УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. Х. Шхануков-Лафишев (Кабардино-Балк. ун-т, НИИ ПМА, Нальчик)

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

We establish the convergence of the Rote method for parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions and obtain an *a priori* estimate in the grid norm on a layer of the constructed difference scheme. We prove that the suggested iteration process for the solution of the considered problem converges in small.

Встановлено збіжність методу Роте для параболічного рівняння з нелокальною граничною умовою і отримано апріорну оцінку в сітковій нормі на шарі побудованої різницевої схеми. Доведено збіжність в малому запропонованого ітераційного процесу для розв'язання вихідної задачі.

В проблемах кондуктивного и радиационного теплообмена возникают [1–4] начально-краевые задачи с нелинейным нелокальным граничным условием, содержащим оператор типа Гаммерштейна, вида

$$u_t = \Delta u + f(P, t), \quad P \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \varphi(P, t, u), \quad P \in S, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \varphi_1(P, t, u) - \varepsilon_1 \int\limits_{S_1} R(P, Q)\, \varphi_1(Q, t, u)\, ds_Q, \quad P \in S_1, \quad t > 0,$$

$$u(P, 0) = u_0(P), \quad P \in \Omega.$$

Здесь Ω — область, ограниченная выпуклой S и вогнутой S_1 частями поверхности $\partial\Omega \equiv S \bigcup S_1$; $R(P, Q)$ — непрерывное ограниченное симметричное положительное ядро [5]; $f, \varphi, \varphi_1, \alpha, u_0$ — заданные непрерывные функции своих аргументов; ε_1 — параметр.

Ограничимся рассмотрением двумерных задач для области $\Omega \equiv \{(r, \varphi): r_1 < r < r_2,\ 0 < \varphi \le 2\pi\}$.

1. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \{(r, \varphi): r_1 < r < r_2,\ 0 < \varphi \le 2\pi\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + f(r, \varphi, t), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial r} = g(u) - \varepsilon_1 \int\limits_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g(u(r_1, \psi, t))\, d\psi - \mu_1(\varphi, t), \quad r = r_1, \\ -\frac{\partial u}{\partial r} = \beta u - \mu_2(\varphi, t), \quad r = r_2, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), \quad u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t), \tag{3}$$

где $R(\varphi, \psi)$ — резольвента ядра интегрального уравнения лучистого теплообмена, которая представляется в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$R(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\varphi-\psi)}{4n^2-\varepsilon_1};$$

r_1, r_2, r, t — безразмерные величины; $g(u)$ — известная функция с ограниченной производной $|g'(u)| \le M_1$, ε_1 — постоянная величина; μ_1, μ_2, β — известные непрерывные функции.

Нелокальные задачи вида (1) – (3) возникают при изучении теплового режима в теплопроводящем полом цилиндре $\{r_1 \le r \le r_2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}$ с теплоизлучающими однородными поверхностями $\{r = r_1\}$, $\{r = r_2\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что регулярное решение задачи (1) – (3) существует.

2. Метод Ротэ. В области $(0, T)$ введем сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau : j = 0, 1, 2, \ldots, j_0\}$, $\tau = T/j_0$. В уравнении (1) производную по t заменим разностной производной $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y = y^j$, $\check{y} = y^{j-1}$ и поставим в соответствие (1) – (3) следующую задачу:

$$y_{\bar{t}} = Ly + f(r, \varphi, t), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial r} = g(y) - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g(y(r_1, \psi, t))\, d\psi - \mu_1(\varphi, t), \quad r = r_1, \\ -\frac{\partial y}{\partial r} = \beta y - \mu_2(\varphi, t), \quad r = r_2, \end{gathered} \tag{5}$$

$$y(r, \varphi, 0) = y_0(r, \varphi), \quad y(r, \varphi, t) = y(r, \varphi + 2\pi, t), \tag{6}$$

где

$$Ly = L_r y + L_\varphi y, \quad L_r y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right), \quad L_\varphi y = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}.$$

Обозначим $z = y - u$. Тогда для погрешности z получим задачу

$$z_{\bar{t}} = Lz + \Psi, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial(z+u)}{\partial r} = g(z+u) - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g(z+u)\, d\psi - \mu_1(\varphi, t), \\ -\frac{\partial z}{\partial r} = \beta z, \end{gathered} \tag{8}$$

$$z(r, \varphi, 0) = 0, \quad z(r, \varphi, t) = z(r, \varphi + 2\pi, t), \tag{9}$$

где $\Psi = Lu + f - u_{\bar{t}} = O(\tau)$.

Нелокальное условие (8) перепишем иначе:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial r} + g(z+u) - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g(z+u)\, d\psi - g(u) + g(u) +$$

$$+ \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} Rg(u)\, d\psi - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} Rg(u)\, d\psi - \mu_1(\varphi, t) =$$

$$= g'(\overline{u})\, z - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g'(\overline{u})\, d\psi.$$

Умножим уравнение (7) скалярно на $2\tau rz$:

$$2\tau(z_{\bar{t}}, rz) = 2\tau(Lz, rz) + 2\tau(\Psi, rz). \tag{10}$$

Так как $2\tau z_{\bar{t}} z = z^2 - \check{z}^2 + \tau^2 z_{\bar{t}}^2$, то

$$2\tau(z_{\bar{t}}, rz) = \|r^{1/2} z\|_0^2 - \|r^{1/2}\check{z}\|_0^2 + \tau^2 \|r^{1/2} z_{\bar{t}}\|_0^2,$$

$$(u, v) = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} uvr\,dr\,d\varphi, \quad \|u\|_0^2 = (u, u).$$

Преобразуем правую часть равенства (10) с учетом граничных условий (8), (9) таким образом:

$$2\tau(Lz, rz) = 2\tau\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right), z\right) + 2\tau\left(\frac{1}{r}z_{\varphi\varphi}, z\right) =$$

$$= -2\tau\int_0^{2\pi}\left(\left(r\frac{\partial z}{\partial r}z\Big|_{r_1}^{r_2}\right) - \int_{r_1}^{r_2} r z_r^2\,dr\right)d\varphi + 2\tau\left(\frac{1}{r}z_{\varphi\varphi}, z\right) =$$

$$= -2\tau\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r z_r^2\,dr\,d\varphi - 2\tau\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}z_\varphi^2\,dr\,d\varphi + 2\tau\int_0^{2\pi}\Bigg[r_2\beta z^2(r_2, \varphi, t) -$$

$$- r_1 z(r_1, \varphi, t)\left(g'(\bar{u})\,z(r_1, \varphi, t) - \varepsilon_1\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\,g'(\bar{u})\,z(r_1, \varphi, t)\,d\psi\right)\Bigg]d\varphi.$$

Подставляя полученные равенства в (10), находим

$$\|r^{1/2}z\|_0^2 - \|r^{1/2}\check{z}\|_0^2 + \tau^2\|r^{1/2}z_{\bar{t}}\|_0^2 + 2\tau\|r^{1/2}z_r\|_0^2 + 2\tau\|r^{-1/2}z_\varphi\|_0^2 =$$

$$= -2\tau\int_0^{2\pi} r_2\beta z^2(r_2, \varphi, t)\,d\varphi - 2\tau\int_0^{2\pi} r_1 g'(\bar{u})\,z^2(r_1, \varphi, t)\,d\varphi +$$

$$+ 2\tau\varepsilon_1\int_0^{2\pi}\left[r_1 z(r_1, \varphi, t)\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\,g'(\bar{u})\,z(r_1, \varphi, t)\,d\psi\right]d\varphi + 2\tau(\dot{\Psi}, rz). \tag{11}$$

Будем последовательно оценивать слагаемые, стоящие в правой части (11):

$$\int_0^{2\pi} r_2\beta z^2(r_2, \varphi, t)\,d\varphi \le \frac{C_1 r_2}{r_1}\left(\varepsilon\|r^{1/2}z_r\|_0^2 + C_\varepsilon\|r^{1/2}z\|_0^2\right), \quad |\beta| \le C_1,$$

$$\int_0^{2\pi} r_1 g'(\bar{u})\,z^2(r_1, \varphi, t)\,d\varphi \le M_1\left(\varepsilon\|r^{1/2}z_r\|_0^2 + C_\varepsilon\|r^{1/2}z\|_0^2\right),$$

$$\int_0^{2\pi}\left[r_1 z(r_1, \varphi, t)\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\,g'(\bar{u})\,z(r_1, \psi, t)\,d\psi\right]d\varphi \le$$

$$\le M\left(\int_0^{2\pi} r^{1/2}|z(r_1, \varphi, t)|\,d\varphi\right)^2 \le 2\pi M_2\left(\varepsilon\|r^{1/2}z_r\|_0^2 + C_\varepsilon\|r^{1/2}z\|_0^2\right),$$

$$(\Psi, rz) \le \frac{1}{2}\left(\|r^{1/2}\Psi\|_0^2 + \|r^{1/2}z\|_0^2\right), \quad |Rg'(\bar{u})| \le M_2.$$

При получении этих оценок мы воспользовались известными оценками для значений функции на границе через интеграл по всей области (см. [6]). Здесь C_ε — известная, зависящая от ε положительная постоянная.

Подставляя полученные оценки в (11) при малом ε, получаем

$$\|r^{1/2}z\|_0^2 - \|r^{1/2}\check{z}\|_0^2 + \tau^2\|r^{1/2}z_{\bar t}\|_0^2 + 2\tau\nu\|r^{1/2}z_r\|_0^2 + 2\tau\|r^{-1/2}z_\varphi\|_0^2 \le$$
$$\le \tau\|r^{1/2}\Psi\|_0^2 + \tau M(\varepsilon)\|r^{1/2}z\|_0^2, \tag{12}$$

где

$$\nu = 1 - [M_1 + 2\pi M_2 + C_1 C_2 / C_3]\,\varepsilon > 0.$$

Просуммируем (12) по j' от 1 до j. Тогда будем иметь

$$\|r^{1/2}z^j\|_0^2 + \tau\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z_{\bar t}^{j'}\|_0^2\tau +$$
$$+ 2\nu\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z_r^{j'}\|_0^2 + 2\nu\tau\sum_{j'=1}^{j}\|r^{-1/2}z_\varphi^{j'}\|_0^2 \le$$
$$\le \sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}\Psi^{j'}\|_0^2\tau + M(\varepsilon)\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z^{j'}\|_0^2\tau, \tag{13}$$

где $M(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от τ.

Из оценки (13) имеем

$$[1 - M(\varepsilon)\tau]\,\|r^{1/2}z^j\|_0^2 \le \sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}\Psi^{j'}\|_0^2\tau + M(\varepsilon)\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z^{j'}\|_0^2\tau,$$

откуда на основании леммы 4 из [7] находим

$$\|r^{1/2}z\|_0^2 \le \exp(M(\varepsilon)T)\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}\Psi^{j'}\|_0^2\tau. \tag{14}$$

С помощью (14) из (13) получаем априорную оценку для погрешности

$$\|r^{1/2}z\|_0^2 + \tau\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z_{\bar t}^{j'}\|_0^2\tau +$$
$$+ \sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}z_r^{j'}\|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|r^{-1/2}z_\varphi^{j'}\|_0^2\tau \le M\sum_{j'=1}^{j}\|r^{1/2}\Psi^{j'}\|_0^2\tau, \tag{15}$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная.

Так как $0 < r_1 \le r \le r_2$, то в оценке (15) $r^{1/2}$ всюду можно опустить, выбрав новую постоянную M, т. е.

$$\|z^j\|_1^2 \le M\sum_{j'=1}^{j}\|\Psi^{j'}\|_0^2\tau,$$

где

$$\|z^j\|_1^2 = \|z^j\|_0^2 + \tau\sum_{j'=1}^{j}\|z_{\bar t}^{j'}\|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|z_r^{j'}\|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|z_\varphi^{j'}\|_0^2\tau.$$

Из априорной оценки (15) следует сходимость метода Ротэ со скоростью $O(\tau)$.

3. Конечно-разностные схемы. В области Q_T введем сетку $\omega=\omega_r\times\omega_\varphi\times\times\omega_\tau$, где $\omega_r=\{r_i=ih_r:\ i=1,2,\dots,N-1\}$, $\omega_\varphi=\{\varphi_m=mh_\varphi:\ m=1,2,\dots\dots,M-1\}$, $Nh_r=r_2-r_1$, $h_\varphi=2\pi/M$, $\omega_\tau=\{t_j=j\tau:\ j=0,1,\dots,j_0\}$, $\tau=T/j_0$, и поставим в соответствие дифференциальной задаче (1)–(3) разностную задачу [8]

$$y_t = 0{,}5\,\overline{\Lambda}(\hat{y}+y) + F, \tag{16}$$

где

$$\overline{\Lambda}y = \overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y, \quad \Lambda_\varphi y = r^{-2}y_{\overline{\varphi}\varphi},$$

$$\overline{\Lambda}_r = \begin{cases} \Lambda_r y, & r\in\omega_r; \\ \Lambda_r^- y, & r=r_0; \\ \Lambda_r^+ y, & r=r_N, \end{cases}$$

$$\Lambda_r y = r^{-1}(\overline{r}\,y_{\overline{r}})_r, \quad \overline{r} = r_{i-1/2},$$

$$\Lambda_r^+ y = \frac{r_{N-1/2}\,y_{\overline{r},N} + r_N\beta y_N}{0{,}5h_r r_N},$$

$$\Lambda_r^- y = \frac{r_{1/2}\,y_{\overline{r},1}}{0{,}5h_r r_0} - \frac{1}{0{,}5h_r}g(y(r_0,\varphi,t)) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{0{,}5h_r}\sum_{k=0}^{M-1}R(\varphi,\psi_k)\,g(y(r_0,\varphi_k,t))\,h_\varphi,$$

$$F = \begin{cases} f(r,\varphi,\overline{t}), & (r,\varphi,t)\in\omega; \\ \overline{\mu}_1 = \dfrac{\overline{\mu}_1(\overline{t})}{0{,}5h_r} + f(r_0,\varphi,\overline{t}), & r=r_0; \\ \overline{\mu}_2 = \dfrac{\overline{\mu}_2(\overline{t})}{0{,}5h_r} + f(r_N,\varphi,\overline{t}), & r=r_N, \ \overline{t}=t_{j+1/2}, \end{cases}$$

$$\hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad y_t = \frac{\hat{y}-y}{\tau},$$

$$y_{\overline{r}} = \frac{y(r,\varphi,t) - y(r-h_r,\varphi,t)}{h_r}, \quad y_r = \frac{y(r+h_r,\varphi,t) - y(r,\varphi,t)}{h_r}.$$

Введем следующие обозначения:

$$[u,v] = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N}u_{nm}v_{nm}\,\hbar_r h_\varphi, \quad [u,v]_{(r)} = \sum_{i=0}^{N}u_i v_i\,\hbar_r, \quad \|u\|^2=[u,u],$$

$$(u,v)_{(r)} = \sum_{i=0}^{N}u_i v_i h_r, \quad (u,v]_{(r)} = \sum_{i=1}^{N}u_i v_i\,\hbar_r, \quad [u,v)_{(\varphi)} = \sum_{k=0}^{M-1}u_k v_k h_\varphi, \tag{17}$$

$$\hbar_r = \begin{cases} h_r, & k=1,2,\dots,N-1; \\ h_r/2, & r=0,N, \end{cases}$$

$$y(r,\varphi,0) = u_0(r,\varphi).$$

При построении разностных аналогов граничных условий (2) мы воспользовались уравнением (1), допустив, что оно определено вплоть до границы $r = r_1$, $r = r_2$.

Для погрешности $z = y - u$, как и выше, получаем задачу

$$z_t = 0{,}5\,\overline{\Lambda}(\hat{z} + z) + \Psi, \tag{18}$$

где

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi,$$

$$\overline{\Lambda}_r z = \begin{cases} \Lambda_r z, & r \in \omega_r; \\ \Lambda_r^- z, & r = r_0; \\ \Lambda_r^+ z, & r = r_N, \end{cases}$$

$$z(r, \varphi, 0) = 0,$$

$$\Lambda_r z = r^{-1}(\bar{r}\, z_{\bar{r}})_r,$$

$$\Lambda_r^- z = \frac{r_{1/2}\, z_{\bar{r},1}}{0{,}5 h_r r_0} - \frac{1}{0{,}5 h_r} g[z(r_0, \varphi, t) + u(r_0, \varphi, t)] +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1}{0{,}5 h_r} \sum_{m=0}^{M-1} R(\varphi_k, \varphi_m)\, g[y(r_0, \varphi_m, t) + u_\varphi(r_0, \varphi_m, t)]\, h_\varphi .$$

К правой части последнего соотношения добавим и вычтем выражения $\frac{1}{0{,}5h} g(u(r_0, \varphi, t))$, $\frac{\varepsilon}{0{,}5h} \sum_{m=0}^{M-1} R_{km}\, g[u(r_0, \varphi_m, t) + u_\varphi(r_0, \varphi_m, t)]\, h_\varphi$ и затем применим формулу конечных приращений. Тогда получим

$$\Lambda_r^- z = \frac{r_{1/2}\, z_{\bar{r},1}}{0{,}5 h_r r_0} - \frac{1}{0{,}5 h_r} g'(\overline{u})\, z(r_0, \varphi, t) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{0{,}5 h_r} \sum_{m=0}^{M-1} R_{km}\, g'(\overline{u})\, z(r_0, \varphi_m, t)\, h_\varphi, \quad R_{km} = R(\varphi_k, \varphi_m),$$

$$\Lambda_r^+ z = -\frac{r_{N-1/2}\, z_{\bar{r},N} + r_N \beta z_N}{0{,}5 h_r r_N},$$

$$\Psi = \begin{cases} \psi, & (r, \varphi, t) \in \omega; \\ \nu_1, & r = r_0; \\ \nu_2, & r = r_N, \end{cases}$$

где ψ, ν_1, ν_2 имеют порядок $O(\tau^2 + |h|^2)$, $|h|^2 = h_r^2 + h_\varphi^2$.

Уравнение (18) умножим скалярно на rZ, $Z = \hat{z} + z$ и применим формулу суммирования по частям. Тогда с учетом граничных условий получим тождество

$$[r, Z^2]_t + 0{,}5 \sum_{k=0}^{M-1} (\bar{r}, Z_{\bar{r}}^2]_{(r)} h_\varphi + 0{,}5 \sum_{i=0}^{N} (r^{-1}, Z_{\bar{\varphi}}^2]_{(\varphi)} \hbar_r +$$

$$+ 0{,}5 \sum_{k=0}^{M-1} r_N \beta(\varphi_k, t)\, Z^2(r_N, \varphi_k, t)\, h_\varphi + 0{,}5 \sum_{k=0}^{M-1} r_0\, g'(\overline{u})\, Z^2(r_0, \varphi_k, t)\, h_\varphi =$$

$$= 0{,}5\varepsilon_1 \sum_{k=0}^{M-1} \left[Z(r_0, \varphi_k, t) \sum_{m=0}^{M-1} R_{km}\, g'(\overline{u})\, Z(r_0, \varphi_m, t)\, h_\varphi \right] h_\varphi +$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \{ [\Psi, rZ]_{(r)} + \nu_1 r_0 Z(r_0, \varphi_k, t) + \nu_2 r_N Z(r_N, \varphi_k, t) \} h_\varphi . \qquad (19)$$

Суммы, входящие в тождество (19), будем оценивать с помощью разностного аналога теорем вложения и ε-неравенства Юнга:

$$\sum_{k=0}^{M-1} [\Psi, rZ]_{(r)} h_\varphi \le \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \| r^{1/2} \Psi \|_{(r)}^2 h_\varphi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \| r^{1/2} Z \|_{(r)}^2 h_\varphi ,$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} \nu_1 r_0 Z(r_0, \varphi_k, t) h_\varphi \le \frac{r_0}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \nu_1^2 h_\varphi +$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \left[\frac{\varepsilon}{2} \| r^{1/2} Z_{\bar r} \|_{(r)}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{\varepsilon} \right) \| r^{1/2} Z \|_{(r)}^2 \right] h_\varphi ,$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} \nu_2 r_N Z(r_N, \varphi_k, t) h_\varphi \le \frac{r_N}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \nu_2^2 h_\varphi +$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \left[\frac{\varepsilon}{2} \| r^{1/2} Z_{\bar r} \|_{(r)}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{\varepsilon} \right) \| r^{1/2} Z \|_{(r)}^2 \right] h_\varphi ,$$

где $l = r_2 - r_1$, $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная,

$$\| u]|_{(r)}^2 = \sum_{i=0}^{N} u_{i,r}^2, \quad \| u \|_{(r)}^2 = [u, u].$$

Первая сумма, стоящая в правой части (19), с учетом ограниченности ядра резольвенты интегрального уравнения лучистого теплообмена и $|g'(\overline{u})| \le M_1$ оценивается так:

$$0{,}5\varepsilon_1 \sum_{k=0}^{M-1} \left[Z(r_0, \varphi_k, t) \sum_{m=0}^{M-1} R_{km}\, g'(\overline{u})\, Z(r_0, \varphi_m, t)\, h_\varphi \right] h_\varphi \le$$

$$\le 0{,}5\varepsilon_1 M_2 \sum_{k=0}^{M-1} \left[\varepsilon \| \bar r^{1/2} Z_{\bar r}]|_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{\varepsilon} \right) \| r^{1/2} Z \|_0^2 \right],$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Подставляя последние неравенства в тождество (19) и выбирая ε достаточно малым, получаем

$$[r, Z^2]_t + \nu \sum_{k=0}^{M-1} (\bar r, Z_{\bar r}^2]_{(r)} h_\varphi + 0{,}5 \sum_{i=0}^{N} (r^{-1}, Z_{\bar\varphi}^2]_{(\varphi)} \hbar_r \le$$

$$\le M_3(\varepsilon) \sum_{k=0}^{M-1} \| r^{1/2} Z_{\bar r} \|_{(r)}^2 h_\varphi + M_4(\varepsilon) \sum_{k=0}^{M-1} \left(\| r^{1/2} \Psi \|_{(r)}^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) h_\varphi ,$$

где ν, $M_3(\varepsilon)$, $M_4(\varepsilon)$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Так как $0 < r_1 \le r \le r_2$, то, не нарушая структуры последнего неравенства, r

всюду можно опустить. Суммируя полученное таким образом неравенство по j' от 0 до j, находим

$$\sum_{k=0}^{M-1} \|Z^{j+1}\|_{(r)}^2 h_\varphi + \nu \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \|Z_{\bar r}^{j'}\|_{(r)}^2 h_\varphi \right) \tau +$$

$$+ 0{,}5 \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{i=0}^{N} \|Z_{\bar\varphi}^{j'}\|_{(\varphi)}^2 \hbar_r \right) \tau \le$$

$$\le M_3(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \|Z^{j'+1}\|_{(r)}^2 h_\varphi + \sum_{k=0}^{M-1} \|Z^{j'}\|_{(r)}^2 h_\varphi \right) \tau +$$

$$+ M_4(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \left[\sum_{k=0}^{M-1} \left(\|\Psi\|_{(r)}^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) h_\varphi \right] \tau. \tag{20}$$

Выбирая $\tau < 1/M_3(\varepsilon)$ и применяя лемму 4 из [7] к неравенству (20), получаем оценку

$$\|Z^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Z_{\bar r}^{j'}\|^2 \tau + \sum_{j'=0}^{j} \|Z_{\bar\varphi}^{j'}\|^2 \tau \le$$

$$\le M(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \left[\sum_{k=0}^{M-1} \left(\|\Psi\|_{(r)}^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) h_\varphi \right] \tau. \tag{21}$$

Из (21) следует сходимость разностной схемы при $|h|,\ \tau \to 0$ со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Наличие интегрального оператора типа Гаммерштейна в граничном условии (2) не позволяет строить по исходной схеме (16) схему с расщепляющим оператором. Поэтому для численного решения исходной задачи строим итерационный процесс [9]

$$\frac{\partial \overset{s+1}{y}}{\partial t} = L \overset{s+1}{y} + f(r, \varphi, t),$$

$$\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial r} = g(\overset{s}{u}) - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g(\overset{s}{u}(r_1, \psi, t))\, d\psi - \mu_1(\varphi, t), \quad r = r_1,$$

$$-\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial r} = \beta \overset{s+1}{u} - \mu_2(\varphi, t), \quad r = r_2,$$

$$\overset{s+1}{u}(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), \quad \overset{s+1}{u}(r, \varphi, t) = \overset{s+1}{u}(r, \varphi + 2\pi, t),$$

где s — итерационный индекс,

$$Lu = L_r u + L_\varphi u, \quad L_r u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right), \quad L_\varphi y = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Обозначим $\overset{s+1}{z} = \overset{s+1}{u} - u$. Тогда задача для $\overset{s+1}{z}$ имеет вид

$$\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial t} = L \overset{s+1}{z}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r} = g(\overset{s}{u}) - g(u) - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\,[g(\overset{s}{u}) - g(u)]\,d\psi, \quad r = r_1,$$

$$-\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r} = \beta \overset{s+1}{z}, \quad r = r_2, \tag{23}$$

$$\overset{s+1}{z}(r, \varphi, 0) = 0, \quad \overset{s+1}{z}(r, \varphi, t) = \overset{s+1}{z}(r, \varphi + 2\pi, t). \tag{24}$$

Так как по нашему предположению $g(\overset{s}{u}) - g(u) = g'(\overline{u})(\overset{s}{u} - u)$, $|g'(\overline{u})| \le \le M_1$, то нелокальное условие (23) перепишем так:

$$\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r} = g'(\overline{u})\,\overset{s}{z} - \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g'(\overline{u})\,\overset{s}{z}\,d\psi, \quad r = r_1. \tag{25}$$

Умножим уравнение (22) скалярно на $r\overset{s+1}{z}$:

$$\left(\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial t}, r\overset{s+1}{z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r}\right), r\overset{s+1}{z}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \overset{s+1}{z}}{\partial \varphi^2}, \overset{s+1}{z}\right) \tag{26}$$

и преобразуем каждое слагаемое с учетом граничных условий (24), (25):

$$\left(\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial t}, r\overset{s+1}{z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|r^{1/2}\overset{s+1}{z}\|_0^2, \quad \|u\|_0^2 = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} u^2\,dr\,d\varphi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r}\right), r\overset{s+1}{z}\right) = -\int_0^{2\pi} r_2\beta(\varphi, z)\left[\overset{s+1}{z}(r_2, \varphi, t)\right]^2 d\varphi -$$

$$-\int_0^{2\pi} r_1 g'(\overline{u})\left[\overset{s}{z}(r_1, \varphi, t)\,\overset{s+1}{z}(r_2, \varphi, t)\right]^2 d\varphi +$$

$$+\varepsilon_1 \int_0^{2\pi} r_1 \overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t)\left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, g'(\overline{u})\,\overset{s}{z}(r_1, \psi, t)\,d\psi\right) d\varphi -$$

$$-\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} r(\overset{s+1}{z_r})^2\,dr\,d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\, r(\overset{s+1}{z})_{\varphi\varphi}\overset{s+1}{z}\,dr\,d\varphi = -\|r^{-1/2}\overset{s+1}{z_\varphi}\|_0^2.$$

Подставляя полученные выражения в (26), приходим к интегральному тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|r^{1/2}\overset{s+1}{z}\|_0^2 + \|r^{1/2}\overset{s+1}{z_r}\|_0^2 + \|r^{-1/2}\overset{s+1}{z_\varphi}\|_0^2 +$$

$$+\int_0^{2\pi} r_2\beta\,[\overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t)]^2\,d\varphi + \int_0^{2\pi} r_1 g'(\overline{u})\,\overset{s}{z}(r_1, \varphi, t)\,\overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t)\,d\varphi =$$

$$= \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} r_1 \overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t)\left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\,\overset{s}{z}(r_1, \psi, t)\,d\psi\right) d\varphi. \tag{27}$$

Оценим интегралы, входящие в тождество (27), используя, как и в п. 2, оценки для значений функции на границе через интеграл по области:

$$\int_0^{2\pi} r_2 \beta \overset{s+1}{z}(r_2, \varphi, t)\, d\varphi \le$$

$$\le \frac{C_1 r_2}{r_1}\left(\varepsilon \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_0^2 + C_\varepsilon \| r^{1/2} \overset{s+1}{z} \|_0^2 \right), \quad |\beta| \le C_1, \tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi} r_1 g'(\overline{u}) \overset{s}{z}(r_1, \varphi, t) \overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t)\, d\varphi \le$$

$$\le M_1 \left(\varepsilon \left\| r^{1/2} \overset{s}{z_r} \right\|_0^2 + C_\varepsilon \| r^{1/2} \overset{s}{z} \|_0^2 \right) / 2 +$$

$$+ M_1 \left(\varepsilon \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_0^2 + C_\varepsilon \| r^{1/2} \overset{s+1}{z} \|_0^2 \right) / 2, \quad |g'(\overline{u})| \le M_1, \tag{29}$$

$$\varepsilon_1 \int_0^{2\pi} r_1 \overset{s+1}{z}(r_1, \varphi, t) \int_0^{2\pi} R g'(\overline{u}) \overset{s}{z}(r_1, \psi, t)\, d\psi\, d\varphi \le$$

$$\le M_1 M_2 \varepsilon_1 \pi \left[\varepsilon \left(\left\| r^{1/2} \overset{s}{z_r} \right\|_0^2 + \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_0^2 \right) + \right.$$

$$\left. + C_\varepsilon \left(\| r^{1/2} \overset{s}{z} \|_0^2 + C_\varepsilon \| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \|_0^2 \right) \right], \quad |R| \le M_2. \tag{30}$$

Подставляя оценки (28) – (30) в интегральное тождество и выбирая ε достаточно малым, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \| r^{1/2} \overset{s+1}{z} \|_0^2 + (1 - \varepsilon M_3) \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_0^2 \le$$

$$\le \varepsilon M_4 \left\| r^{1/2} \overset{s}{z_r} \right\|_0^2 + M_5(\varepsilon) \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_0^2 + M_6(\varepsilon) \left\| r^{1/2} \overset{s}{z} \right\|_0^2, \tag{31}$$

где

$$M_3 = \frac{C_1 r_2}{r_1} + M_1 M_2 \pi \varepsilon_1, \quad M_4 = \frac{M_1}{2} + M_1 M_2 \pi \varepsilon_1,$$

$$M_5(\varepsilon) = C_3 M_3, \quad M_6(\varepsilon) = C_3 M_4.$$

Проинтегрируем (31) по τ от 0 до t. Тогда после несложных преобразований будем иметь

$$(1/2 - t M_5(\varepsilon) \max_{0 < t' < t} \| r^{1/2} \overset{s+1}{z}(r, \varphi, t') \|_0^2 + (1 - \varepsilon M_3) \left\| r^{1/2} \overset{s+1}{z_r} \right\|_{2, Q_t}^2 \le$$

$$\le \varepsilon M_4 \| r^{1/2} \overset{s}{z_r} \|_{2, Q_t}^2 + t M_6(\varepsilon) \max_{0 < t' < t} \| r^{1/2} \overset{s}{z} \|_0^2. \tag{32}$$

Введем обозначение $\nu_\varepsilon^t = \min\{[1/2 - t M_5(\varepsilon)], (1 - \varepsilon M_3)\}$ и обе части неравенства (32) разделим на ν_ε^t. Тогда получим

$$\| \overset{s+1}{z} \|_1^2 \le q_\varepsilon^t \| \overset{s}{z} \|_1^2,$$

где

$$\|\overset{s+1}{z}\|_1^2 = \max_{0<t'<t} \|r^{1/2}\overset{s+1}{z}(r,\varphi,t')\|_0^2 + \|r^{1/2}\overset{s+1}{z_r}\|_{2,Q_t}^2,$$

$$q_\varepsilon^t = \max\left\{\frac{M_4\,\varepsilon}{1/2-tM_5}, \frac{tM_6}{1/2-tM_5}, \frac{M_4\,\varepsilon}{1-\varepsilon M_3}, \frac{tM_6}{1-\varepsilon M_3}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $q_\varepsilon^t < 1$ при малом t.

Итак, при малых t итерационный процесс сходится в норме $\|u\|_1$, т. е.

$$\|\overset{s}{z}\|_1^2 \le (q_\varepsilon^t)^s \|\overset{0}{z}\|_1^2, \quad \text{или} \quad \|\overset{s}{u}-u\|_1 \le (q_\varepsilon^t)^{s/2} \|\overset{0}{u}-u\|_1.$$

На каждой итерации можно по исходной схеме (16) строить схему расщепления и ряд одномерных алгоритмов переменных направлений [10].

1. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах // Тр. Моск. мат. о-ва. – М.; Л.: Гостехиздат, 1952. – Т. 1. – С. 186–246.
2. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их приложениях к некоторым задачам математической физики // Вестн. Моск. ун-та. – 1938. – **8**, № 1. – С. 1–25.
3. *Суринов Ю. А.* Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого теплообмена в системах „серых" тел, разделенных диатермической средой // Изв. АН СССР. – 1948. – № 7. – С. 981–1002.
4. *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев: Наук. думка, 1968. – 165 с.
5. *Березовская Л. М.* Температурное поле несимметрично разогреваемой тонкой цилиндрической оболочки // Теорет. и прикл. вопросы дифференц. уравнений и алгебра. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 25–32.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
7. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 2. – С. 266–298.
8. *Фрязинов И. В.* О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат // Там же. – 1971. – **11**, № 5. – С. 1219–1228.
9. *Гордезиани Д. Г.* О методах расчета одного класса нелокальных краевых задач. – Тбилиси, 1981. – 37 с. – (Препринт / Ин-т прикл. математики Гр. АН им. И. Н. Векуа).
10. *Андреев В. Б.* Об одном методе численного решения третьей краевой задачи для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде // Вычислит. методы и программирование. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. – С. 64–75.

Получено 23.07.96