УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, акад. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГОРОВА

For a Focker–Plank–Kolmogorov equation, the higher approximations are constructed by using Bogolyubov's averaging method.

Будуються вищі наближення для рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова за допомогою методу усереднення за Боголюбовим.

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, находящуюся под воздействием белого шума $\dot{\xi}(t)$ с интенсивностью 1 и описываемую следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, g\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

в котором ε — малый положительный параметр, а функции $f(t,\ x,\ dx/dt)$ и $g(t,\ x,\ dx/dt)$ в некоторой области $\mathcal{D}$ имеют достаточное число производных по x и dx/dt и имеют среднее по t равномерно в $\mathcal{D}$.

Уравнение (1) будем понимать как стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dx &= y\,dt, \\ dy &= [-\omega^2 x + \varepsilon f(t,x,y)]\,dt + \sqrt{\varepsilon}\, g(t,x,y)\,d\xi(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Следуя идее асимптотических методов нелинейной механики, произведем замену переменных: вместо переменных $x(t)$, $y(t) = dx/dt$ введем новые переменные $a(t)$, $\theta(t)$ согласно формулам

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t)\cos(\omega t + \theta(t)), \\ y(t) &= -a(t)\omega\sin(\omega t + \theta(t)), \quad \psi = \omega t + \theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Обратная замена имеет вид

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2(t) + \frac{1}{\omega^2}\,y^2(t), \\ \theta(t) &= -\operatorname{arctg}(y/\omega x) - \omega t. \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, двумерный случайный процесс $[a(t), \theta(t)]$ является диффузионным марковским процессом. Пусть стохастические дифференциалы величин a и θ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} da(t) &= \alpha(t,a,\theta)dt + \beta(t,a,\theta)d\xi(t), \\ d\theta(t) &= \gamma(t,a,\theta)dt + \lambda(t,a,\theta)d\xi(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда, применяя к замене (3) формулу Ито, находим $(\omega t + \theta = \psi)$:

$$\begin{aligned} dx &= \{-\omega a\sin\psi + \alpha\cos\psi - a\gamma\sin\psi - \beta\lambda\sin\psi - a\lambda^2\cos\psi/2\}\,dt + \\ &\quad + (\beta\cos\psi - a\lambda\sin\psi)\,d\xi(t), \\ dy &= -\omega\{a\omega\cos\psi + \alpha\sin\psi + a\gamma\cos\psi + \beta\lambda\cos\psi - a\lambda^2\sin\psi/2\}\,dt - \\ &\quad - \omega(\beta\sin\psi + a\lambda\cos\psi)\,d\xi(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Сравнивая выражения (2) и (6) и приравнивая коэффициенты при dt и $d\xi(t)$, находим выражения для неизвестных функций α, γ, β и λ, подставляя которые в правые части выражений (5), получаем следующие стохастические уравнения для амплитуды $a(t)$ и фазы $\theta(t)$:

$$
\begin{aligned}
da &= \left[-\frac{\varepsilon}{\omega} f(t, a, \theta) \sin\psi + \frac{\varepsilon}{2a\omega^2} g^2(t, a, \theta) \cos^2\psi \right] dt - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} g(t, a, \theta) \sin\psi \, d\xi(t), \\
d\theta &= \left[-\frac{\varepsilon}{a\omega} f(t, a, \theta) \cos\psi - \frac{\varepsilon}{a^2\omega^2} g^2(t, a, \theta) \sin\psi \cos\psi \right] dt - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\omega} g(t, a, \theta) \cos\psi \, d\xi(t),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\psi = \omega t + \theta$, $f(t, a, \theta) = f(t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)$, $g(t, a, \theta) = g(t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)$. Для исследования поведения решений уравнений (7), стохастических переменных $a(t)$ и $\theta(t)$ весьма полезным является рассмотрение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, которое, как известно, записывается в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= \varepsilon \left\{ -\frac{\partial}{\partial a}\left(\mathcal{K}_1 W\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathcal{K}_2 W\right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\mathcal{K}_{11} W\right) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}\left(\mathcal{K}_{12} W\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\mathcal{K}_2 W\right) \right\},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $W = W(t, a, \theta)$ — плотность вероятности совместного распределения амплитуды и фазы системы стохастических дифференциальных уравнений (7). В уравнении (8) $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(t, a, \theta)$ и $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2(t, a, \theta)$ — коэффициенты переноса (сноса) соответственно амплитуды и фазы, $\mathcal{K}_{11} = \mathcal{K}_{11}(t, a, \theta)$ и $\mathcal{K}_{22} = \mathcal{K}_{22}(t, a, \theta)$ — коэффициенты диффузии амплитуды и фазы соответственно, $\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{12}(t, a, \theta)$ — смешанный коэффициент диффузии амплитуды и фазы, ε — малый положительный параметр.

Для приведенной выше системы стохастических уравнений (7) коэффициенты сноса, диффузии и смешанный коэффициент имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(t, a, \theta) &= -\frac{1}{\omega} f(t, a, \theta) \sin\psi + \frac{g^2(t, a, \theta)}{2a\omega^2} \cos^2\psi, \\
\mathcal{K}_2(t, a, \theta) &= -\frac{1}{a\omega} f(t, a, \theta) \cos\psi - \frac{g^2(t, a, \theta)}{a^2\omega^2} \sin\psi \cos\psi, \\
\mathcal{K}_{11}(t, a, \theta) &= \frac{g^2(t, a, \theta)}{\omega^2} \sin^2\psi, \quad \mathcal{K}_{22}(t, a, \theta) = \frac{g^2(t, a, \theta)}{a^2\omega^2} \cos^2\psi, \\
\mathcal{K}_{12}(t, a, \theta) &= \frac{g^2(t, a, \theta)}{a\omega^2} \sin\psi \cos\psi.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Согласно принятым предположениям о структуре функций $f(t, x, dx/dt)$, $g(t, x, dx/dt)$, входящих в правую часть уравнения (1), а также с учетом замены переменных (3) функции $\mathcal{K}_i(t, a, \theta)$, $\mathcal{K}_{ij}(t, a, \theta)$, $i, j = 1, 2$, в некоторой области $\mathcal{D}_1$ имеют достаточное число производных по a и θ и имеют среднее по t равномерно по отношению к a и θ в области $\mathcal{D}_1$.

В явном виде уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, составленное для плотности вероятности $W(t, a, \theta)$ совместного распределения амплитуды и фазы системы стохастических дифференциальных уравнений (7), запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \Bigg\{ -\frac{\partial}{\partial a}\left[\left[-\frac{1}{\omega} f(t,a,\theta)\sin\psi + \frac{g^2(t,a,\theta)}{2a\omega^2}\cos^2\psi\right]W\right] - $$
$$ - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left[-\frac{1}{a\omega} f(t,a,\theta)\cos\psi - \frac{g^2(t,a,\theta)}{a^2\omega^2}\sin\psi\cos\psi\right]W\right] + $$
$$ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\frac{g^2(t,a,\theta)}{\omega^2}\sin^2\psi W\right] + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left[\frac{g^2(t,a,\theta)}{a\omega^2}\sin\psi\cos\psi W\right] + $$
$$ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{g^2(t,a,\theta)}{a^2\omega^2}\cos^2\psi W\right]\Bigg\}. \qquad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением в стандартной форме (по терминологии, введенной Н. Н. Боголюбовым), так как его правая часть пропорциональна малому параметру ε. Поэтому для построения приближенных решений этого уравнения воспользуемся принципом усреднения по Н. Н. Боголюбову [1], дающим возможность получить не только усредненную систему в первом приближении (как это следует согласно теореме Р. З. Хасьминского [2] о непрерывной зависимости от параметра ε при $\varepsilon = \varepsilon_0$ решений уравнений параболического типа), но также и усредненные системы высшего приближения.

Основное содержание принципа усреднения по Боголюбову заключается в следующем [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \qquad (11)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства, t — время, ε — малый положительный параметр.

Предположим, что вектор-функции $X(t, x)$ в некоторой области $\mathcal{D}$ ограничены, имеют достаточное число производных по x и равномерно по отношению к x в области $\mathcal{D}$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt = X_0(x). \qquad (12)$$

Тогда, как показал Н. Н. Боголюбов, метод усреднения органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей уравнений с любой степенью точности относительно малого параметра ε.

Для получения m-го приближения рассмотрим выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \varepsilon^2 F_2(t,\xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t,\xi), \qquad (13)$$

в котором $F_k(t,\xi)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, — суммы вида $\sum_{\mu\neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$ и переменные ξ — решения уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\,\mathcal{P}_1(\xi) + \varepsilon^2\,\mathcal{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m\,\mathcal{P}_m(\xi). \qquad (14)$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε до m-го порядка включительно, подбираем $F_1(t,\xi)$, $F_2(t,\xi), \ldots, F_m(t,\xi)$ и $\mathcal{P}_1(\xi)$, $\mathcal{P}_2(\xi), \ldots, \mathcal{P}_m(\xi)$ так, чтобы выражение (13) удовлетворяло уравнению (11) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}.

В результате получим

$$\mathcal{P}_1(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} = X_0(\xi),$$

$$\mathcal{P}_2(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}, \tag{15}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения по явно содержащемуся t,

$$F_1(t,\xi) = \tilde{X}(t,\xi),$$

$$F_2(t,\xi) = \left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\underset{t}{M}[X(t,\xi)], \tag{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum_{\mu\neq 0}\frac{e^{i\mu t}}{i\mu}X_m(\xi). \tag{17}$$

Если теперь, определив $F_1(t,\xi)$, $F_2(t,\xi), \ldots, F_m(t,\xi)$ и $\mathcal{P}_1(\xi)$, $\mathcal{P}_2(\xi), \ldots$, $\mathcal{P}_m(\xi)$ (что не представляет принципиальных затруднений), рассматривать выражение (13) как некоторую формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то для этой новой переменной получим уравнение (точное)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\,\mathcal{P}_1(\xi) + \varepsilon^2\,\mathcal{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m\,\mathcal{P}_m(\xi) + \varepsilon^{m+1}\mathcal{R}(t,\xi,\varepsilon), \tag{18}$$

правая часть которого состоит из „интегрируемой" части и возмущения $\varepsilon^{m+1}\mathcal{R}(t,\xi,\varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1}.

При этом, если переменная ξ удовлетворяет уравнению (18) (отличающемуся от уравнения (14) на величины порядка малости ε^{m+1}), то выражение (13) представляет собой точное решение уравнения (11). Поэтому в качестве m-го приближения решения уравнения (11) может быть принято выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \varepsilon^2 F_2(t,\xi) + \ldots + \varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t,\xi), \tag{19}$$

в котором ξ определяется уравнением m-го приближения (14). Для такого ξ выражение (13) представляет собой улучшенное m-тое приближение, удовлетворяющее точному уравнению (11) с погрешностью порядка ε^{m+1}.

После этих замечаний об основном содержании метода усреднения по Боголюбову перейдем к построению приближенных решений уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (8). Для этого, прежде всего, преобразуем уравнение (8). Раскрывая в правой части скобки, мы можем записать

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\left\{-\left[\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial a} + \mathcal{K}_1\frac{\partial}{\partial a}\right]W - \left[\frac{\partial\mathcal{K}_2}{\partial\theta} + \mathcal{K}_2\frac{\partial}{\partial\theta}\right]W + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\mathcal{K}_{11}}{\partial a^2} + 2\frac{\partial\mathcal{K}_{11}}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a} + K_{11}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\right]W +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 \mathcal{K}_{12}}{\partial a \partial \theta}+\frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial a}\frac{\partial}{\partial \theta}+K_{12}\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}\right]W+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{K}_{22}}{\partial \theta^2}+2\frac{\partial \mathcal{K}_{22}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}+K_{22}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]W\Bigg\}. \tag{20}$$

Учитывая, что коэффициенты сноса и диффузии имеют среднее по t, предполагаем также, что можно ввести следующие обозначения:

$$\left[-\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial a}-\frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial \theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{K}_{11}}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{K}_{12}}{\partial a \partial \theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{K}_{22}}{\partial \theta^2}\right]=$$

$$= a(t,a,\theta) = a_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} a_\nu(a,\theta)e^{i\nu t},$$

$$\left[-\mathcal{K}_1+\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial a}+\frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial \theta}\right]\frac{\partial}{\partial a} = b(t,a,\theta) = b_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} b_\nu(a,\theta)e^{i\nu t},$$

$$\left[-\mathcal{K}_2+\frac{\partial \mathcal{K}_{22}}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial a}\right]\frac{\partial}{\partial \theta} = c(t,a,\theta) = c_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} c_\nu(a,\theta)e^{i\nu t},$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{K}_{11}\frac{\partial^2}{\partial a^2} = d(t,a,\theta) = d_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} d_\nu(a,\theta)e^{i\nu t}, \tag{21}$$

$$\mathcal{K}_{12}\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} = e(t,a,\theta) = e_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} e_\nu(a,\theta)e^{i\nu t},$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{K}_{22}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = q(t,a,\theta) = q_0(a,\theta)+\sum_{\nu\neq 0} q_\nu(a,\theta)e^{i\nu t},$$

где $a(t,a,\theta)$, $b(t,a,\theta)$, $c(t,a,\theta)$, $d(t,a,\theta)$, $e(t,a,\theta)$ и $q(t,a,\theta)$ представляют собой дифференциальные операторы с коэффициентами, дифференцируемыми по a и θ, а по t имеющими среднее.

Тогда уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\{a(t,a,\theta)+b(t,a,\theta)+c(t,a,\theta)+d(t,a,\theta)+e(t,a,\theta)+q(t,a,\theta)\}W, \tag{22}$$

или, учитывая введенные обозначения (18), а также опуская в коэффициентах для этих операторов обозначения аргументов a и θ — в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\left\{[a_0+\ldots+q_0]W+\sum_{\nu\neq 0} e^{i\nu t}[a_\nu+\ldots+q_\nu]W\right\}, \tag{23}$$

где для упрощения введены следующие сокращения для записи операторов:

$$[a_0+b_0+c_0+d_0+e_0+q_0] = [a_0+\ldots+q_0],$$

$$[a_\nu+b_\nu+c_\nu+d_\nu+e_\nu+q_\nu] = [a_\nu+\ldots+q_\nu].$$

Согласно общей идее Н. Н. Боголюбова об усреднении введем теперь в уравнении (23) замену переменной W на новую переменную W_1 согласно формуле

$$W = W_1 + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} [a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1. \tag{24}$$

Подставляя (24) в левую и правую части уравнения (23), получаем

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}\left[1 + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}[a_\nu + \ldots + q_\nu]\right] + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t}[a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1 =$$

$$= \varepsilon \left\{ [a_0 + \ldots + q_0] W_1 + [a_0 + \ldots + q_0] \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} [a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t}[a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1 + \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t}[a_\nu + \ldots + q_\nu] \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}[a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1 \right\}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь коэффициент при $\partial W_1 / \partial t$. Учитывая, что ε — малый параметр $(\varepsilon < 1)$, получаем

$$\left[1 + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}[a_\nu + \ldots + q_\nu]\right]^{-1} = 1 - \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}[a_\nu + \ldots + q_\nu] + \varepsilon^2 \ldots . \tag{26}$$

Тогда соотношение (25) принимает вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \varepsilon [a_0 + \ldots + q_0] W_1 +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t}[a_\nu + \ldots + q_\nu] \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}[a_\nu + \ldots + q_\nu] W_1 + \varepsilon^3 \ldots . \tag{27}$$

Заметим, что если мы из уравнения (27) найдем $W_1(t, a, \theta)$ и подставим его в правую часть формулы (24), то получим точное решение уравнения (23).

Таким образом, с помощью введенной замены переменной W согласно формуле (25) мы сдвинули время t в правой части уравнения (23) к величинам порядка ε^2. Пренебрегая в правых частях уравнения (27) слагаемыми порядка ε^2 и выше, получаем усредненное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова в следующем виде:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \varepsilon [a_0 + \ldots + q_0] W_1. \tag{28}$$

В уравнении (28) очевидны обозначения, которые принимают в явном виде операторы a_0, b_0, c_0, e_0 и q_0:

$$a_0 = -\frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_1}{\partial a} - \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\mathcal{K}}_{11}}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{K}}_{12}}{\partial a \partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\mathcal{K}}_{22}}{\partial \theta^2},$$

$$b_0 = \left(-\overline{\mathcal{K}}_1 + \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_{11}}{\partial a} + \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_{12}}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial a},$$

$$c_0 = \left(-\overline{\mathcal{K}}_2 + \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}_{12}}{\partial a}\right)\frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$d_0 = \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{K}}_{11}\frac{\partial^2}{\partial a^2}, \quad e_0 = \overline{\mathcal{K}}_{12}\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}, \quad q_0 = \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{K}}_{22}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{29}$$

Здесь черта сверху обозначает усреднение по времени t.

Подставляя значения (29) в правую часть усредненного уравнения (28), получаем усредненное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, полученное согласно теореме Р. З. Хасьминского [2] и имеющее вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \varepsilon\left\{-\frac{\partial}{\partial a}\left(\overline{\mathcal{K}}_1 W_1\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\mathcal{K}}_2 W_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\overline{\mathcal{K}}_{11} W_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\theta}\left(\overline{\mathcal{K}}_{12} W_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\overline{\mathcal{K}}_{22} W_1\right)\right\}. \tag{30}$$

При этом если существует стационарная плотность $W_1(\alpha, \theta)$, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\overline{\mathcal{K}}_1 W_1\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\mathcal{K}}_2 W_1\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\overline{\mathcal{K}}_{11} W_1\right) + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left(\overline{\mathcal{K}}_{12} W_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\overline{\mathcal{K}}_{22} W_1\right). \tag{31}$$

Решение этого уравнения должно быть неотрицательным и нормированным.

Продолжая изложенный процесс, путем новой замены переменных в уравнении (27) можно сдвинуть независимую переменную t в слагаемые, пропорциональные третьей степени малого параметра и, пренебрегая ими, получить усредненное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова второго приближения и т. д.

Обсудим полученный результат. Решив усредненное уравнение (28) или, что то же самое, уравнение (30), найдем первое приближение решения точного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (8) или (22). Выражение (24), в которое мы подставим значение W_1, найденное из усредненного уравнения (28), представит собой так называемое улучшенное первое приближение. Выражение (24) учитывает некоторые малые флуктуации, налагаемые на решение усредненного уравнения (28). В первом приближении, рассматривая только решение усредненного уравнения (уравнения первого приближения), мы этими флуктуациями пренебрегаем. Эти флуктуации определяются следующим выражением:

$$\varepsilon\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}\left[a_\nu + \ldots + q_\nu\right]W_1, \tag{32}$$

где W_1 — решение усредненного уравнения (30).

Пример. Рассмотрим воздействие малых случайных сил на нелинейную колебательную систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ван – дер – Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{33}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — процесс „белого шума", ε — малый положительный параметр.

Уравнения (33) будем понимать как стохастические дифференциальные уравнения в смысле Ито [3]:

$$dx = y\,dt,$$
$$dy = \left[-\omega^2 x + \varepsilon(1 - x^2)y\right]dy + \sqrt{\varepsilon}\sigma\,d\xi(t). \tag{34}$$

Введем в уравнениях (34) вместо переменных x и $y = dx/dt$ новые стохастические переменные a и θ с помощью замены переменных

$$x(t) = a(t)\cos(t+\theta(t)),$$
$$y(t) = -a(t)\sin(t+\theta(t)) \qquad (\psi = t+\theta). \tag{35}$$

Тогда, как и обычно, воспользовавшись известной формулой Ито, после несложных выкладок получаем систему стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$da = \varepsilon\left[\left(1-a^2\cos^2\psi\right)a\sin^2\psi + \frac{\sigma^2}{2a}\cos^2\psi\right]dt - \sqrt{\varepsilon}\sigma\sin\psi\, d\xi(t),$$
$$d\theta = \varepsilon\left[\left(1-a^2\cos^2\psi\right)\sin\psi\cos\psi - \frac{\sigma^2}{a^2}\sin\psi\cos\psi\right]dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a}\sigma\cos\psi\, d\xi(t), \tag{36}$$

где $\psi = t+\theta$.

Для этой системы уравнений коэффициенты переноса амплитуды и фазы соответственно имеют вид

$$\mathcal{K}_1(t,a,\theta) = (1-a^2\cos^2\psi)\,a\sin^2\psi + \frac{\sigma^2}{2a}\cos^2\psi,$$
$$\mathcal{K}_2(t,a,\theta) = (1-a^2\cos^2\psi)\sin\psi\cos\psi - \frac{\sigma^2}{a^2}\sin\psi\cos\psi, \tag{37}$$

а коэффициенты диффузии амплитуды и фазы и смешанный коэффициент диффузии амплитуды и фазы имеют вид

$$\mathcal{K}_{11}(t,a,\theta) = \sigma^2\sin^2\psi, \quad \mathcal{K}_{22}(t,a,\theta) = \frac{\sigma^2}{a^2}\cos^2\psi,$$
$$\mathcal{K}_{12}(t,a,\theta) = \frac{\sigma^2}{a}\cos\psi\sin\psi. \tag{38}$$

Подставляя значения (37) и (38) в правую часть уравнения (5), получаем уравнение (точное) Фоккера – Планка – Колмогорова, соответствующее уравнениям (36) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\left\{-\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(\left(1-a^2\cos^2\psi\right)a\sin^2\psi + \frac{\sigma^2}{2a}\cos^2\psi\right)W\right] -\right.$$
$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\left(1-a^2\cos^2\psi\right)\sin\psi\cos\psi - \frac{\sigma^2}{a^2}\sin\psi\cos\psi\right)W\right] +$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\sigma^2\sin^2\psi W\right] + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left[\frac{\sigma^2}{a}\sin\psi\cos\psi W\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{\sigma^2}{a^2}\cos^2\psi W\right]\right\}. \tag{39}$$

Учитывая принятые обозначения, уравнение (39) можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\left\{\left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{3a^2}{8}-\frac{\sigma^2}{4a^2}\right) +\right.\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{3\sigma^2}{8a^2}+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(e^{2i\psi}+e^{-2i\psi}\right)+\frac{a^2}{16}\left(e^{4i\psi}+e^{-4i\psi}\right)\right]W +$$
$$+\left[-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3}{4}+\frac{\sigma^2}{2a}\right)+\left(\frac{3\sigma^2}{8a}+\frac{a}{4}\right)\left(e^{2i\psi}+e^{-2i\psi}\right)-\frac{a^3}{16}\left(e^{4i\psi}+e^{-4i\psi}\right)\right]\frac{\partial W}{\partial a} +$$

$$+\left[-\left(\frac{1}{4i}-\frac{a^2}{8i}+\frac{\sigma^2}{2ia^2}\right)\left(e^{2i\psi}-e^{-2i\psi}\right)+\frac{a^2}{16i}\left(e^{4i\psi}-e^{-4i\psi}\right)\right]\frac{\partial W}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\sigma^2}{4}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{2i\psi}-e^{-2i\psi}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}+\frac{\sigma^2}{4ia}\left(e^{2i\psi}-e^{-2i\psi}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial a\partial\theta}+$$

$$+\frac{\sigma^2}{4a^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{2i\psi}+e^{-2i\psi}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\Bigg\}. \tag{40}$$

Соответствующее усредненное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (уравнение первого приближения) имеет вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}=\varepsilon\left\{-\left(\frac{1}{2}-\frac{3a^2}{8}-\frac{\sigma^2}{4a^2}\right)W_1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3}{4}+\frac{\sigma^2}{2a}\right)\frac{\partial W_1}{\partial a}+\frac{\sigma^2}{4}\frac{\partial^2 W_1}{\partial a^2}+\frac{\sigma^2}{4a^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\theta^2}\right\}. \tag{41}$$

Для определения же стационарной плотности $W_1(a,\theta)$ имеем уравнение

$$-\left(\frac{1}{2}-\frac{3a^2}{8}-\frac{\sigma^2}{4a^2}\right)W_1-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3}{4}+\frac{\sigma^2}{2a}\right)\frac{\partial W_1}{\partial a}+\frac{\sigma^2}{4}\frac{\partial^2 W_1}{\partial a^2}+\frac{\sigma^2}{4a^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial\theta^2}=0. \tag{42}$$

Для данного уравнения $\mathcal{K}_{12}(a,\theta)=0$ и, следовательно, уравнение (42), как это показано в монографии [4, с. 138], может быть проинтегрировано согласно формуле

$$W_1(a,\theta)=\exp\left\{\frac{4}{\sigma^2}\int\left(\frac{a}{2}-\frac{a^3}{8}+\frac{\sigma^2}{4a}\right)da\right\}. \tag{43}$$

Интегрируя (43), находим выражение для плотности вероятности усредненного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, соответствующее стационарному процессу

$$W_1(a,\theta)=Ca\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right]. \tag{44}$$

Определяя максимум этого выражения, получаем наиболее вероятностное значение амплитуды колебаний в системе, описываемой уравнением Ван – дер – Поля, возбужденное случайным внешним воздействием $\sigma\dot{\xi}(t)$:

$$a^2=2+\sqrt{4+2\sigma^2}. \tag{45}$$

Легко видеть, что полученное нами выражение (45) при отсутствии случайного воздействия $\sigma=0$ совпадает с известным значением амплитуды для решения уравнения Ван – дер – Поля в первом приближении: $a=2$.

Возвратимся теперь к рассмотрению замены (24), представляющей собой после того, как найдено W_1, „улучшенное" первое приближение решения уравнения (40):

$$W=W_1+\varepsilon\sum_{\nu\neq0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}\left[a_\nu+\ldots+q_\nu\right]W_1, \tag{46}$$

где W_1 определено в (44).

Для того чтобы записать „улучшенное" первое приближение — выражение

(46) в явном виде, необходимо учесть не только явные выражения коэффициентов в выражении (46), но также и то, что (44) не зависит от θ, а следовательно, $\partial W_1 / \partial\theta = 0$, $\partial^2 W_1 / \partial a\, \partial\theta = 0$ и $\partial^2 W_1 / \partial\theta^2 = 0$.

Итак, имеем

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = C\left[1+\left(\frac{2a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{2\sigma^2}\right)\right]\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial a^2} = C\left[\frac{6a}{\sigma^2}-\frac{5a^3}{2\sigma^2}+\frac{4a^3}{\sigma^4}-\frac{2a^5}{\sigma^4}+\frac{a^7}{4\sigma^4}\right]\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right], \tag{47}$$

а также следующие выражения:

$$a_0(a,\theta) = -\left(\frac{1}{2}-\frac{3a^2}{8}-\frac{\sigma^2}{4a^2}\right),$$

$$a_2(a,\theta) = \left(-\frac{3\sigma^2}{8a^2}+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}\right)e^{2i\theta},$$

$$a_{-2}(a,\theta) = \left(-\frac{3\sigma^2}{8a^2}+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}\right)e^{-2i\theta},$$

$$a_4(a,\theta) = \frac{a^2}{16}e^{4i\theta}, \quad a_{-4}(a,\theta) = \frac{a^2}{16}e^{-4i\theta},$$

$$b_0(a,\theta) = -\frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3}{4}+\frac{\sigma^2}{2a}\right)\frac{\partial}{\partial a},$$

$$b_2(a,\theta) = \left(\frac{3\sigma^2}{8a}+\frac{a}{4}\right)e^{2i\theta}\frac{\partial}{\partial a},$$

$$b_{-2}(a,\theta) = \left(\frac{3\sigma^2}{8a}+\frac{a}{4}\right)e^{-2i\theta}\frac{\partial}{\partial a},$$

$$b_4(a,\theta) = -\frac{a^3}{16}e^{4i\theta}\frac{\partial}{\partial a}, \quad b_{-4}(a,\theta) = -\frac{a^3}{16}e^{-4i\theta}\frac{\partial}{\partial a},$$

$$d_0(a,\theta) = \frac{\sigma^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2},$$

$$d_2(a,\theta) = -\frac{\sigma^2}{8}e^{2i\theta}\frac{\partial^2}{\partial a^2}, \quad d_{-2}(a,\theta) = -\frac{\sigma^2}{8}e^{-2i\theta}\frac{\partial^2}{\partial a^2}. \tag{48}$$

Подставим полученные значения согласно формулам (47) и (48) в выражение „улучшенного" первого приближения:

$$W(t,a,\theta) = W_1 + \varepsilon\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}\left[a_\nu(a,\theta)W_1 + b_\nu(a,\theta)W_1 + d_\nu(a,\theta)W_1\right]. \tag{49}$$

В результате получим „улучшенное" первое приближение для плотности $W(t,a,\theta)$ (близкое к стационарной плотности $W_1(a,\theta)$, определяемой уравнением (42)) в виде

$$W(t,a,\theta) = a\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right] +$$

$$+\,\varepsilon\left\{\left[\frac{e^{2i\theta}e^{2it}}{2i}+\frac{e^{-2i\theta}e^{-2it}}{-2i}\right]\left(\frac{3a^3}{8}+\frac{a^5}{8\sigma^2}-\frac{a^7}{32\sigma^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{4i\theta}e^{4it}}{2i}+\frac{e^{-4i\theta}e^{-4it}}{-2i}\right]\left(-\frac{a^5}{8\sigma^2}+\frac{a^7}{32\sigma^2}\right)\Bigg\}\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right] \tag{50}$$

или в виде

$$W(t,a,\theta) = a\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right]+\varepsilon\left\{\sin 2(t+\theta)\left(\frac{3a^3}{8}+\frac{a^5}{8\sigma^2}-\frac{a^7}{32\sigma^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin 4(t+\theta)\left(-\frac{a^5}{8\sigma^2}+\frac{a^7}{32\sigma^2}\right)\right\}\exp\left[\frac{a^2}{\sigma^2}-\frac{a^4}{8\sigma^2}\right]. \tag{51}$$

Для определения наиболее вероятностного значения улучшенной амплитуды в стационарном режиме необходимо найти производные по a и θ от плотности $W(t,a,\theta)$ и приравнять их нулю. Имеем

$$W'_a(t,a,\theta) = \sigma^2+2a^2-\frac{a^4}{2}+$$

$$+\varepsilon\left\{\sin 2(t+\theta)\left[\frac{9a^2\sigma^2}{8}+\frac{11a^4}{8}-\frac{13a^6}{32}\right]+\left(\frac{a^6}{4\sigma^2}-\frac{a^8}{8\sigma^2}+\frac{a^{10}}{64\sigma^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin 4(t+\theta)\left[-\frac{5a^4}{8}+\frac{7a^6}{32}-\left(\frac{a^6}{4\sigma^2}-\frac{a^8}{8\sigma^2}+\frac{a^{10}}{64\sigma^2}\right)\right]\right\} = 0, \tag{52}$$

$$W'_\theta(t,a,\theta) = \cos 2(t+\theta)\left[\frac{3a^3}{8}+\frac{a^5}{8\sigma^2}-\frac{a^7}{32\sigma^2}\right]-$$

$$-\cos 4(t+\theta)\left[\frac{a^5}{8\sigma^2}-\frac{a^7}{32\sigma^2}\right] = 0.$$

Из системы уравнений (52) находим наиболее вероятностные значения стационарных амплитуд и фазы колебаний в системе, описываемой уравнением Ван – дер – Поля, возбужденным случайным внешним воздействием, в „улучшенном" первом приближении, т. е. с учетом малых вибраций, зависящих от времени t.

Так, из первого уравнения системы (52) получаем $a=a(t,\theta,\sigma)$, которое при $\sigma\to 0$ стремится к $a(t,\theta,0)$, где

$$a(t,\theta,0) = 2-\frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t+\theta)+\frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t+\theta), \tag{53}$$

при этом полученное нами „улучшенное" значение для амплитуды (53) совпадает с „улучшенным" первым приближением для амплитуды, определяемым для уравнения Ван – дер – Поля при отсутствии случайного возмущения ([1, с. 84], формула (4.30)).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, вып. 1. – С. 1–25.
3. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
4. *Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.

Получено 22.09.94