УДК 519.632

А. А. Панков, д-р физ.-мат. наук,
Т. Е. Панкова, канд. физ.-мат. наук (Политехн. ин-т, Винница)

ИТЕРАЦИОННОЕ СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ К ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА*

An iteration procedure for reduction of a Dirichlet boundary-value problem to a Neumann problem is suggested. Estimates of a convergence rate are established.

Запропонована процедура ітераційного зведення крайової задачі Діріхле до задачі Неймана. Встановлені оцінки швидкості збіжності.

1. Введение. Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], посвященных оценкам скорости сходимости метода разделения области. Ключевой момент во всех этих работах — секториальность некоторого ассоциированного с задачей оператора и оценки функций от него.

Один из подходов, приводящих к методу разделения области, позволяет построить итерационную процедуру решения задачи Дирихле, каждый шаг которой состоит в решении задачи Неймана. Эта процедура дает возможность одновременно с решением задачи без потери точности находить потоки через границу. Последнее обстоятельство существенно при численном решении задач со свободной поверхностью типа Веригина [3] (приложение см. в [4]). Отметим, что в некотором смысле противоположная итерационная редукция задачи Неймана к задаче Дирихле (на уровне разностных схем) предложена в [5].

2. Описание метода. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^m$ и $\Gamma \subset \partial Q$ — открытая часть границы ∂Q области Q. Рассмотрим краевую задачу

$$Au = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь A — дифференциальный оператор второго порядка. Задачу (1), (2) дополним необходимыми начальными и (или) граничными условиями на $\partial Q \setminus \Gamma$. Считается, что эти дополнительные условия включены в определение оператора A. Заметим, что однородное условие Дирихле (2) выбрано только для простоты изложения. Неоднородный случай может быть рассмотрен аналогично.

Пусть D — дифференциальный оператор первого порядка на Γ. Введем параметры $\varepsilon \in [0, 1]$ и $\alpha \neq 0$ и рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию

$$(1-\varepsilon) Du|_\Gamma + \varepsilon\alpha u|_\Gamma = (1-\varepsilon)\psi, \tag{3}$$

где ψ — некоторая функция на Γ. Если $\varepsilon = 1$, то получим исходную задачу (1), (2). При $\varepsilon = 0$ получается уравнение (1) с граничным условием типа Неймана $Du|_\Gamma = \psi$. Представим решение задачи (1), (3) в виде ряда $u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k$ и подставим его в (1), (3). В результате имеем последовательность граничных задач для нахождения v_k:

$$Av_0 = f, \quad Dv_0|_\Gamma = \psi, \tag{4}$$

$$Av_1 = 0, \quad Dv_1|_\Gamma = -\alpha v_0|_\Gamma, \tag{5}$$

$$Av_k = 0, \quad Dv_k|_\Gamma = Dv_{k-1}|_\Gamma - \alpha v_{k-1}|_\Gamma, \quad k \geq 2. \tag{6}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий и Американского математического общества.

Так как при $\varepsilon = 1$ имеем исходную задачу, то в качестве приближенного решения естественно положить $u_N = \sum_{k=0}^{N} v_k$. В то же время из (4)–(6) следует, что u_N является решением задачи

$$A u_N = f, \quad D u_N|_\Gamma = D u_{N-1}|_\Gamma - \alpha u_{N-1}|_\Gamma, \quad N \geq 1, \tag{7}$$

где $u_0 = v_0$ — решение задачи (4) для некоторого ψ на Γ. Итак, для решения исходной задачи (1), (2) мы построили итерационную процедуру вида (7).

3. Граничный оператор. Определим граничный оператор K, связанный с задачей (1), (2). Пусть функция h определена на Γ. Рассмотрим задачу

$$A w = f, \quad D w|_\Gamma = h. \tag{8}$$

Предположив, что задача (8) однозначно разрешима, определим граничный оператор K по формуле

$$K h = w|_\Gamma. \tag{9}$$

Из определения K вытекают следующие тождества:

$$u_1|_\Gamma = -\alpha K(v_0|_\Gamma), \quad v_k|_\Gamma = (I - \alpha K)(v_{k-1}|_\Gamma), \quad k \geq 2, \tag{10}$$

где I — единичный оператор. С помощью (10) по аналогии с [6] легко получить, что $u_N|_\Gamma = -\alpha^{-1}(I - \alpha K)^N K^{-1}(v_1|_\Gamma)$.

Рассмотрим невязку $w = u - u_N$, где u — решение задачи (1), (2). Так как $w|_\Gamma = u_N|_\Gamma$, то w — решение задачи Дирихле

$$A w = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{11}$$

$$w|_\Gamma = -\alpha^{-1}(I - \alpha K)^N K^{-1}(v_1|_\Gamma). \tag{12}$$

Таким образом, для доказательства сходимости метода (8) необходимо получить оценку правой части (12).

4. Эллиптическая задача Дирихле. Рассмотрим задачу

$$L u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x) u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{13}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{14}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с гладкой границей Γ.

Пусть коэффициенты L — гладкие комплекснозначные функции на Ω. Будем также предполагать, что существует такая константа $\mu > 0$, что

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geq \mu \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1_0(\Omega), \tag{15}$$

где

$$a(u, u) = \int\limits_\Omega \left[a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{v} + a u \overline{v} \right] dx,$$

$H^r(\Omega)$ — пространство Соболева [6], $H^r_0(\Omega)$ — замыкание $C^\infty_0(\Omega)$ в $H^r(\Omega)$. Напомним, что из неравенства $\operatorname{Re} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \overline{\Omega}, \alpha > 0$, вытекает неравенство (15) для оператора $L + \lambda$ с достаточно большим $\lambda > 0$ [6].

Итерационная процедура решения задачи (13), (14) записывается в виде:

$$L u_N = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{N-1}}{\partial \nu} - \alpha u_{N-1} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad N \geq 1, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad N = 0, \tag{18}$$

где ψ — произвольная функция на Γ, $\partial u/\partial \nu = a_{ij}(x)(\partial u/\partial x_j)\cos(x_i, n)$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к Γ.

Справедливы следующие результаты о сходимости описанного метода.

Теорема 1. *Пусть $f \in H^{k-2}(\Omega)$, где $k > 0$ целое. Тогда существует такое $\alpha^* > 0$, что для любого $\alpha \in (0, \alpha^*]$, любого целого $m \in [0, k-1)$ и любого $\theta \in (0, k-m-1)$ справедлива оценка*

$$\| u - u_N \|_{H^m(\Omega)} \le C\, \alpha^{1-k+m} N^{1-k+m+\theta} \left[\| f \|_{H^{k-2}(\Omega)} + \| \psi \|_{H^{k-3/2}(\Gamma)} \right], \tag{19}$$

где u_N — решение задачи (16) – (18) с $\psi \in H^{k-3/2}(\Gamma)$ и $C = C(k, m, \theta)$.

Рассмотрим самосопряженный случай.

Теорема 2. *Пусть $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, и $a(x) \ge 0$ — вещественнозначные функции, $b_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть также $f \in H^{k-2}(\Omega)$, с целым $k > 0$. Тогда существует такое $\alpha^* > 0$, что для любого $\alpha \in (0, \alpha^*]$ и любого целого $m \in [0, k-1]$ справедливо неравенство*

$$\| u - u_N \|_{H^m(\Omega)} \le C (\alpha N)^{1-k+m} \left[\| f \|_{H^{k-2}(\Omega)} + \| \psi \|_{H^{k-3/2}(\Gamma)} \right], \tag{20}$$

где u_N — решение задачи (16) – (18) с $\psi \in H^{k-3/2}(\Gamma)$ и $C = C(k, m)$.

Заметим, что при выполнении условий этих теорем задача (13), (14) имеет единственное решение $u \in H^k(\Omega)$ [6]. Нетрудно видеть, что $u_N \in H^k(\Omega)$. Однако в теоремах 1 и 2 $u_N \to u$ в $H^{k-1}(\Omega)$, но не в $H^k(\Omega)$. Далее, α^* определяется граничным оператором K. Можно взять $\alpha^* \in (0, \alpha_0)$, где α_0 будет определено в лемме 3, однако в теореме 2 оптимальным будет значение $\alpha^* = \| K \|^{-1}$ (см. лемму 4).

Для доказательства этих результатов необходимо изучить свойства граничного оператора K и получить оценки норм оператора $(I - \alpha K)^N K^r$. Опишем подробнее граничный оператор K для задачи Дирихле (13), (14). Пусть h — функция на Γ. Тогда $Kh = w|_\Gamma$, где w — единственное решение задачи

$$Lw = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = h \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{21}$$

Свойства оператора K изучаются в леммах 1 и 2.

Лемма 1. *Оператор K компактен в $L^2(\Gamma)$. Более того, $K : H^r(\Gamma) \to H^{r+1}(\Gamma)$, $r \ge 0$, — изоморфизм и*

$$c_1 \| h \|_{H^r(\Gamma)} \le \| Kh \|_{H^{r+1}(\Gamma)} \le c_2 \| h \|_{H^r(\Gamma)} \tag{22}$$

для некоторого $h \in H^r(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $h \in H^r(\Gamma)$. Из стандартных результатов (см., например, [6]) следует, что задача (21) имеет единственное решение $w \in H^{r+3/2}(\Omega)$ и $\| w \|_{H^{r+3/2}(\Omega)} \le C \| h \|_{H^r(\Gamma)}$. Тогда из определения K и теоремы о следах [6] следует оценка

$$\| Kh \|_{H^{r+1}(\Gamma)} = C \| w \|_{H^{r+3/2}(\Omega)} \le C \| h \|_{H^r(\Gamma)}.$$

Таким образом, оператор $K: H^r(\Gamma) \to H^{r+1}(\Gamma)$ ограничен и справедливо второе из неравенств (22). Так как вложение $H^{r+1}(\Gamma) \subset H^r(\Gamma)$ компактно [6], то K — компактный оператор в $H^r(\Gamma)$ и, в частности, в $L^2(\Gamma)$.

Рассмотрим оператор K^{-1}. Пусть $g \in H^{r+1}(\Gamma)$. Задача $Lw = 0$ в Ω, $w|_\Gamma = g$ имеет единственное решение $w \in H^{r+3/2}(\Omega)$ и $\|w\|_{H^{r+3/2}(\Omega)} \le$ $\le C\|g\|_{H^{r+1}(\Gamma)}$. Тогда $h = (\partial w/\partial\nu)|_\Gamma \in H^r(\Gamma)$, $\|h\|_{H^r(\Gamma)} \le C\|g\|_{H^{r+1}(\Gamma)}$ и, очевидно, $Kh = g$. Таким образом, оператор $K^{-1}\colon H^{r+1}(\Gamma) \to H^r(\Gamma)$ определен и ограничен. Отсюда следует первое неравенство в (22), и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K — секториальный оператор* [7, 8] *в* $L^2(\Gamma)$. *Если задача* (13), (14) *самосопряжена, то K — самосопряженный положительный оператор.*

Доказательство. Пусть w — решение задачи (21). Тогда справедливо тождество

$$0 = \int_\Omega Lw\,\overline{w}\,dx = a(w, w) - \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial\nu}\,\overline{w}\,d\Gamma. \tag{23}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re}(h, e^{i\varphi}Kh) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}a(w, w)]$. Используя (15) и очевидное неравенство $|a(w, w)| \le c\|w\|^2_{H^1(\Omega)}$, получаем

$$\operatorname{Re}(h, e^{i\varphi}Kh) \ge \mu\cos\varphi\,\|w\|^2_{H^1(\Omega)} - |\sin\varphi|\,|a(w, w)| \ge$$

$$\ge (\mu\cos\varphi - c|\sin\varphi|)\,\|w\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Очевидно, существует $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ такое, что $\mu\cos\varphi - c|\sin\varphi| \ge 0$ для $|\varphi| \le \varphi_0$. Отсюда вытекает первое утверждение леммы. Второе утверждение леммы легко следует из (23).

Лемма 3. *Пусть K — секториальный оператор, т. е. существует $\beta_0 \in$ $\in (0, \pi/2)$ такое, что $(e^{i\varphi}Ku, u) \ge 0$ для $|\beta| \le \beta_0$. Тогда для любого целого $r > 0$, любого $\theta \in (0, r)$ и любого $\alpha^* \in (0, \alpha_0)$, где $\alpha_0 = (\operatorname{spr} K)^{-1}\sin\beta_0$, существует такая константа $C = C(r, \theta, \alpha^*)$, что*

$$\|(I - \alpha K)^N K^r\| \le \frac{C}{\alpha^r N^{r-\theta}}, \quad \alpha \in (0, \alpha^*]. \tag{24}$$

Здесь $\operatorname{spr} K$ *— спектральный радиус оператора K.*

Доказательство см. в [1, 2].

Если K — положительный самосопряженный оператор, то оценка (24) может быть улучшена.

Лемма 4. *Если K — положительный самосопряженный оператор, то для любого $r > 0$ найдется константа $C = C(r)$ такая, что*

$$\|(I - \alpha K)^N K^r\| \le \frac{C}{(\alpha N)^r}, \quad \alpha \in (0, \|K\|^{-1}]. \tag{25}$$

Доказательство. По классической спектральной теореме $K = \int_0^{\|K\|} \lambda\,dP_\lambda$, где dP_λ — соответствующая проекторная мера. Тогда

$$(I - \alpha K)^N K^r \le \int_0^{\|K\|} (I - \alpha\lambda)^N \lambda^r\,dP_\lambda,$$

и

$$\| (I-\alpha K)^N K^r u\|^2 \le \int\limits_0^{\|K\|} (1-\alpha\lambda)^{2N} \lambda^{2r} d\left(P_\lambda u, u\right) \le$$

$$\le \|u\|^2 \sup_{\lambda\in[0,\|K\|]} (1-\alpha\lambda)^{2N}\lambda^{2N} \le \alpha^{-2r} \|u\| \sup_{\mu\in[0,1]} (1-\mu)^{2N}\mu^{2r}. \qquad (26)$$

Теперь заметим, что функция $f(\mu) = (1-\mu)^{2N}\mu^{2r}$ достигает своего максимального значения на $[0, 1]$ в точке $\mu_0 = r/(N+r)$. В силу (26)

$$\| (I-\alpha K)^N K^r u\|^2 \le \alpha^{-2r} \|u\|^2 \left(\frac{N}{N+r}\right)^{2N} \left(\frac{r}{N+r}\right)^{2r} \le r^{2r} \frac{\|u\|^2}{(\alpha N)^{2r}},$$

откуда следует утверждение леммы.

Заметим, что в случае компактного положительного самосопряженного оператора утверждение леммы 4, по существу, содержится в [9].

Доказательство теоремы 1. Пусть u_N — приближенное решение и $w = u - u_N$. Тогда w — решение задачи $Lw = 0$ в Ω, $w|_\Gamma = -\alpha^{-1}(I-\alpha K)^N \times K^{-1}(v_1|_\Gamma)$. Из результатов [6] следует

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} \le C \left\| (I-\alpha K)^N K^{-1}(v_1|_\Gamma) \right\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}. \qquad (27)$$

В силу леммы 2 K — секториальный оператор в $L^2(\Gamma)$. Применяя лемму 3, получаем, что для некоторых натуральных m и k, $k \ge m+1$, и для некоторого $\theta \in (0, k-m-1)$ справедливо неравенство

$$\| (I-\alpha K)^N K^{-m-1} y\|_{L^2(\Gamma)} \le C\alpha^{m-k+1} N^{m-k+1+\theta} \|K^{-k}y\|_{L^2(\Gamma)},$$

где $\alpha \in (0, \alpha^*]$. В силу леммы 1,

$$\| (I-\alpha K)^N K^{-1} y\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)} \le \|(I-\alpha K)^N K^{-1} y\|_{H^m(\Gamma)} \le$$

$$\le \| (I-\alpha K)^N K^{-m-1} y\|_{L^2(\Gamma)} \le C\alpha^{m-k+1} N^{m-k+1+\theta} \|y\|_{H^k(\Gamma)} \le$$

$$\le C\alpha^{m-k+1} N^{m-k+1+\theta} \|y\|_{H^{k+1/2}(\Gamma)}. \qquad (28)$$

Из (27) и (28) для $y = v_1|_\Gamma$ получаем

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} \le C\alpha^{m-k} N^{m-k+1+\theta} \|v_1\|_{H^{k+1/2}(\Gamma)}. \qquad (29)$$

Используя первое равенство в (10) и лемму 1, имеем $\|v_1\|_{H^{k+1/2}(\Gamma)} \le C\alpha \times \|v_0\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)}$. Так как в рассматриваемом случае задача (4) эллиптична, то из стандартных результатов о разрешимости [6] с учетом последнего неравенства вытекает

$$\|v_1\|_{H^{k+1/2}(\Gamma)} \le C\alpha \left[\|f\|_{H^{k-2}(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{k-3/2}(\Gamma)} \right]. \qquad (30)$$

И (30) и (29) следует (19), и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, вместо леммы 3 используется лемма 4.

5. Параболическая задача. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t + Lu = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega\times(0, T), \qquad (31)$$

$$u|_\Sigma = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma\times(0, T), \qquad (32)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{33}$$

где

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x,t)u.$$

Коэффициенты L предполагаются такими гладкими комплекснозначными функциями на $\overline{Q}$, что для некоторого $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (x,t) \in Q. \tag{34}$$

Предположим также, что все функции в правых частях (31) – (33) достаточно гладкие и удовлетворяют необходимым условиям согласования на Γ (см., например, [10]). В соответствии с п. 1 рассмотрим итерационную процедуру

$$(u_N)_t + Lu_N = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{35}$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{N-1}}{\partial \nu} - \alpha u_{N-1} \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad N \geq 1, \tag{36}$$

$$u_N(x,0) = \varphi(x). \tag{37}$$

Если $N = 0$, то (36) заменим на

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \psi \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{38}$$

где ψ — некоторая функция на Σ.

В дальнейшем нам понадобятся анизотропные пространства Соболева [10]. Напомним их определение: $H^{r,s}(Q) = L^2(0,T;H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T;L^2(\Omega))$. Здесь $H^s(0,T;X) = \{v \mid v, v'_t, \ldots, v_t^{(s)} \in L^2(0,T;X)\}$, если $s \geq 0$ целое и $H^s(0,T;X) = \left[H^m(0,T;X), L^2(0,T;X)\right]_\theta$, $(1-\theta)m = s$, если $0 < s < m$, m целое, а $[\cdot,\cdot]_\theta$ обозначает комплексный метод интерполяции [6]. Пространство $H^{r,s}(\Sigma)$ определяется аналогично. Иногда будем использовать отрицательные пространства Соболева, определение которых см., например, в [10].

Далее, без ограничения общности, можно считать, что для любого $t \in (0, T)$ справедливо неравенство (15). Действительно, если $u = e^{\lambda t}v$, то новая неизвестная функция v является решением задачи (31) – (33) с оператором $L + \lambda$ вместо L для достаточно больших $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Предположим, что* $f \in H^{2k-2,k-1}(Q)$, $\varphi \in H^{2k-1}(\Omega)$, *где* $k > 0$ *целое, и выполнены необходимые условия согласования. Тогда для любых* $\alpha^* > 0$, *целого* $m \in [0, 2k-1)$ *и* $\theta \in (0, 2k-m-1)$ *справедлива оценка*

$$\|u - u_N\|_{H^{m,m/2}(Q)} \leq C\alpha^{1-2k+m}N^{1-2k+m+\theta}\left[\|f\|_{H^{k-2,k-1}(Q)} + \right.$$
$$\left. + \|\psi\|_{H^{2k-1}(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{2k-3/2,k-3/4}(\Sigma)}\right], \tag{39}$$

где u_N *— решение задачи* (35) – (38) *с* $\alpha \in (0, \alpha^*]$, $\psi \in H^{2k-3/2,k-3/4}(\Sigma)$ *и* $C = C(k, m, \theta, \alpha^*)$.

Пусть K — граничный оператор, т. е. $Kh = w|_\Sigma$, где w — решение задачи

$$w_t + Lw = 0 \quad \text{в} \quad Q, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = h \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad w(x,0) = 0. \tag{40}$$

Определим пространства $H_0^{2r,r}(\Sigma) = \left\{h \in H^{2r,r}(\Sigma) \,\middle|\, h_t^{(k)}\big|_{t=0} = 0,\ k < r - 1/2\right\}$, если $r > 1/2$, и $H_0^{2r}(\Sigma) = H^{2r}(\Sigma)$ для $1/2 \geq r \geq -1/4$. Случай $r < 1/4$ мы не рассматриваем. Таким образом определенные пространства состоят из функций $h \in H^{2r,r}(\Sigma)$, удовлетворяющих условиям согласования для задачи (40).

Сформулируем основные свойства оператора K. Напомним, что вольтерровым называется оператор, спектр которого содержит только точку $\{0\}$, не являющуюся его собственным значением.

Лемма 5. *Оператор K является компактным вольтерровым оператором в $L_2(\Sigma)$. Более того, если $r \geq -1/4$, $r \neq$ целое $+ 3/4$ и $r \neq$ целое, то $K\colon H_0^{2r,r}(\Sigma) \to H_0^{2r+1,r+1/2}(\Sigma)$ — изоморфизм и*

$$c_1 \| h \|_{H^{2r,r}(\Sigma)} \leq \|Kh\|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Sigma)} \leq c_2 \| h \|_{H^{2r,r}(\Sigma)} \tag{41}$$

для всех $h \in H_0^{2r,r}(\Sigma)$.

Доказательство. Неравенство (41) доказывается так же, как аналогичное неравенство леммы 1 с использованием параболических результатов [10] вместо эллиптических.

Докажем, что K вольтерров. Покажем сначала, что задача $Kh = Lh$, $\lambda \in \mathbb{C}$, имеет только тривиальное решение $h \equiv 0$. Действительно, если w — решение задачи (40), то из определения K следует, что w — решение задачи $w_t + Lw = 0$ в Q, $w = \lambda \partial w / \partial \nu$ на Σ, $w(x, 0) = 0$. Из результатов об однозначной разрешимости параболической задачи [10] следует, что $w = 0$. Значит, $h = (\partial w / \partial \nu)|_\Sigma = 0$ и λ не является собственным значением оператора K. Так как K компактен, то он вольтерров, и лемма доказана.

Лемма 6. *Если для любого $t \in (0, T)$ выполнено* (15), *то K — секториальный оператор в $L^2(\Sigma)$.*

Доказательство. Пусть w — решение задачи (40). Тогда

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (Lw + w_t) \overline{w} \, dx \, dt =$$

$$= \int_0^T a(w,w) dt - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} \overline{w} \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_\Omega w_t \overline{w} \, dx \, dt . \tag{42}$$

Так как

$$(h, Kh) = \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} \overline{w} \, d\Gamma \, dt ,$$

то получаем

$$\operatorname{Re}(h, e^{i\varphi} Kh) = \operatorname{Re}\left(e^{i\beta} \int_0^T a(w,w) dt \right) + \operatorname{Re}\left(e^{i\beta} \int_0^T \int_\Omega w_t \overline{w} \, dx \, dt \right) \geq$$

$$\geq \operatorname{Re}\left(\int_0^T a(w,w) dt + \int_0^T \int_\Omega w_t \overline{w} \, dx \, dt \right) \cos\beta - \left(\int_0^T a(w,w) dt + \left| \int_0^T \int_\Omega w_t \overline{w} \, dx dt \right| \right) |\sin\beta| . \tag{43}$$

Оценим интегралы в правой части (43). Так как $\operatorname{Re} w_t \overline{w} = (\partial |w|^2 / \partial t)/2$, то

$$\operatorname{Re} \int_0^T \int_\Omega w_t \overline{w} \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_\Omega |w(x,T)|^2 dx \geq 0 . \tag{44}$$

Нам также понадобится следующее очевидное неравенство:

$$\int_0^T a(w,w)\,dt \;\le\; C\,\|w\|^2_{L^2(0,T;\,H^1(\Omega))}. \tag{45}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\left|\int_0^T\int_\Omega w_t\,\overline{w}\,dx\,dt\right| \;\le\; c\,\|w\|_{L^2(0,T;\,H^1(\Omega))}. \tag{46}$$

Действительно, из (42) получаем

$$\left|\int_0^T\int_\Omega w_t\,\overline{w}\,dx\,dt\right| \;\le\; \left|\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu}\overline{w}\,d\Gamma\,dt\right| + \int_0^T a(w,w)\,dt. \tag{47}$$

Оценим первый интеграл в правой части (47). Имеем

$$\left|\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu}\overline{w}\,d\Gamma\,dt\right| \;\le\; \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|w\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\,dt\right)^{1/2} \;\le$$

$$\le\; C\left(\int_0^T \|w\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|w\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\,dt\right)^{1/2} \;\le\; C\,\|w\|^2_{L^2(0,T;\,H^1(\Omega))}.$$

Из полученной оценки с учетом (45) имеем (46).

Возвращаясь к оценке (43), используя (15), (44), (45) и (46), получаем $\mathrm{Re}\,(h, e^{i\varphi}Kh) \ge (\mu T\cos\beta - C\,|\sin\beta|)\,\|w\|^2_{L^2(0,T;\,H^1(\Omega))}$. Выбрав $\beta_0 \in (0, \pi/2)$ достаточно малым, имеем $\mathrm{Re}\,(h, e^{i\beta}Kh) \ge 0$ для всех $h \in L^2(\Sigma)$ и $|\beta| \le \beta_0$, откуда следует секториальность оператора K. Лемма доказана.

***Доказательство** теоремы* 3 аналогично доказательству теоремы 1.

В заключение заметим, что в теореме 3, в отличие от теоремы 1, значение α можно выбирать из сколь угодно большого интервала $(0, \alpha^*]$. Это связано с тем, что оператор K является вольтерровым. В этом случае $\mathrm{spr}\,K = 0$ и $\alpha_0 = \infty$ (см. лемму 3).

1. *Коровкина Т. Е.* О сходимости метода разделения областей для эллиптических задач сопряжения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1137 – 1141.
2. *Pankov A., Pankova (Korovkina) T.* The domain decomposition method for parabolic transmission problems // Math. Meth. Appl. Sci. – 1992. – **15**, № 2. – P. 109 – 121.
3. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Коровкина Т. Е.* Метод разделения области в задачах сопряжения и нестационарной фильтрации с неизвестной границей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 14 с.
5. *Вабищевич П. Н.* Итерационная редукция смешанной граничной задачи к задаче Дирихле // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 7. – С. 1177 – 1183.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
7. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin: Springer, 1966.
8. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. 1. – New York: Acad. Press, 1972.
9. *Осмоловский В. Г., Ривкинд В. Я.* О методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1981. – **21**, № 1. – С. 35 – 39.
10 *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. 2. – Berlin: Springer, 1972. – 242 p.

Получено 20.04.93