УДК 530.145; 517.958; 519.214

О. Вал. Антонюк,
О. Вікт. Антонюк, кандидати фіз.-мат. наук,
Ю. Г. Кондратьєв, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕКОМУТАТИВНА ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГІББСОВИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ СТАНІВ*

For Gibbs temperature states, the scheme for proving noncommutative central limit theorem is given by using the commutative central limit theorem for corresponding Euclidean measures. Applications are constructed for the medel of temperature unharmonic crystal and generalized Ising model with compact continuous configuration space.

Наведена схема доведення некомутативної центральної граничної теореми для гіббсових температурних станів з використанням комутативної центральної граничної теореми для відповідних евклідових мір. Одержані застосування до моделі температурного ангармонійного кристалу та узагальненої моделі Ізінга з компактним неперервним конфігураційним простором.

Некомутативна центральна гранична теорема (ЦГТ) для температурних станів на алгебрі локальних спостережуваних має важливе значення як у рамках абстрактного алгебраїчного підходу, так і в застосуваннях до важливих модельних ситуацій [1, 2]. Головна проблема полягає у наявності некомутативності, яка ускладнює одержання некомутативної ЦГТ у порівнянні з класичним випадком ЦГТ у теорії імовірностей. Умови, за яких виконана некомутативна ЦГТ, можуть бути сформульовані, наприклад, таким чином. Нехай $\mathbb{Z}^d$ — d-вимірна гратка, кожному вузлу якої відповідає простір станів k-тої квантової частинки $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$, де $\mathcal{A}$ є C^*-алгебра операторів. Алгебру локальних спостережуваних на гратці $\mathcal{A}_{\text{loc}} = \bigcup_{\lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\lambda| < \infty} \mathcal{A}_\Lambda$ задамо як об'єднання алгебр локальних спостережуваних у скінченних об'ємах $\mathcal{A}_\Lambda = \bigotimes_{k \in \Lambda} \mathcal{A}_k$.

Нехай ρ — додатний інваріантний відносно трансляцій гратки нормований лінійний стан на алгебрі локальних спостережуваних, для якого має місце досить швидке спадання кореляцій: $\forall\, A, B \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\rho(A\theta_k B) - \rho(A)\rho(B)| < \infty, \tag{1}$$

де θ_k — оператор зсуву на вектор гратки $k \in \mathbb{Z}^d$. Тоді, як доведено в [1], стан ρ задовольняє некомутативну ЦГТ. Тобто для послідовності локальних операторів

$$B^\Lambda = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{k \in \Lambda} (\theta_k B - \rho(B)), \quad B \in \mathcal{A}_{\text{loc}},$$

має місце збіжність на стані ρ, коли $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ [1, 3].

Справедливість умови (1) може бути перевірена, наприклад, у випадку, коли $\mathcal{A}_k$ є деяка скінченновимірна матрична алгебра [3]. Проте наявність умови (1) принципово не може бути досліджена безпосередньо для важливих модельних ситуацій з нескінченновимірним простором станів. Наприклад, для важливої у застосуваннях моделі ангармонійного температурного кристалу.

У даній роботі ми пропонуємо схему доведення некомутативної ЦГТ, яка використовує зв'язок між абстрактними КМШ станами і відповідними періодичними стохастичними процесами [4]. Фактично ми одержимо некомутативну

* Робота частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки і технологій.

УДК 530.145; 517.958; 519.214

О. Вал. Антонюк,
О. Вікт. Антонюк, кандидати фіз.-мат. наук,
Ю. Г. Кондратьєв, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕКОМУТАТИВНА ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГІББСОВИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ СТАНІВ*

For Gibbs temperature states, the scheme for proving noncommutative central limit theorem is given by using the commutative central limit theorem for corresponding Euclidean measures. Applications are constructed for the medel of temperature unharmonic crystal and generalized Ising model with compact continuous configuration space.

Наведена схема доведення некомутативної центральної граничної теореми для гіббсових температурних станів з використанням комутативної центральної граничної теореми для відповідних евклідових мір. Одержані застосування до моделі температурного ангармонійного кристалу та узагальненої моделі Ізінга з компактним неперервним конфігураційним простором.

Некомутативна центральна гранична теорема (ЦГТ) для температурних станів на алгебрі локальних спостережуваних має важливе значення як у рамках абстрактного алгебраїчного підходу, так і в застосуваннях до важливих модельних ситуацій [1, 2]. Головна проблема полягає у наявності некомутативності, яка ускладнює одержання некомутативної ЦГТ у порівнянні з класичним випадком ЦГТ у теорії імовірностей. Умови, за яких виконана некомутативна ЦГТ, можуть бути сформульовані, наприклад, таким чином. Нехай $\mathbb{Z}^d$ — d-вимірна гратка, кожному вузлу якої відповідає простір станів k-тої квантової частинки $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$, де $\mathcal{A}$ є C^*-алгебра операторів. Алгебру локальних спостережуваних на гратці $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty} \mathcal{A}_\Lambda$ задамо як об'єднання алгебр локальних спостережуваних у скінченних об'ємах $\mathcal{A}_\Lambda = \bigotimes_{k \in \Lambda} \mathcal{A}_k$.

Нехай ρ — додатний інваріантний відносно трансляцій гратки нормований лінійний стан на алгебрі локальних спостережуваних, для якого має місце досить швидке спадання кореляцій: $\forall A, B \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left|\rho(A\theta_k B) - \rho(A)\rho(B)\right| < \infty, \tag{1}$$

де θ_k — оператор зсуву на вектор гратки $k \in \mathbb{Z}^d$. Тоді, як доведено в [1], стан ρ задовольняє некомутативну ЦГТ. Тобто для послідовності локальних операторів

$$B^\Lambda = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{k \in \Lambda} (\theta_k B - \rho(B)), \quad B \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}},$$

має місце збіжність на стані ρ, коли $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ [1, 3].

Справедливість умови (1) може бути перевірена, наприклад, у випадку, коли $\mathcal{A}_k$ є деяка скінченновимірна матрична алгебра [3]. Проте наявність умови (1) принципово не може бути досліджена безпосередньо для важливих модельних ситуацій з нескінченновимірним простором станів. Наприклад, для важливої у застосуваннях моделі ангармонійного температурного кристалу.

У даній роботі ми пропонуємо схему доведення некомутативної ЦГТ, яка використовує зв'язок між абстрактними КМШ станами і відповідними періодичними стохастичними процесами [4]. Фактично ми одержимо некомутативну

* Робота частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки і технологій.

ЦГТ як наслідок комутативної ЦГТ для евклідових мір, що відповідають квантовій температурній системі. Умови для її виконання можуть бути одержані для досить широкого класу моделей з нескінченновимірним простором станів кожної частинки.

1. Розглянемо модельну ситуацію. Нехай M — компактний ріманів многовид з оператором Лапласа – Бельтрамі Δ. Відповідна півгрупа є ядерним оператором в $L_2(M,\sigma)$, де σ — канонічна ріманова міра. Відповідно до [4] з гіббсовим станом ρ_β при скінченній температурі, $\beta > 0$ на алгебрі обмежених операторів в $L_2(M,\sigma)$,

$$\rho_\beta(F) = \left[\operatorname{tr}_{L_2}(e^{\beta\Delta})\right]^{-1} \operatorname{tr}_{L_2}(F e^{\beta\Delta})$$

— однозначно асоційована імовірнісна міра $\nu_0(\omega(\cdot))$ на просторі Ω неперервних β-періодичних траєкторій зі значеннями в M (M наділене топологією рівномірної збіжності). Ця міра однозначно задається співвідношенням: $\forall\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \beta$

$$\left[\operatorname{tr}(e^{\beta\Delta})\right]^{-1} \operatorname{tr}(F_0 e^{t_1\Delta} F_1 e^{(t_2-t_1)\Delta} F_2 \ldots F_m e^{-(\beta-t_m)\Delta}) =$$

$$= \int_\Omega F_0(\omega(t_0))\, F_1(\omega(t_1)) \ldots F_m(\omega(t_m))\, d\nu_0(\omega(\cdot)), \tag{2}$$

де tr розуміється в $L_2(M,\sigma)$, $\{F_0, F_1, \ldots, F_m\}$ — оператори множення на неперервні функції в $L_2(M,\sigma)$.

Нехай $M_k \equiv M$, $k \in \mathbb{Z}^d$, — спіновий простір k-тої квантової частинки. Розглянемо температурний стан ρ_Λ у скінченному об'ємі $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$:

$$\rho_\Lambda(F) = \frac{\operatorname{tr}\left(F e^{-\beta H_\Lambda}\right)}{\operatorname{tr}\left(e^{-\beta H_\Lambda}\right)}, \tag{3}$$

де tr розуміється у просторі $L_2\left(\mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} M_k, \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} d\sigma(x_k)\right)$, оператор

$$H_\Lambda = -\sum_{k\in\Lambda} \Delta_k + \lambda \sum_{k,j\in\Lambda,\,|k-j|=1} V\left(x_k, x_j\right)$$

і $V \in C(M\times M)$.

Аналогічно (2) з гіббсовим станом ρ_λ асоційована імовірнісна міра $\nu_\Lambda(\omega(\cdot))$ на просторі Ω_Λ неперервних β-періодичних траєкторій зі значеннями в $M^\Lambda = \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} M_k$:

$$d\nu_\Lambda(\omega(\cdot)) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\lambda \int_0^\beta \sum_{\langle k,j\rangle\in\Lambda} V\left(\omega_k(\tau), \omega_j(\tau)\right) d\tau\right\}}{\int_{\Omega_\Lambda} \exp\left\{-\lambda \int_0^\beta \sum_{\langle k,j\rangle\in\Lambda} V\left(\omega_k(\tau), \omega_j(\tau)\right) d\tau\right\} \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} d\nu_0(\omega_k)} \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} d\nu_0\left(\omega_k(\cdot)\right),$$

де $\sum_{\langle k,j\rangle\in\Lambda}$ позначає сумування за $k, j \in \Lambda$ такими, що $|k-j| = 1$.

При достатньо малих λ, β послідовність мір $\{\nu_\Lambda, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\}$ [5] слабко збігається до єдиної імовірнісної міри ν_β у розумінні збіжності на локальних неперервних функціях. Міра ν_β задана на просторі неперервних β-періодичних траєкторій Ω_β зі значеннями в $M^{\mathbb{Z}^d}$. За стандартною технікою [4] зі збіжності мір $\{\nu_\Lambda\}$ випливає збіжність на алгебрі локальних спостережуваних сім'ї гібсових станів $\{\rho_\Lambda\}$ до деякого температурного стану ρ_β у нескінченному об'ємі.

При малих $\lambda\beta$ для міри ν_β має місце експоненціально швидке спадання кореляцій: $\forall\, F, G \in C_{b,\mathrm{cyl}}(\Omega_\beta)$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left|\mathrm{cov}_{\nu_\beta}(F, \theta_k G)\right| e^{\gamma|k|} < \infty, \quad \gamma > 0, \tag{4}$$

яке є достатньою умовою для комутативної ЦГТ.

Теорема 1 [6]. *Для $F \in C_{b,\mathrm{cyl}}(\Omega_\beta)$, $\Lambda_n = [-n, n] \cap \mathbb{Z}^d$ покладемо*

$$F^{\Lambda_n}(\omega(\cdot)) = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \sum_{k \in \Lambda_n} \left(\theta_k F - \nu_\beta(F)\right).$$

Тоді справедливе твердження комутативної ЦГТ

$$\int_{\Omega_\beta} \exp\left\{i\lambda F^{\Lambda_n}(\omega(\cdot))\right\} d\nu_\beta(\omega(\cdot)) \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{cov}_{\nu_\beta}(F, \theta_k F)\right\}, \tag{5}$$

де $C_{b,\mathrm{cyl}}(\Omega_\beta)$ позначає простір циліндричних по гратці неперервних обмежених функцій на Ω_β.

Як наслідок маємо для довільних $F, G \in C_{b,\mathrm{cyl}}(\Omega_\beta)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\beta} F^{\Lambda_n}(\omega(\cdot))\, G^{\Lambda_n}(\omega(\cdot))\, d\nu_\beta(\omega(\cdot)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{cov}_{\nu_\beta}(F, \theta_k G). \tag{6}$$

Зазначимо, що праві частини (5), (6) скінченні для довільних $F, G \in C_{b,\mathrm{cyl}}(\Omega_\beta)$ завдяки експоненціально швидкому спаданню кореляцій (4) [7].

2. ***Означення* 1.** *Введемо на $C_{b,\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ півскалярний добуток*

$$\langle F, G\rangle_{\mathrm{cov}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{cov}_{\nu_\beta}\left(F(\omega(0)), \theta_k G(\omega(0))\right). \tag{7}$$

Вважаємо, що функції $F, G \in C_{b,\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ еквівалентні, якщо $\langle F - G, F - G\rangle_{\mathrm{cov}} = 0$. Гільбертів простір $\mathcal{H}_{\mathrm{cov}}$ введемо як поповнення фактор-простору $C_{b,\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)\Big|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{cov}}}$ по півскалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{cov}}$.

***Означення* 2.** *Сім'я операторів $\{C(t), t \in S_\beta\}$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathrm{cov}}$ задається співвідношенням*

$$\langle F, C(t)G\rangle_{\mathrm{cov}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{cov}_{\nu_\beta}(F(\omega(0)), \theta_k G(\omega(t))) \tag{8}$$

для $F, C \in \mathcal{H}_{\mathrm{cov}}$. Визначення коректне і права частина (8) *не залежить від представників класів еквівалентності F, G.*

Теорема 2. *Існує невід'ємний самоспряжений оператор A у просторі $\mathcal{H}_{\text{cov}}$ такий, що сім'я операторів $C(t)$ допускає зображення*

$$C(t) = (\mathbb{1} + e^{-\beta A})^{-1}(e^{-tA} + e^{-(\beta - t)A}). \tag{9}$$

Доведення. Операторнозначна функція $C(t)$ періодична: $C(t+\beta) = C(t)$, симетрична: $C(t) = C(-t)$, $C(0) = \mathrm{Id}$, завдяки аналогічним властивостям міри ν_β. Крім того, сім'я операторів $C(t)$ задовольняє наступні умови:

1) $\| C(t) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{cov}})} \le 1$, $C(t)$ слабко неперервна по t в $\mathcal{H}_{\text{cov}}$. Дійсно,

$$\left| \langle F, C(t) G \rangle_{\text{cov}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \int_{\Omega_\beta} F^{\Lambda_n}(\omega(0))\, G^{\Lambda_n}(\omega(t))\, d\nu_\beta(\omega(\cdot)) \right| \le$$

$$\le \lim_{n \to \infty} \left(\int_{\Omega_\beta} \left| F^{\Lambda_n}(\omega(0)) \right|^2 d\nu_\beta \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\beta} \left| G^{\Lambda_n}(\omega(t)) \right|^2 d\nu_\beta \right)^{1/2} =$$

$$= \| F \|_{\mathcal{H}_{\text{cov}}} \| G \|_{\mathcal{H}_{\text{cov}}}$$

і слабка неперервність є наслідком теореми Лебега про мажорацію і процедури термодинамічного граничного переходу $\lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$.

2) Функція $C(t)$ додатно визначена:

$$\sum_{i,j=1}^{m} \left\langle F_i, C\left(t_i - t_j\right) F_j \right\rangle_{\text{cov}} = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_\beta} \left| \sum_{i=1}^{m} F_i^{\Lambda_n}(\omega(t_i)) \right|^2 d\nu_\beta \ge 0.$$

3) Функція $C(t)$ додатно визначена у сенсі Остервальдера – Шрадера: для довільних $t_1, \ldots, t_m \in [0, \beta/2]$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \left\langle F_j, C\left(t_i + t_j\right) F_i \right\rangle_{\text{cov}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_\beta} \sum_{i=1}^{m} F_i^{\Lambda_n}(\omega(t_i)) \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j^{\Lambda_n}\left(\omega(-t_j)\right) d\nu_\beta \ge 0$$

завдяки властивості додатності Остервальдера – Шрадера для міри ν_β.

З властивостей операторної функції $C(t)$ випливає наступне зображення [8] у слабкому сенсі у $\mathcal{H}_{\text{cov}}$:

$$C(t) = \int_0^\infty \left(e^{-ta} - e^{-(\beta - t)a} \right) d\Gamma_+(a)$$

з деякою операторнозначною мірою Γ_+ на $[0, \infty)$, що набуває значень у $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{cov}})$.

Більш того, існує періодичний гауссовий ОШ-додатний процес $\{ \Phi(F, t) : F \in \mathcal{H}_{\text{cov}},\ t \in \mathbb{R} \}$ з періодом β, з індексами елементів $\mathcal{H}_{\text{cov}} \times \mathbb{R}$ такий, що

$$\langle F, C(t) G \rangle_{\mathcal{H}_{\text{cov}}} = E(\Phi(F, 0)\Phi(G, t)).$$

За теоремою 4.1 [8] необхідне зображення для $C(t)$ (9) буде існувати тоді і лише тоді, коли для процесу $\Phi(F, t)$ виконана двостороння марковська властивість на півколі. Для цього достатньо ([8], зауваження 4.3), щоб для довільного $G \in \mathcal{H}_{\rm cov}$ існувало $G_1 \in \mathcal{H}_{\rm cov}$ таке, що $\forall\, s \in [0, \beta/2]$, $\forall\, F \in \mathcal{H}_{\rm cov}$

$$E(\Phi(F, -s)\, \Phi(G, \beta/4)) = E\Big(\Phi(F, -s)\, [\Phi(G_1, 0) + \Phi(G_1, \beta/2)] \Big)$$

або в термінах ν_β:

$$\int\limits_{\Omega_\beta} F\big(\omega(-s)\big)\, G\big(\omega(\beta/4)\big)\, d\nu_\beta\big(\omega(\cdot)\big) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\beta} F(\omega(-s))\big[G_1(\omega(0)) + G_1(\omega(\beta/2))\big]\, d\nu_\beta(\omega(\cdot)). \tag{10}$$

Рівність (10) є наслідком двосторонньої марковської властивості на півколі ([4], означення 10.1) для процесу $\omega(\tau) = \{\omega_k(\tau) \mid k \in \mathbb{Z}^d, \tau \in S_\beta\}$, тому що цей процес стаціонарний, симетричний і періодичний з періодом β ([4], теорема 5.1(v) і твердження 11.1).

3. Наведемо деякі факти з теорії гіббсових станів для абстрактних гармонійних систем. Нехай S — самоспряжений додатний оператор у деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_0$ зі щільною областю значень. Розглянемо оснащення $\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_+$ з операторами вкладення Гільберта–Шмідта з відповідним спарюванням $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ між просторами $\mathcal{H}_+$ і $\mathcal{H}_-$ відносно $\mathcal{H}_0$. Розглянемо гауссову міру γ_S, задану на борелевій σ-алгебрі на $\mathcal{H}_-$, з кореляційним оператором S:

$$\int\limits_{\mathcal{H}_-} e^{i\langle \varphi, x\rangle_0}\, d\gamma_S(x) = e^{-\langle S\varphi, \varphi\rangle_0/4} \tag{11}$$

для $\varphi \in \mathcal{H}_+$. Оператор Діріхле H_S міри γ_S

$$(H_S u, v)_{L_2(\mathcal{H}_-, \gamma_S)} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{H}_-} \langle \nabla u, \nabla \bar{v} \rangle_0\, d\gamma_S(x),$$

де $u, v \in C_b^2(\mathcal{H}_-)$, буде істотно самоспряженим оператором у просторі $L_2(\mathcal{H}_-, \gamma_s)$ з істотною областю $C^2_{b,\rm cyl}(\mathcal{H}_-)$ ([9], розділ 6, § 3.3), де $C^2_{b,\rm cyl}(\mathcal{H}_-)$ позначає простір циліндричних двічі неперервно диференційовних функцій на $\mathcal{H}_-$. Оператор H_S має наступне зображення на $C^2_{b,\rm cyl}(\mathcal{H}_-)$:

$$(H_S u)(x) = -\frac{1}{2}\, {\rm tr}_{\mathcal{H}_0}(u'') + \langle S^{-1}x, \nabla u \rangle_0 .$$

Нехай P_N позначає ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на скінченновимірний підпростір $N \subset \mathcal{H}_+$. Гіббсів температурний стан G_β, що відповідає оператору Діріхле H_S, може бути одержаний за допомогою стандартної процедури термодинамічного граничного переходу [5, 7]

$$G_\beta(f) = \lim_{N \nearrow \mathcal{H}_0} \frac{{\rm tr}\Big(f e^{-\beta H_S^N} \Big)}{{\rm tr}\Big(e^{-\beta H_S^N} \Big)}. \tag{12}$$

Граничний перехід виконується по деякій зростаючій послідовності скінченновимірних підпросторів N, що вичерпує $\mathcal{H}_0$, міра γ_S^N є проекцією міри γ_S на підпростір N, і H_S^N позначає оператор Діріхле міри γ_S^N. Гіббсовому стану G_β відповідає міра g_β на просторі Ξ_β β-періодичних траєкторій зі значеннями в $\mathcal{H}_-$ [4, 7, 8]:

$$\left[\operatorname{tr}\left(e^{-\beta H_S}\right)\right]^{-1} \operatorname{tr}\left(A_0 e^{-t_1 H_S} A_1 e^{-(t_2-t_1)H_S} A_2 \ldots A_m e^{-(\beta-t_m)H_S}\right) = $$
$$= \int_{\Xi_\beta} A_0\big(X(t_0)\big) \ldots A_m\big(X(t_m)\big)\, dg_\beta\big(X(\cdot)\big), \tag{13}$$

де $0 = t_0 < \ldots < t_m < \beta$ і $\{A_0, \ldots, A_m\}$ позначає оператори множення на обмежені циліндричні функції в $L_2(\mathcal{H}_-, \gamma_s)$.

Нехай $L_2(S_\beta, \mathcal{H}_0)$ позначає простір β-періодичних траєкторій зі значеннями в $\mathcal{H}_0$, оснащений скалярним добутком $\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle = \int_0^\beta \langle \Phi(\tau), \Phi(\tau) \rangle_0 d\tau$. Міра g_β може бути реалізована на оснащенні

$$\Xi_\beta^* \subset L_2(S_\beta, \mathcal{H}_0) \subset \Xi_\beta$$

з операторами вкладення Гільберта – Шмідта як імовірнісна міра на борелевій σ-алгебрі простору Ξ_β. Її перетворення Фур'є має вигляд

$$\int_{\Xi_\beta} e^{i\langle\langle \Phi, X \rangle\rangle}\, dg_\beta(X(\cdot)) = e^{-\langle\langle D\Phi, \Phi \rangle\rangle/2}. \tag{14}$$

Кореляційний оператор D міри g_β має зображення в $L_2(S_\beta, \mathcal{H}_0)$

$$(D\Phi)(t) = \int_0^\beta r(t-s)\, \Phi(s)\, ds \tag{15}$$

і оператор $r(t)$ є кореляційним оператором гауссового процесу $X(\cdot)$:

$$\langle r(t)h, g \rangle_0 = \int_{\Xi_\beta} \big\langle h, X(t) \big\rangle_0 \overline{\big\langle g, X(0) \big\rangle}_0\, dg_\beta\big(X(\cdot)\big).$$

Функція $r(t)$ має спеціальну структуру [7, 8]:

$$r(t) \equiv r_s(t) = \frac{1}{2} S^{-1} \left(\mathbb{1} - e^{-\beta S^{-1}} \right)^{-1} \left(e^{-tS^{-1}} + e^{-(\beta-t)S^{-1}} \right). \tag{16}$$

З зображень (9) і (16) випливає конкретна реалізація гауссового процесу $\Phi(\cdot, t)$ і функції $C(t)$ як коваріаційного оператора гауссового процесу $X(t)$, асоційованого з температурним станом (12).

Введемо у $\mathcal{H}_{\mathrm{cov}}$ новий скалярний добуток

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle 2A\, \mathrm{th}\,(\beta A/2) F, G \rangle_{\mathrm{cov}},$$

де A — оператор з (9). Тоді

$$\langle C(t)F, G \rangle_{\mathrm{cov}} = \langle r_{A^{-1}}(t)F, G \rangle_{\mathcal{H}_0}. \tag{17}$$

В результаті маємо, що функція $C(t)$ фактично задає:

1) оснащення $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$ з оператором вкладення Гільберта – Шмідта з гауссовою мірою $\gamma_{A^{-1}}$ (11);

2) гіббсів стан G_β (12) при оберненій температурі β;

3) гауссову міру g_β (14) на оснащенні $\Xi_\beta^* \subset L_2(S_\beta, \mathcal{H}_0) \subset \Xi_\beta$ з коваріаційним оператором D (15), (16).

4. Першим кроком доведення некомутативної ЦГТ є інтерпретація комутативної ЦГТ (5) як збіжності деяких функціоналів міри ν_β до перетворення Фур'є міри g_β.

Теорема 3. *Нехай*

$$F_j(\omega(\cdot)) = \int_0^\beta \alpha_j(\tau) f_j(\omega(\tau))\, d\tau,$$

де $f_j \in C_{b,\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$, $\alpha_j \in C^\infty(S_\beta)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\int_{\Omega_\beta} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^m \lambda_j F_j^{\Lambda_n} \right\} d\nu_\beta \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\Xi_\beta} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^m \lambda_j \left\langle\!\left\langle f_j \alpha_j(\cdot), X(\cdot) \right\rangle\!\right\rangle \right\} dg_\beta. \quad (18)$$

Доведення. Права частина (5) може бути зображена у вигляді

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{cov}_{\nu_\beta}\left(\sum_{j=0}^m \lambda_j F_j, \theta_k\left(\sum_{j=0}^m \lambda_j F_j \right)\right) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^m \lambda_i \lambda_j \int_0^\beta \int_0^\beta \alpha_i(\tau)\alpha_j(s) \left\langle C(\tau - s) f_i, f_j \right\rangle_{\mathrm{cov}} d\tau\, ds =$$

$$= \sum_{i,j=0}^m \lambda_i \lambda_j \int_0^\beta \int_0^\beta \alpha_i(\tau)\alpha_j(s) \left\langle r(\tau - s) f_i, f_j \right\rangle_{\mathcal{H}_0} d\tau\, ds = \langle\!\langle D\Phi, \Phi \rangle\!\rangle,$$

де

$$\Phi(\tau) = \sum_{j=0}^m \lambda_j \alpha_j(\tau) f_j \in \Xi_\beta^*.$$

Використовуючи (14), закінчуємо доведення теореми.

Зі збіжності цілих функцій (18), $\lambda_j \in \mathbb{R}$, за теоремою Віталі випливає рівномірна збіжність на кулях $U(z_0, r) \subset \mathbb{C}^{m+1}$:

$$\int_{\Omega_\beta} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^m \lambda_j F_j^{\Lambda_n} \right\} d\nu_\beta \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \int_{\Xi_\beta} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^m \lambda_j \left\langle\!\left\langle f_j \alpha_j(\cdot), X(\cdot) \right\rangle\!\right\rangle \right\} dg_\beta. \quad (19)$$

Це дає можливість знайти похідну $\left.\dfrac{\partial^{m+1}}{\partial\lambda_0 \ldots \partial\lambda_m}\right|_{\lambda_0 = \ldots = \lambda_m = 0}$ від правої і лівої частини (19). Спрямовуючи $\alpha_j(\tau) \to \alpha_{t_i}(\tau)$, одержуємо збіжність циліндричних моментів мір:

$$\int_{\Omega_\beta} \prod_{j=0}^m f_j^{\Lambda_n}\left(\omega(t_j)\right) d\nu_\beta(\omega(\cdot)) \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\Xi_\beta} \prod_{j=0}^m \left\langle f_j, X(t_j) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} dg_\beta(X(\cdot)). \quad (20)$$

Введемо функції

$$h^n(z_0, \ldots, z_m) = \frac{\mathrm{tr}\left(\prod_{j=0}^m \left(e^{iz_j H_\mu} f_j^{\Lambda_n} e^{-iz_j H_\mu} \right) e^{-\beta H_\mu} \right)}{\mathrm{tr}\left(e^{-\beta H_\mu} \right)},$$

$$h(z_0, \ldots, z_m) = \frac{\mathrm{tr}\left(\prod_{j=0}^m \left(e^{iz_j H_S} \left\langle f_j, x \right\rangle_0 e^{-iz_j H_S} \right) e^{-\beta H_S} \right)}{\mathrm{tr}\left(e^{-\beta H_S} \right)},$$

де tr розуміється у сенсі термодинамічного граничного переходу для гіббсових станів ρ_β і G_β (3) і (12). Функції h, h^n аналітичні [4] на множині

$$I_\beta(m) = \{(z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : 0 \le \operatorname{Im} z_0 \le \operatorname{Im} z_1 \le \dots \le \operatorname{Im} z_m \le \beta\}.$$

Зв'язок між температурними функціями Гріна і відповідними евклідовими мірами (2), (13) показує, що (20) — це збіжність $h_n \to h$, коли $\operatorname{Re} z_0 = = \operatorname{Re} z_1 = \dots = \operatorname{Re} z_m = 0$. Повторно використовуючи теорему Віталі, маємо збіжність $h_n \to h$ на I_β, а тому і на множині $\operatorname{Im} z_0 = \operatorname{Im} z_1 = \dots = \operatorname{Im} z_m = 0$:

$$\rho_\beta\left(\prod_{j=0}^{m}\left(e^{it_j H_\mu} f_j^{\Lambda_n} e^{-it_j H_\mu}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} G_\beta\left(\prod_{j=0}^{m}\left(e^{it_j H_s}\langle f_j, x\rangle_0 e^{-it_j H_s}\right)\right),$$

тобто твердження некомутативної ЦГТ.

Зауваження. Наведена схема доведення некомутативної центральної граничної теореми через комутативну ЦГТ допускає узагальнення на випадок температурних граткових систем, для яких має місце досить швидке спадання кореляцій для відповідної температурної міри.

Важливою у застосуваннях є так звана система квантових температурних ангармонійних осциляторів. Нехай $M_k = \mathbb{R}^1$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Розглянемо температурну систему, що відповідає формальному гамільтоніану

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2}\sum d(k-j)x_k x_j + \lambda\sum P(x_k),$$

де $d\colon \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ — скінченнодіагональна матриця, $d(k) = d(-k)$, що задовольняє умову

$$d(0) - \sum_{k\ne 0}|d(k)| \ge C > 0.$$

Тут $P(t)$ — поліном парного степеня з додатним старшим коефіцієнтом. Тоді для досить малих $\lambda\beta$ має місце експоненціально швидке спадання кореляцій, звідки випливає твердження некомутативної ЦГТ за схемою, наведеною раніше.

1. *Goderis D., Verbeure A., Vets P.* Theory of quantum fluctuations and the Onsager relations // Rev. J. Stat. Phys. – 1989. – **56**. – № 5 / 6.
2. *Accardi L., Bach A.* Quantum central limit theorem for strongly mixing random variables // Z. Wahr. Verw. Geb. – 1985. – **68**. – P. 393 – 402.
3. *Goderis D., Verbeure A., Vets P.* Dynamics of fluctuations for quantum lattice systems // Comm. Math. Phys. – 1990. – **128**. – P. 533 – 549.
4. *Klein A., Landau L. J.* Stochastic processes associated with KMS states // J. Funct. Anal. – 1981. – **42**, № 3. – P. 368 – 428.
5. *Gross L.* Decay of correlations in classical lattice models at high temperature // Comm. Math. Phys. – 1979. – **68**, № 1. – P. 9 – 28.
6. *Künsch H.* Decay of correlations under Dobrushin's uniqueness condition and its applications // Comm. Math. Phys. – 1982. – **84**, № 2. – P. 207 – 222.
7. *Antonjuk A. Val., Antonjuk A. Vict., Konratiev Yu. G.* The construction of macroscopic Gibbs states via functional integration // Methods of functional analysis in problems of mathematical physics. – Kiev: In-t Math. Acad. Sci. Ukraine, 1992. – P. 13 – 15.
8. *Klein A., Landau L. J.* Periodic Gaussian Osterwalder – Schrader positive processes and the two-sided Markov property on the circle // Pacif. J. Math. – 1981. – **94**, № 2. – P. 341 – 368.
9. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.

Одержано 03.02.93