$, обращающихся при $\varepsilon = 0$ в одно из порождающих решений $z_0(t, c_r)$ (19) порождающей краевой задачи (4)–(6). Пространство таких решений будем обозначать через $D^n SC_0$.

Поставленную задачу будем решать с применением построенного выше обобщенного оператора Грина (20) путем сведения исходной краевой задачи (21) к эквивалентной операторной системе с последующим применением к ней метода простых итераций в предположении, что выполнены условия теоремы 1, т. е.

что $f(t) \in L^n$, $\alpha \in R^m$, $a_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяют условиям (17), (18) и порождающая краевая задача (4)–(6) имеет $r$-параметрическое семейство решений (19).

Ответ на вопрос о необходимых условиях существования решений $z(t, \varepsilon) \in D^n SC_0$ слабонелинейной импульсной краевой задачи (21) дает следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть слабонелинейная краевая задача* (21) *имеет решение* $z(t, \varepsilon) \in D^n SC$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в одно из порождающих решений порождающей для* (21) *линейной импульсной краевой задачи* (4)–(6) *с константой* $c_r = c_0 \in R^r$. *Тогда вектор* $c_0$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{gathered} (P_Y Z(z_0(\cdot, c_r), \cdot, 0))(t) = 0, \\ P_{N(Q^*)_d}\left\{ J(z_0(\cdot, c_r), 0) - l\left( \tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} Z(z_0(s, c_r), s, 0) \\ J_i(z_0(\tau_i -, c_r), 0) \end{bmatrix} \right)(\cdot) \right\} = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

***Доказательство.*** Пусть выполнены условия теоремы. Следовательно, при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ и почти всех $t \in [a, b]$ выполняются тождества

$$(Lz)(t) \equiv f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon),$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i -, \varepsilon) \equiv a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i -, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$lz(\cdot, \varepsilon) \equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Тогда из теоремы 2 следует, что операторы $Z, J, J_i$ удовлетворяют при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ условиям вида (17), (18), т. е.

$$(P_Y Z(z_0(\cdot, c_r), \cdot, \varepsilon))(t) = 0,$$

$$P_{N(Q^*)_d}\left\{ J(z_0(\cdot, c_r), \varepsilon) - l\left( \tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} Z(z_0(s, c_r), s, \varepsilon) \\ J_i(z_0(\tau_i -, c_r), \varepsilon) \end{bmatrix} \right)(\cdot) \right\} = 0.$$

Пусть условие (22) не выполняется. Тогда, поскольку $z(t, \varepsilon) \to z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon \to 0$, оператор $Z(z, t, \varepsilon)$ непрерывен по $\varepsilon$ и $z$ в окрестности $\varepsilon = 0$ и $z_0(t, c_0)$, найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что условие (22) не будет выполняться. Полученное противоречие доказывает теорему.

По аналогии с [3, с. 110; 7, с. 247] систему уравнений (22) будем называть уравнениями для порождающих амплитуд.

Если система уравнений (22) имеет решение, то вектор $c_0$ определяет то порождающее решение $z_0(t, c_0)$, к которому при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться решение $z(t, \varepsilon) \in D^n SC_0$ исходной слабонелинейной краевой задачи с импульсным воздействием, если оно существует. Однако, если система уравнений (22) не имеет решений, то и краевая задача (21) не имеет решений из пространства $D^n SC_0$. Поскольку здесь и далее все выкладки проводятся в вещественной форме, то речь идет о действительных решениях системы уравнений для порождающих амплитуд.

Найдем достаточные условия существования решений краевой задачи с импульсным воздействием (21) в случае, который назовем критическим первого порядка. Для него характерно то, что ответ на вопрос о существовании решений исходной задачи дается после анализа краевой задачи, служащей для нахождения первого приближения к искомому решению.

Выполнив в (21) замену переменных

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon),$$

в которой вектор констант $c_0 \in R^r$ удовлетворяет системе уравнений для порождающих амплитуд (22), приходим к следующей задаче. Найти достаточные условия существования и алгоритм построения решения $x(t, \varepsilon) \in D^n SC$, обращающегося в нулевое при $\varepsilon = 0$, краевой задачи с имульсным воздействием

$$(Lx)(t) = \varepsilon Z(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} - S_i x(\tau_i -) = \varepsilon J_i(z_0(\tau_i -, c_0) + x(\tau_i -, \varepsilon), \varepsilon), \tag{23}$$
$$lx = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

С учетом условий а$_2$), а$_3$) на нелинейности в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0)$ выделим у нелинейных операторов $Z, J_i, J$ линейные части по $x$ и члены нулевого порядка по $\varepsilon$. Получим следующие разложения в окрестности $x = 0, \varepsilon = 0$:

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z_0(t, c_0) + (L_1 x(\cdot, \varepsilon))(t) + R(x, t, \varepsilon), \tag{24}$$

где

$$Z_0(t, c_0) = Z(z_0(t, c_0), t, 0) : D^n \times I_{[a, b]} \to L^n;$$

$L_1 : D^n SC \to L^n$ — линейный ограниченный оператор, представляющий собой производную Фреше от оператора $Z(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ по $z$ при $z = z_0(t, c_0)$;

$$R(0, t, 0) = 0, \quad \partial R(0, t, 0) \backslash \partial x = 0;$$
$$J_i(z_0 + x, \varepsilon) = J_{i0}(\tau_i -, c_0) + A_{i1} x(\tau_i -, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i -, \varepsilon), \varepsilon), \tag{25}$$

где

$$J_{i0}(\tau_i -, c_0) = J_i(z_0(\tau_i -, c_0), 0),$$
$$A_{i1} = A_{i1}(c_0) = \partial J(z, 0) \backslash \partial z|_{z = z_0(\tau_i -, c_0)}, \quad i = 1, \ldots, p,$$
$$R_i(0, 0) = 0, \quad \partial R_i(0, 0) \backslash \partial x = 0;$$
$$J(z_0 + x, \varepsilon) = J_0(\cdot, c_0) + l_1 x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{26}$$

где $J_0(\cdot, c_0) = J(z_0(\cdot, c_0), 0)$; $l_1 : D^n SC \to R^m$ — линейный ограниченный $m$-мерный вектор-функционал, представляющий собой производную Фреше от векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ при $z = z_0(t, c_0)$;

$$R_0(0, 0) = 0, \quad \partial R_0(0, 0) \backslash \partial x = 0.$$

Рассматривая нелинейности в краевой задаче (23) как неоднородности и применяя к ней теорему 2, для ее решения $x(t, \varepsilon)$ получим следующее выражение:

$$x(t, \varepsilon) = \overline{X}_r(t) c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

в котором неизвестный вектор $c_r = c(t, \varepsilon)$ определяется из условий типа (17), (18) существования решения

$$(P_Y\{Z_0(\cdot, c_0) + L_1[\overline{X}_r(\cdot) c_r + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + R(x, \cdot, \varepsilon)\})(t) = 0,$$

$$P_{N(Q^*)_d} \left\{ J(\cdot, c_0) + l_1[\overline{X}_r(\cdot) c_r + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \right.$$

$$+\, l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} Z_0(s,c_0)+(L_1[\overline{X}_r(\cdot)c_r+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)](s)+R(x,s,\varepsilon) \\ J_{i0}(\tau_i-,c_0)+A_{i1}[\overline{X}_r(\tau_i-)c_r+x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)]+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\Bigg\} = 0.$$

Неизвестная вектор-функция $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется по формуле

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\overline{X}(t)Q^{+}J(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+$$
$$+\,\varepsilon\left(\tilde{G}\begin{bmatrix} Z(z_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon) \\ J_i(z_0(\tau_i-,c_0)+x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t).$$

Учитывая разложения (24)–(26) и тот факт, что векторная константа $c_0\in R^r$ необходимо удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд (22), для нахождения решения $x(t,\varepsilon)\in D^nSC$, $x(t,0)=0$ слабонелинейной краевой задачи с импульсным воздействием (23) приходим к эквивалентной операторной системе:

$$x(t,\varepsilon) = \overline{X}_r(t)c\,(t,\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$(B_0c(\cdot,\varepsilon))(t) = -\left[\begin{matrix} & \left(P_Y\{L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\right. \\ P_{N(Q^*)_d} & \left\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\right.\end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} +R(x(\cdot,\varepsilon),t,\varepsilon)\})(t) \\ +\,l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix}(L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(s)+R(x,s,\varepsilon) \\ A_{i1}x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\Big\}\end{matrix}\right], \tag{27}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon\left(\tilde{G}\begin{bmatrix} Z_0(s,c_0)+L_1[\overline{X}_r(s)c+x^{(1)}(s,\varepsilon)]+R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon) \\ J_{i0}(\tau_i-,c_0)+A_{1i}[\overline{X}_r(\tau_i-)c+x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)]+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t)+$$
$$+\,\varepsilon\overline{X}(t)Q^{+}\left\{J_0(\cdot,c_0)+l_1\left[\overline{X}_r(\cdot)c+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right]+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\},$$

где

$$B_0 = \begin{bmatrix} (P_YL_1\overline{X}_r)(t) \\ P_{N(Q^*)_d}\left\{l_1\overline{X}_r(\cdot)\; +\; l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix} L_1\overline{X}_r(s) \\ A_{i1}\overline{X}_r(\tau_i-)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix}$$

— линейный ограниченный матричный оператор.

Разрешимость этой системы зависит от разрешимости второго уравнения.

Пусть оператор $B_0$ — нетеров $(\operatorname{ind}B_0=\dim\ker B_0-\dim\ker B_0^*=\rho-\eta)$. Обозначим через $P_{N(B_0)}$ и $P_Y$ проекторы соответственно на нуль-пространство $N(B_0)$ и подпространство $Y_1$, изоморфное нуль-пространству $N(B_0^*)$ оператора $B_0^*$; $B_0^-$ — оператор, обобщенно-обратный к нетерову оператору $B_0$ [3, с. 53].

Второе из уравнений операторной системы (27) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие типа (8)

$$\left(P_{Y_1}\left[\begin{matrix} & \left(P_Y\{L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\right. \\ P_{N(Q^*)_d} & \left\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\right.\end{matrix}\right.\right.$$

$$+R(x(\cdot,\varepsilon),t,\varepsilon)\})(*) + l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix}\left(L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right)(s)+R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\\ A_{i1}x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)]+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\Big\}\Big]\Big]\Big)(t) = 0. \tag{28}$$

Если

$$P_{Y_1}\begin{bmatrix}P_Y\\ P_{N(Q^*)_d}\end{bmatrix} = 0,$$

то условие (28) всегда выполняется, и второе уравнение системы (27) имеет решение, которое можно представить в виде

$$c(t,\varepsilon) = c_\rho^{(1)}(t) - B_0^{-}\Bigg(\Bigg[\begin{matrix} & \Big(P_Y\{L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ P_{N(Q^*)_d} & \Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\end{matrix}$$

$$+R(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\})(*) + l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix}\left(L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right)(s)+R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\\ A_{i1}x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)]+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\Big\}\Big]\Big]\Big)(t), \tag{29}$$

где $c_\rho^{(1)}(t) = P_{N(B_0)_\rho}c(t) \in N(B_0)$, $P_{N(B_0)_\rho}$ — матричный оператор, составленный из $\rho$ линейно независимых столбцов матричного оператора $P_{N(B_0)}$.

С учетом (29) операторная система (27) принимает вид

$$x(t,\varepsilon) = \overline{X}_r(t)c(t,\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c(t,\varepsilon) = c_\rho^{(1)}(t) - \Bigg(B_0^{-}\Bigg[\begin{matrix} & \Big(P_Y\{L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ P_{N(Q^*)_d} & \Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\end{matrix}$$

$$+R(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\})(*) + l\left(\tilde{L}^{-}\begin{bmatrix}\left(L_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)(s)+R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\\ A_{i1}x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(\cdot)\Big\}\Big]\Big]\Big)(t), \tag{30}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\left(\tilde{G}\begin{bmatrix}Z(s,c_0)+L_1[\overline{X}_r(s)c+x^{(1)}(s,\varepsilon)]+R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\\ J_{i0}(\tau_i-,c_0)+A_{1i}[\overline{X}_r(\tau_i-)c+x^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)]+R_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t) +$$

$$+\ \varepsilon\overline{X}(t)Q^{+}\Big\{J_0(\cdot,c_0)+l_1\big[\overline{X}_r(\cdot)c+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big]+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Операторная система (30) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [7].

Итерационный процесс для нахождения решения $x(t,\varepsilon)\in D^nSC$, $x(t,0)=0$ краевой задачи (23) будем строить следующим образом. Приближения $x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ к $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ будем искать как решения краевых задач

$$(Lx_{k+1})(t) = \varepsilon\{Z_0(t,c_0)+(L_1[\overline{X}(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])(t)+R(x_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},\quad t\neq\tau_i,$$

$$\Delta x_{k+1}\big|_{t=\tau_i} - S_ix_{k+1}(\tau_i-,\varepsilon) = \varepsilon J_i(\tau_i-,c_0)+$$

$$+ \varepsilon[A_{i1}[\overline{X}(\tau_i-)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i-, \varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i-, \varepsilon), \varepsilon)],$$

$$lx_{k+1}(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon[J_0(\cdot, c_0) + l_1[\overline{X}(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)].$$

По теореме 2 с учетом разложений (24)–(26) найдем решение $x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon)$ этой краевой задачи по формуле

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\left(\tilde{G}\begin{bmatrix} Z(s, c_0) + L_1[\overline{X}_r(s)c_k + x_k^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \\ J_{i0}(\tau_i-, c_0) + A_{1i}[\overline{X}_r(\tau_i-)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i-, \varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i-, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix}\right)(t) +$$

$$+ \varepsilon\overline{X}(t)Q^+\{J_0(\cdot, c_0) + l_1\{\overline{X}_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\} + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}.$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости этой краевой задачи приходим к операторному уравнению

$$(B_0c_k(\cdot, \varepsilon))(t) = -\left[\begin{matrix} & \big(P_Y\{L_1x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \\ P_{N(Q^*)_d} & \Big\{ l_1x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t) \\ + l\left(\tilde{L}^-\begin{bmatrix} \big(L_1x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\big)(s) + R(x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \\ A_{i1}x_k^{(1)}(\tau_i-, \varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i-, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix}\right)(\cdot)\Big\} \end{matrix}\right], \qquad (31)$$

из которого находится $k$-е приближение $c_k(t, \varepsilon)$ к $c(t, \varepsilon)$. Критерии разрешимости систем вида (31) будут выполнены на каждом шаге итерационного процесса, если

$$P_{Y_1}\begin{bmatrix} P_Y \\ P_{N(Q^*)_d} \end{bmatrix} = 0.$$

Приближение $x_{k+1}(t, \varepsilon)$ к $x(t, \varepsilon)$ запишется в виде

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \overline{X}_r(t)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4** *(достаточное условие). Пусть краевая задача* (21) *удовлетворяет условиям* $a_1)$–$a_5)$, *а порождающая краевая задача* (4)–(6) — *условиям теоремы* 2. *Тогда для каждого значения вектора* $c_0 \in R^r$, *удовлетворяющего системе уравнений* (22) *для порождающих амплитуд, при выполнении условия*

$$P_{Y_1}\begin{bmatrix} P_Y \\ P_{N(Q^*)_d} \end{bmatrix} = 0 \qquad (32)$$

*краевая задача* (21) *имеет* $\rho$-*параметрическое семейство решений* $z(t, \varepsilon) \in \in D^nSC_0$. *Эти решения можно определить с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*] \subseteq [0, \varepsilon_0]$ *итерационного процесса*

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) = x_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \overline{X}_\rho(t)c_\rho^{(1)}(t) + \overline{X}_r(t)c_k(t, \varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$c_k(t,\varepsilon) = c_\rho^{(1)}(t) - \left( B_0^- \left[ P_{N(Q^*)_d} \left\{ \begin{matrix} \big(P_Y\{L_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \\ l_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \end{matrix} \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}\big)(\cdot) + l\left( \tilde{L}^- \begin{bmatrix} \big(L_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big)(s) + R(x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon) \\ A_{i1} x_k^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix} \right)(\cdot) \right\} \right] \right)(t), \tag{33}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \left( \tilde{G} \begin{bmatrix} Z_0(s,c_0) + L_1[\overline{X}_r(s)c_k + x_k^{(1)}(s,\varepsilon)] + R(x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon) \\ J_{i0}(\tau_i-,c_0) + A_{1i}[\overline{X}_r(\tau_i-)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t) +$$

$$+ \varepsilon \overline{X}(t) Q^+ \Big\{ J_0(\cdot,c_0) + l_1\big[\overline{X}_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}.$$

Промежуток $[0,\varepsilon_*] \subseteq [0,\varepsilon_0]$, на котором итерационной процесс (33) сходится, можно определять с помощью мажорирующих уравнений Ляпунова [8] аналогично тому, как это сделано в случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных систем [3, 7].

***Замечания.*** **3.** Если линейный оператор $B_0$ — нетеров и $\dim\ker N(B_0) = 0$, то слабонелинейная краевая задача (21) имеет единственное решение $z(t,\varepsilon) \in D^n SC_0$, обращающееся в порождающее решение $z(t,c_0)$ с константой $c_0$, удовлетворяющей системе уравнений для порождающих амплитуд (22).

**4.** Если линейный оператор $B_0$ — фредгольмов и $\dim\ker N(B_0) = 0$, то вследствие того, что $P_{Y_1} = 0$, $P_{N(B_0)} = 0$, условие (32) будет автоматически выполняться. В этом случае слабонелинейная импульсная краевая задача (21) также будет иметь единственное решение и в итерационной процедуре (33) вместо обобщенного обратного оператора $B_0^-$ будет стоять обратный оператор $B_0^{-1}$.

**5.** Если исходное операторное уравнение (4) является всюду разрешимым $(\dim\ker L^* = 0)$, то проектор $P_Y$ будет равен нулю и условие (32) примет вид $P_{Y_1} P_{N(Q^*)_d} = 0$.

В качестве примера такой краевой задачи приведем слабонелинейную краевую задачу для импульсной дифференциальной системы с запаздыванием.

**Слабонелинейные краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием.** В обозначениях [4] рассмотрим слабонелинейную краевую задачу для импульсной дифференциальной системы с запаздыванием

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) - A(t)(S_h z)(t) = f(t) + \varepsilon Z((S_h z),t,\varepsilon),$$
$$\Delta\big|_{t=\tau_j} - B_j z(\tau_i-) = a_j + \varepsilon J_j((S_h z)(\tau_j-,\varepsilon),\varepsilon), \tag{34}$$
$$lz = \alpha + \varepsilon J((S_h z)(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

в предположении что:

$\mathrm{b}_1$) столбцы $(n \times N)$-мерной матрицы $A(t)$ и $n$-мерный вектор $f(t)$ принадлежат пространству $L^n$;

$\mathrm{b}_2$) $S_h\colon D^n \to L^N$ — оператор внутренней суперпозиции, определенный равенством $S_h = \mathrm{col}\,[S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_k}]$, $h_i(t)$ измеримы на $[a,b]$, $h_i(t) \le t$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $N = nk$;

$\mathrm{b}_3$) нелинейная $n$-мерная вектор-функция $Z(y,t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по $y$, непрерывна по $\varepsilon$ и суммируема по $t$ в окрестности $\varepsilon = 0$ и решений $z(t, c_0)$ порождающей краевой задачи;

b$_4$) нелинейные $n$- и $m$-мерные функционалы $J_j(y(\tau_j-, \varepsilon), \varepsilon)$ и $J(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по первому аргументу непрерывно дифференцируемы (по Фреше) в окрестности $z(t, c_0)$, $\varepsilon = 0$, непрерывны по $\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$;

b$_5$) $l$ — линейный ограниченный $m$-мерный векторный функционал, $l\colon D^nS \to R^m$; $a_j \in R^n$, $j = 1, 2, \ldots, p$;

b$_6$) $\alpha \in R^m$.

Ставится задача об определении условий существования и алгоритма построения решения $z(t, \varepsilon)$, принадлежащего пространству $D^nS$ по первому аргументу и пространству непрерывных функций $C[0, \varepsilon_0]$ по второму аргументу, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в одно из порождающих решений $z_0(t, c_r)$ порождающей краевой задачи, получающейся из (34) при $\varepsilon = 0$.

Предположим, что для $f(t) \in L^n$, $\alpha \in R^m$, $a_j \in R^n$ выполнены условия теоремы 2, которые вследствие всюду разрешимости (условие (17) всегда выполнено) задачи Коши для системы с запаздыванием будут иметь вид [4]

$$P_{N(Q^*)_d}\left\{\alpha - l\int_a^b \overline{K}(\cdot, s)f(s)\,ds - \sum_{i=1}^{p} l\overline{X}_i(\cdot)a_i\right\} = 0,$$

где

$$\overline{K}_i(t, s) = X(t)\prod_{\nu=k}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + B_\nu)X(\tau_\nu)X^{-1}(\tau_i)B_i K(\tau_i, \varepsilon),$$

$$\overline{X}_i(t) = X(t)\prod_{\nu=k}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + B_\nu)X(\tau_\nu)X^{-1}(\tau_i),$$

$$a < \tau_{k-1} < s < \tau_i < \tau_k < t \le \tau_{k+1} < b.$$

Здесь

$$\prod_{\nu=k}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + B_\nu)X(\tau_\nu) = E,$$

если $k > i + 1$; $K(t, s)$ — матрица Коши дифференциальной системы с запаздыванием. В этом случае порождающая краевая задача для (34) имеет $r$-параметрическое семейство решений, которое для импульсных систем с запаздыванием записывается в виде [4]

$$z(t, c_r) = \overline{X}_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_j \end{bmatrix}\right)(t) + \overline{X}(t)Q^+\alpha,$$

где $\overline{X}_r(t) = \overline{X}_r(t)P_{N(Q)_r}$ — $(n \times r)$-мерная фундаментальная матрица однородной импульсной краевой задачи (5), (6);

$$\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$$

— обобщенный оператор Грина полуоднородной импульсной краевой задачи (5), (6), имеющий вид

$$\left(G\begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_j \end{bmatrix}\right)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds - \overline{X}(t)Q^+ l\int_a^b K(\cdot,s)f(s)\,ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_a^{\tau_i}\overline{K}_i(t,s)f(s)\,ds - \overline{X}(t)Q^+\sum_{i=1}^{p} l\int_a^{\tau_i}\overline{K}_i(\cdot,s)f(s)\,ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\overline{X}_i(t)a_i - \overline{X}(t)Q^+\sum_{i=1}^{p} l\overline{X}_i(\cdot)a_i + \overline{X}(t)Q^+\alpha.$$

Необходимое и достаточное условия существования решений краевой задачи (34) состоят в следующем.

**Теорема 5** *(необходимое условие). Пусть слабонелинейная краевая задача* (34) *с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени имеет решение $z(t,\varepsilon)\in D^nSC$ обращающееся при $\varepsilon=0$ в одно из порождающих решений $z_0(t,c_r)$ порождающей для задачи* (34) *линейной нетеровой краевой задачи с константой $c_r=c_0\in R^r$. Тогда вектор $c_0$ удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд типа* (22):

$$P_{N(Q^*)_d}\left\{J((S_hz_0)(\cdot,c_r),0) - l\int_a^b \overline{K}_i(\cdot,s)Z((S_hz_0)(\cdot,c_r)(s),s,0)\,ds - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} l\overline{X}_i(\cdot)J_j((S_hz_0)(\dot{\tau}_j,c_r),0)\right\} = 0, \tag{35}$$

*где $P_{N(Q^*)_d}$ — $(d\times m)$-матрица, строки которой — $d$-линейно независимые строки матрицы $P_{N(Q^*)}: R^m\to N(Q^*)$, $Q=lX(\cdot)$, $X(t)$ — фундаментальная матрица импульсной дифференциальной системы с запаздыванием.*

Заметим, что вследствие всюду разрешимости исходной импульсной дифференциальной системы с запаздыванием система (22) состоит из одного уравнения.

Для нахождения достаточных условий существования, а также алгоритма построения решения краевой задачи (34) она описанным выше способом сводится к эквивалентной операторной системе, анализируя которую, получаем достаточное условие существования решения $z(t,\varepsilon)$ исходной краевой задачи.

Проведя замену переменной $z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0)+x(t,\varepsilon)$, где $z_0(t,c_0)$ — порождающее решение с векторной константой $c_0\in R^r$, удовлетворяющей уравнению для порождающих амплитуд (35), получим краевую задачу

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t)-A(t)S_hx(t)+Z((S_h[z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon)]),t,\varepsilon), \quad t\neq\tau_i,$$

$$\Delta|_{t=\tau_j}-B_jx(\tau_i-) = \varepsilon J_j(S_h[z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon)](\tau_j-),\varepsilon),$$

$$lx(\cdot) = \varepsilon J(S_h[z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon)],\varepsilon)$$

для нахождения отклонения $x(t,\varepsilon)$ от порождающего решения, принадлежащего пространству $D^nSC$ и обращающегося в нуль при $\varepsilon=0$.

Используя условия $b_3$) и $b_4$), на нелинейности $Z, J_j, J$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0)$ выделим у вектор-функций $Z(S_h[z_0+x],t,\varepsilon)$, $J_j(S_h[z_0+x],\varepsilon)$, $J(S_h[z_0+x],\varepsilon)$ линейную часть по $x$ и члены нулевого порядка по $\varepsilon$:

$$Z((S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon]) (t), t, \varepsilon) = Z((S_h z_0(\cdot, c_0)) (t), t, 0) +$$
$$+ A_1(t)(S_h x(\cdot, \varepsilon))(t) + R((S_h x(\cdot, \varepsilon)(t), t, \varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = A_1(t, c_0) = \left.\frac{\partial Z(S_h z, t, 0)}{\partial S_h z}\right|_{(S_h z)(t) = (S_h z_0)(t, c_0)}$$

— $(n \times N)$-матрица класса $L^n$,

$$R(0, t, 0) = 0, \qquad \partial R(0, t, 0) / \partial S_h x = 0,$$

$$J_j(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)])(\tau_j -), \varepsilon) = J_j(S_h z_0(\cdot, c_0))(\tau_j -), 0) +$$
$$+ A_{1j}(S_h x(\cdot, \varepsilon))(\tau_j -) + R_j(S_h(x(\cdot, \varepsilon)(\tau_j -), \varepsilon),$$

где

$$A_{1j} = \left.\frac{\partial J_j(S_h z, 0)}{\partial S_h z}\right|_{S_h z = S_h z_0(\tau_j -, c_0)}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

— $(n \times N)$-мерные постоянные матрицы,

$$R_j(0, 0) = 0, \qquad \partial R_j(0, 0) / \partial S_h x = 0,$$

$$J(S_h[z_0(\cdot, c_0 + x(\cdot, \varepsilon)](\cdot), \varepsilon) = J(S_h z_0(\cdot, c_0))(\cdot), 0) +$$
$$+ l_1(S_h x(\cdot, \varepsilon))(\cdot) + R_0(S_h x(\cdot, \varepsilon)(\cdot), \varepsilon),$$

$l_1$ — линейная часть векторного функционала

$$J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$R_0(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial R_0(0, 0)}{\partial S_h x} = 0.$$

**Теорема 6** *(достаточное условие). Пусть краевая задача* (34) *удовлетворяет условиям* $b_1)$–$b_6)$, *а порождающая краевая задача — условиям теоремы 2. Тогда для каждого значения вектора* $c_0 \in R^r$, *удовлетворяющего уравнению* (35) *для порождающих амплитуд, при выполнении условия*

$$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)_d} = 0$$

*краевая задача* (34) *имеет* $\rho$-*параметрическое семейство решений* $z(t, \varepsilon) \in \in D^n SC$, *обращающееся в порождающее* $z_0(t, c_0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Эти решения можно определить с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*] \subseteq [0, \varepsilon_0]$ *итерационного процесса*

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \overline{X}_\rho(t) c_\rho + \overline{X}_r(t) c_k^{(1)} + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$c_k = P_{N(B_0)_\rho} c_\rho + c_k^{(1)} =$$

$$= P_{N(B_0)_\rho} c_\rho + B_0^+ P_{N(Q^*)_d} \Big\{ l_1 S_h x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(S_h x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- l\int_a^b \overline{K}(\cdot, s)\left[A_1(s)(S_h x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(s) + R(S_h x_k(\cdot, \varepsilon))(s), s, \varepsilon\right]ds -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} l\overline{X}_i(\cdot)\left[A_{1i}(s)(S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(\tau_i-) + R_i(S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(\tau_i-), s, \varepsilon)\right]\right\}, \qquad (36)$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\overline{X}(t)Q^+\left\{J(S_h z_0(\cdot, c_0), 0) + l_1 S_h\left[X_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\right] + \right.$$

$$\left. + R_0(S_h x_k(\cdot, \varepsilon))\right\} + \varepsilon\left(G\left[\begin{array}{l} Z((S_h z_0(\cdot, c_0)(*)), *, 0) + \\ J_j((S_h z_0(\cdot, c_0))(\tau_j-), 0) + \end{array}\right.\right.$$

$$\left.\left.\begin{array}{l} + A_1(*)S_h\left[\overline{X}_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\right](*) + R((S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(*), *, \varepsilon) \\ + A_{1j}S_h\left[\overline{X}_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\right](\tau_j-) + R_j(S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(\tau_j-), \varepsilon) \end{array}\right]\right)(t),$$

$$x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(1)}(t, \varepsilon) = 0,$$

*где*

$$B_0 = P_{N(Q^*)_d}\left\{l_1 S_h\overline{X}_r(\cdot) - l\int_a^b \overline{K}(\cdot, s)A_1(s)S_h\overline{X}_r(\cdot)ds - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} l\overline{X}_i(\cdot)A_{1i}(s)(S_h\overline{X}_r)(\tau_i)\right\}$$

— $(d\times m)$*-мерная постоянная матрица.*

***Замечания.* 6.** В случае, когда $P_{N(B_0)} = 0$, слабонелинейная импульсная задача (34) будет иметь единственное решение $z(t, \varepsilon)\in D^n SC$, обращающееся в порождающее при $\varepsilon = 0$.

**7.** В случае фредгольмовых краевых задач $(m = n)$ из условия $P_{N(B_0)} = 0$ следует $P_{N(B_0^*)} = 0$ и условие $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)_d} = 0$ автоматически выполняется. Из $P_{N(B_0)} = 0$ следует, что $\det B_0 \neq 0$ и в итерационной процедуре (36) вместо $B_0^+$ будет $B_0^{-1}$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 10. – С. 1677–1682.
5. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 208 с.
7. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
8. *Канторович Л. В.* Принцип мажорант Ляпунова и метод Ньютона // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 1. – С. 17–20.

Получено 14.10.96