УДК 517. 911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук,
М. А. Тлеубергенова, стажер (Киев. ун-т)

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ СИСТЕМАМИ

Rank conditions for control of linear pulse systems are established. The Pontryagin maximum principle is obtained in sufficient form. An example of control synthesis in a problem for linear pulse systems is given.

Встановлені рангові ознаки керування для лінійних імпульсних систем. В достатній формі одержано принцип максимуму Понтрягіна. Наведено приклад синтезу керування в задачі для лінійних імпульсних систем.

В работах [1, 2] был предложен метод решения задач управления линейными системами, основанный на позиции нормальной разрешимости краевых задач. Близкий подход приведен в [3]. В настоящей статье эти идеи развиваются для импульсных систем.

Зафиксируем вещественные числа $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, и целые числа $r > 0$, $p > 0$. Множество интегрируемых с квадратом функций $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to R^r$ обозначим через $L_2[\alpha, \beta]$, множество последовательностей $\xi_i \in R^r$, $i = \overline{1, p}$, — через $D^r[\overline{1, p}]$. Построим пространство $\Pi_p^r = L_2^r \times D^r$, элементы которого обозначим через $\{\varphi, \xi\}$, и определим в нем скалярное произведение

$$\langle \{\varphi, \xi\}, \{w, \nu\} \rangle = \int\limits_\alpha^\beta (\varphi, w)\, dt + \sum_{i=1}^p (\xi_i, \nu_i),$$

где $(\, , \,)$ — скалярное произведение в R^r.

Рассмотрим импульсную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t) + f(t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t = t_i} = B_i x + D_i v_i + I_i \tag{1}$$

с краевым условием

$$x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, A и C — соответствено $n \times n$- и $n \times m$-мерные матрицы с элементами из $L_2^1[\alpha, \beta]$, B_i и D_i — постоянные соответственно $n \times n$- и $n \times m$-мерные матрицы, t_i, $i = \overline{1, p}$, — строго упорядоченная в промежутке $]\alpha, \beta[$ последовательность. Положим также, что $\det(E + B_i) \neq 0$, $i = \overline{1, p}$. Решения системы (1) — абсолютно непрерывные в каждом из промежутков $[\alpha, t_i]$, $]t_i, t_{i+p}]$ $i = \overline{1, p-1}$, $]t_p, \beta]$ функции.

Будем говорить, что задача управления I разрешима, если для любого $\{f, I\} \in \Pi_p^n$ и для любых $a, b \in R^n$ существует $\{u, v\} \in \Pi_p^m$, при котором краевая задача (1), (2) имеет решение.

Наряду с задачей (1), (2) систему (1) рассмотрим с краевым условием $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ и тогда будем говорить о задаче управления II.

Так же, как и в [2], можно проверить, что задачи управления I и II разрешимы одновременно.

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x \tag{3}$$

— система, соответствующая (1), и

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)y,\ t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = -(E+B_i^T)^{-1}B_i^T y \tag{4}$$

— сопряженная к (3) система (T — знак транспонирования).

В дальнейшем для любой функции $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to R^r$ будем обозначать через $\{\varphi, \varphi\}$ элемент $\{\varphi(t), \varphi(t_i)\}$ пространства Π_p^r.

Аналогично теореме 19.2 из [4] проверяется, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\{F, V\} \in \Pi_p^n$. *Краевая задача*

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t),\ t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + V_i, \\ x(\alpha) = x(\beta) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения системы (4) *справедливо соотношение*

$$\langle \{F, V\}, \{y, y\} \rangle = 0. \tag{6}$$

Следующая теорема позволяет установить справедливость всех дальнейших утверждений.

Теорема 1. *Задача управления* II *разрешима тогда и только тогда, когда лишь нулевое решение уравнения* (4) *удовлетворяет условию*

$$\langle \{Cu, Dv\}, \{y, y\} \rangle = 0, \quad \forall\, \{u, v\} \in \Pi_p^m. \tag{7}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $Y(t) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — фундаментальная матрица решений системы (4), $c \in R^n$. Согласно условию теоремы бесконечная система уравнений

$$\langle \{Yc, Yc\}, \{Cu, Dv\} \rangle = 0, \quad \forall\, \{u, v\} \in \Pi_p^m \tag{8}$$

допускает только тривиальное решение $C = 0$. Покажем, что существует h элементов $\{u^k, v^k\} \in \Pi_p^m$, $k = \overline{1, n}$, для которых матрица

$$N = (\langle \{y_j, y_j\}, \{Cu^k, Dv^k\} \rangle)_{jk}$$

не вырождена.

Предположим противное. Не нарушая общности, будем считать, что последняя строка матрицы N линейно зависит от всех остальных строк. Обозначим через $C = C^*$ ненулевое решение системы

$$\langle \{Yc, Yc\}, \{Cu^k, Dv^k\} \rangle = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{9}$$

Так как для любого $\{u, v\} \in \Pi_p^m$ существуют постоянные μ_k, для которых

$$\langle \{y_j, y_j\}, \{Cu, Dv\} \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \langle \{y_j, y_j\}, \{Cu^k, Dv^k\} \rangle,$$

то из (9) следует, что равенство (8) справедливо при ненулевом векторе $C = C^*$.

Следовательно, матрица N не вырождена.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) - C(t)\sum_{k=1}^{n} c_k n^k(t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x + I_i - D_i \sum_{k=1}^{n} c_k v_i^k,$$

$$x(\alpha) = x(\beta) = 0,$$

где $\{u^k, v^k\}$ — определенные выше элементы из Π_p^m. Для того чтобы эта задача была разрешима, в силу леммы 1 достаточно существования решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \{y_j, y_j\}, \{Cu^k, Dv^k\} \rangle c_k = \langle \{y_j, y_j\}, \{f, I\} \rangle, \quad j = \overline{1, n},$$

что имеет место в силу невырожденности матрицы N.

Необходимость. Предположим противное: задача управления II разрешима, и существует ненулевое решение y уравнения (4), удовлетворяющее условию (7). Нетрудно показать, что существует $\{f, I\} \in \Pi_p^n$, для которого справедливо соотношение $\langle \{f, I\}, \{y, y\} \rangle \neq 0$. Зафиксируем данный элемент. Тогда, складывая последнее неравенство и соотношение (7), получаем, что $\langle \{y, y\}, \{Cu + f, Dv + I\} \rangle \neq 0$, а это противоречит критерию существования решения краевой задачи. Теорема доказана.

Следствием доказанной теоремы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Задача управления* I *разрешима тогда и только тогда, когда для любых* $t \in [\alpha, \beta]$ *и* $i = \overline{1, p}$ *выполняются соотношения*

$$\det(C^T(t)Y(t)) \neq 0, \quad \det(D_i^T Y(t_i)) \neq 0. \tag{10}$$

Последнюю теорему можно применить для обоснования критерия Калмана в решении задачи управления импульсными системами.

Рассмотрим систему с постоянной матрицей коэффициентов

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Cu + f(t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = Du_i + I_i, \tag{11}$$

$$x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b,$$

в которой матрицы A, C и D постоянны. С помощью выражений (10) устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Для разрешимости задачи управления* I *в случае системы* (11) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$(C, AC, \ldots, A^{n-1}C, D, AD, \ldots, A^{n-1}D)$$

был равен n.

Сформулируем еще один критерий разрешимости задачи управления I, являющийся следствием предыдущих теорем.

Пусть Γ — матрица Грамма для системы элементов $\{C^T y_i, D^T y_i\}$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 4. *Для разрешимости задачи управления* I *необходимо и достаточно, чтобы матрица Грамма* Γ *была невырожденной.*

Построим разрешающее управление для задачи управления I.

Теорема 5. *Если задача управления* I *разрешима, то управление вычисляемое по формулам*

$$U(t) = C^T(t)Y(t)\Gamma^{-1}\left[Y^T(\beta)b - Y^T(\alpha)a - \int_\alpha^\beta Y^T(t)f(t)dt + \sum_{i=1}^p Y^T(t_i)I_i \right],$$

$$W_i = D_i^T Y^T(t_i)\Gamma^{-1}\left[Y^T(\beta)b - Y^T(\alpha)a - \int_\alpha^\beta Y^T(t)f(t)dt + \sum_{i=1}^p Y^T(t_i)I_i \right] \qquad (12)$$

является разрешающим.

Доказательство. В краевой задаче I произведем замену переменных $x = z + \varphi(t)$, где φ — произвольная непрерывная вместе со своей производной функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи I, т. е. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и, кроме того, условиям $\varphi(t_i) = 0$, $i = \overline{1, p}$. Такую функцию нетрудно построить. Например, в качестве φ можно взять полином Лагранжа.

После замены переменных получим задачу управления II в виде

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + C(t)u + f(t) + [\dot{\varphi}(t) - A(t)\varphi(t)], \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta z|_{t=t_i} = B_i z - D_i v_i + I_i, \quad z(\alpha) = z(\beta) = 0,$$

для разрешимости которой согласно лемме 1 необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_\alpha^\beta Y^T(t)[C(t)u(t) + f(t)]\,dt + \sum_{i=1}^p Y^T(t_i)[D_i u_i + I_i] =$$

$$= \int_\alpha^\beta Y^T(t)[\dot{\varphi}(t) - A(t)\varphi(t)]\,dt, \quad \forall \{u, v\} \in \Pi_p^m. \qquad (13)$$

Пусть y_k — k-й столбец матрицы $Y(t)$. Интегрируя по частям, находим, что

$$\int_\alpha^\beta (y_k, \dot{\varphi})\,dt = (y_k(\beta), \varphi(\beta)) - (y_k(\alpha), \varphi(\alpha)) - \int_\alpha^\beta (\dot{y}_k, \varphi)\,dt.$$

Отсюда и из (13) получаем, что соотношение

$$\int_\alpha^\beta Y^T(t)[C(t)u(t) + f(t)]\,dt + \sum_{i=1}^p Y^T(t_i)[D_i u_i + I_i] = Y^T(\beta)b - Y^T(\alpha)a \qquad (14)$$

необходимо и достаточно для разрешимости задачи управления I.

Подставляя выражения

$$U = C^T(t)Y(t)c, \qquad W_i = D_i^T Y(t_i)c \qquad (15)$$

в (14), относительно вектора c получаем систему линейных уравнений. Подставляя решения этой системы в (15), имеем выражения (12). Теорема доказана.

Разрешающее управление (12) позволяет описать все множество разрешающих управлений задачи I. Для того чтобы управление $\{u, v\}$ было разрешающим для этой задачи, необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде $u = U + \xi$, $u_i = W_i + \nu_i$ где $\{\xi, \nu\}$ — ортогональный всем парам вида

$\{C^T y_k, D^T y_k\}$, $k=\overline{1,n}$, элемент пространства Π_p^m. При этом выполняется соотношение $\langle\{U,W\},\{\xi,\nu\}\rangle=0$.

Введем в пространстве Π_p^m норму $\|u,v\|_m=\langle\{u,v\},\{u,v\}\rangle^{1/2}$.

Аналогично [5] можно показать, что управление $\{U,W\}$, определенное по формулам (12), имеет наименьшую в Π_p^m норму среди всех разрешающих управлений задачи управления I.

На основе полученных выше результатов рассмотрим задачу о быстродействии для линейных импульсных систем. Ранее подобная задача в общем случае была изучена в работе [6].

Пусть дана краевая задача

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+C(t)u+f(t),\quad t\neq t_i,$$

$$\Delta z|_{t=t_i}=B_i x-D_i v_i+I_i, \tag{16}$$

$$x(0)=a,\quad x(\beta)=b,$$

в которой A, C определены для любого момента времени $t\geq 0$, B_i и D_i — ограниченные последовательности, конечный момент времени $\beta>0$ может быть любым. Определим пространство-произведение $\Pi_p^r(\beta)=L_2^r[0,\beta]\times\times D^r[\overline{1,p}]$, для которого t_i, $i=\overline{1,p}$, — точки разрыва функций из $L_2^r[0,\beta]$, образующие упорядоченную последовательность в промежутке $(0,\beta)$.

Полагаем,что управление $\{u,v\}$ может выбираться только из ограниченного множества $\Delta\times\Delta'\subset\Pi_p^m(\beta)$, $\beta>0$.

Задача о быстродействии заключается в том, чтобы по заданному элементу $\{f,I\}$, принадлежащему пространству $\Pi_p^m(\beta)$ при любом $\beta>0$, найти управление $\{u,v\}$, разрешающее задачу (15) за наименьшее время.

Зафиксируем положительное число β. Будем говорить, что управление $\{u,v\}$ при векторе $c=c_0$ в области $\Delta\times\Delta'$ удовлетворяет условию Понтрягина, если оно в этом множестве доставляет максимум для выражения $c_0^T Y^T(t)\times\times C(t)u(t)$ при почти всех $t\in[0,\beta]$ и максимум для выражений $c_0^T Y^T(t_i)D_i v_i$, $i=\overline{1,p}$.

Теорема 6. *Пусть управление $\{u,v\}$ разрешает задачу управления для системы* (16) *за время $\beta>0$, удовлетворяет при некотором векторе $c=c_0$ в области $\Delta\times\Delta'$ условию Понтрягина и, кроме того, выражение $c_0^T Y(t)\times\times[C(t)u(t)+f(t)+A(t)b]$ положительно при почти всех $t\in[0,\beta]$, а числа $c_0^T Y^T(t_i)[D_i v_i+I_i+B_i(E+B_i)^{-1}b]$ положительны при всех $i=\overline{1,p}$. Тогда управление $\{u,v\}$ и соответствующая ему траектория являются оптимальными в смысле быстродействия.*

Доказательство. Согласно (14) имеем

$$\int_\alpha^\beta Y^T(t)[C(t)u(t)+f(t)]\,dt+\sum_{0<t_i<\beta}Y^T(t_i)[D_i v_i+I_i]=Y^T(\beta)b-Y^T(0)a. \tag{17}$$

Фундаментальная система решений сопряженного уравнения (4) удовлетворяет равенству [4]

$$Y(\beta) = Y(0) - \int_0^{\beta} A^T(t)Y(t)\,dt - \sum_{0<t_i<\beta} (E + B_i^T)^{-1} B_i^T Y(t_i),$$

подставляя которое в (17), затем транспонируя и полагая, что $Y(0) = E$, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} Y^T(t)[\,C(t)u(t) + f(t) + A(t)b\,]\,dt +$$

$$+ \sum_{0<t_i<\beta} Y^T(t_i)[D_i v_i + I_i + B_i(E+B_i)^{-1}b] = b - a. \tag{18}$$

Предположим противное, т. е. существует управление $\{\bar{u}, \bar{v}\}$, которое за время $\tau < \beta$ переводит точку $x(0) = a$ в положение $x(\tau) = b$. Тогда

$$\int_0^{\tau} c_0^T Y^T(t)[\,C(t)\bar{u}(t) + f(t) + A(t)b\,]\,dt +$$

$$+ \sum_{0<t_i<\tau} c_0^T Y^T(t_i)[D_i \bar{v}_i + I_i + B_i(E+B_i)^{-1}b] = c_0^T(b-a).$$

Вычитая последнее равенство почленно из (18), которое предварительно умножим на вектор c_0^T, имеем

$$\int_0^{\tau} c_0^T Y^T(t)C(t)[\,u(t) - \bar{u}(t)\,]\,dt + \int_0^{\beta} c_0^T Y^T(t)[\,C(t)u(t) + f(t) + A(t)b\,]\,dt +$$

$$+ \sum_{0<t_i<\tau} c_0^T Y^T(t_i) D_i [v_i - \bar{v}_i(t)] + \sum_{\tau<t_i<\beta} c_0^T Y^T(t_i)[D_i v_i + I_i + B_i(E+B_i)^{-1}b] = 0.$$

В последнем равенстве согласно условиям теоремы первое и третье слагаемые неотрицательны, а второе и четвертое — положительны. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы* 6 *и* $x(t)$ *— оптимальная траектория, соединяющая точки* $x(0) = a$ *и* $x(\beta) = b$. *Тогда любой кусок этой траектории, соединяющий точки* $x(t_1)$ *и* $x(t_2)$, $0 \le t_1 \le t_2 \le \beta$, *будет также оптимальной траекторией.*

Применим теперь теорему 6 и ее следствие для синтеза оптимального в смысле быстродействия управления.

Пример. Пусть $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в точках $t = i$, i — целые числа, имеющую вид

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad t \ne i, \quad \Delta x|_{t=i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_i, \tag{19}$$

где функция u и последовательность v принимают значения в R, $|u| \le 1$, $|v_i| \le 1$.

Исследуем задачу быстродействия в случае, когда $x(0)$ — произвольная точка плоскости Ox_1x_2 и $x(\beta) = 0$ — начало системы координат.

Сравнивая (19) с (11), находим, что достаточные условия управляемости, определенные теоремой 3, выполнены, так как

$$\operatorname{rank}(C, AC, D, AD) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Фундаментальная матрица решений системы $dy/dt = -A^T y$ равна

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя эту матрицу, согласно теореме 6 получаем, что условия оптимальности управления $\{u, v\}$ принимают вид

$$ktu = \min_{\overline{u} \in \Delta} kt\overline{u}, \quad kiv_i = \min_{\overline{v} \in \Delta'} ki\overline{v}_i, \tag{20}$$

$$ktu < 0, \quad kiv_i < 0, \tag{21}$$

где k — вещественное число, $t \geq 0$ и $i > 0$.

Рассмотрим случаи $k > 0$ и $k < 0$.

1. Пусть $k > 0$. Тогда из (20) и (21) следует, что оптимальное управление равно $\{u, v\} = \{-1, -1\}$ и система (19) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \neq i, \quad \Delta x|_{t=i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

2. Пусть $k < 0$. В этом случае оптимальное управление равно $\{u, v\} = \{1, 1\}$ и уравнение (19) записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq i, \quad \Delta x|_{t=i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Симметричное для L относительно начала координат множество обозначим через L'. Пусть $\overline{L} = L \cup L'$. Множество $\overline{L}$ является фигурой на плоскости Ox_1x_2, делящей ее на две части: „нижнюю" и „верхнюю". Из любой точки „нижней" части можно попасть по оптимальной траектории в начало координат лишь с переключением на фигуре L. До переключения изображающая точка движется согласно уравнению (23). Переключение происходит при достижении граничной точки множества L. Опишем механизм переключения. Возможны следующие случаи.

а) Изображающая точка встречает множество L при $t = \tau$ в точке, принадлежащей дуге одной из фазовых траекторий, соединяющей точки $\overline{x}(i+)$ и $\overline{x}(i+1)$, где $\overline{x}$ — решение системы (22), причем точка $x(\tau)$ может попасть и в точку $\overline{x}(i+)$ (случаи, когда $x(\tau) = \overline{x}(i+1)$ будет рассмотрен ниже).

Тогда дальнейшее движение будет осуществлено по траектории решения $\overline{\overline{x}}(t)$ системы (22), для которого $\overline{\overline{x}}(1 - \overline{x}_2(i+1) - x_2(\tau)) = x(\tau)$. Таким образом, если точка $\overline{\overline{x}}(t)$ попадет в точку $x = 0$ в момент $t = \tau_1$, то оптимальное время равно $t_{\text{опт}} = \tau + \tau_1 - 1 + \overline{x}_2(i+1) - x_2(\tau)$.

б) Пусть траектория, начинающаяся в „нижней" части, в момент $t = \tau$ встречает границу множества L в точке, принадлежащей отрезку, соединяющему точки $\overline{x}(i)$ и $\overline{x}(i+)$, и не являющейся точкой $\overline{x}(i+)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда, применив дополнительный импульс величиной $\overline{v} = \overline{x}_2(i+) - x_2(\tau)$, осуществим перевод точки $x(\tau)$ в положение $\overline{x}(i+)$.

В результате движение будет осуществляться по траектории решения $\overline{\overline{x}}(t)$ уравнения (22), удовлетворяющего начальному условию $\overline{\overline{x}}(0) = \overline{x}(i+)$ и выходящего из начального положения без скачка.

Заметим, что уравнения (22) и (23) в отличие от аналогичных систем для уп-