УДК 515.12; 517.51

В. К. Маслюченко, канд. фіз.-мат. наук,
В. В. Михайлюк, асп. (Чернів. ун-т)

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ КОМПАКТІВ І ЇХ ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД $\mathfrak{n}$ ЗМІННИХ

By using a theorem on density of topological product and a theorem about dependence of a continuous function defined on a compact set on a countable number of coordinates, we show that every separately continuous function, defined on a product of two spaces which are products of compact spaces of density $\leq \mathfrak{n}$, depends on $\mathfrak{n}$ variables. For metrizable compact spaces, we obtain a complete description of sets of discontinuity points for such functions.

На основі теореми про щільність топологічного добутку і узагальнення теореми про залежність неперервної функції на добутку від зліченного числа координат показано, що кожна нарізно неперервна функція на добутку двох просторів, які є добутками компактів щільності $\leq \mathfrak{n}$, залежить від $\mathfrak{n}$ змінних. У випадку метризовних компактів одержано повний опис множин точок розриву таких функцій.

1. У роботі [1] за допомогою досить кропітких міркувань, що базувалися на теоретико-множинній лемі про віяла, близькій до одного результату Шаніна [2, с. 185], показано, що нарізно неперервна функція $f\colon [0,1]^S \times [0,1]^T \to \mathbb{R}$ на добутку двох тихоновських кубів, один з яких має незліченну вагу, не може мати одноелементної множини точок розриву. Як зауважив О. В. Собчук, метод роботи в [1] можна застосувати і до доведення такого твердження: жодна функція першого класу Бера $g\colon [0,1]^T \to \mathbb{R}$ на тихоновському кубі незліченної ваги не може бути розривною рівно в одній точці. Ці результати, відповідним чином опрацьовані, з єдиних позицій викладені в [3]. Вони тісно пов'язані з теоремами про залежність неперервних функцій на нескінченних добутках від зліченного числа змінних [2, с. 187; 229]. С. П. Гулько показав (див. зауваження в [3]), як друге із сформульованих тверджень досить просто може бути пояснене на основі того факту, що кожна неперервна функція $f\colon [0,1]^T \to \mathbb{R}$ залежить від зліченного числа змінних. Після цього виникло питання: чи не буде й кожна нарізно неперервна функція $f\colon [0,1]^S \times [0,1]^T \to \mathbb{R}$ залежати від зліченного числа змінних? Із ствердної відповіді на це питання відразу ж випливає результат роботи [1]. Більш того, на основі нього та інших відомих результатів [3 – 6] легко було б одержати повний опис підмножин в $[0,1]^S \times \times [0,1]^T$, що можуть бути множинами точок розриву нарізно неперервних відображень $f\colon [0,1]^S \times [0,1]^T \to \mathbb{R}$. Ця стаття дає ствердну відповідь на поставлене питання. Більш того, замість відрізка $[0,1]$ в ній розглядаються довільні компакти і вивчається залежність від $\mathfrak{n}$ змінних, де $\mathfrak{n}$ — деяке кардинальне число [7]. Основними інструментами дослідження є теорема Тихонова про компактність добутку та теорема Г'юітта – Марчевського – Пондіцері про щільність добутку [2, с. 217; 133].

2. Розглянемо уточнений варіант теореми Кантора про рівномірну неперервність, яку ми застосуємо до доведення існування найменшої множини, на якій зосереджується неперервна на добутку компактів функція.

Твердження 1. *Нехай $f\colon X \to Z$ — неперервне відображення компактного простору X у рівномірний простір Z, $\mathcal{B}$ — база в X. Тоді для кожного оточення W в Z існує таке скінченне покриття $\{U_1, \ldots, U_k\}$ простору X множинами U_i з бази $\mathcal{B}$, що $f(U_i) \times f(U_i) \subseteq W$ для кожного $i = 1, \ldots, k$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне оточення W. Візьмемо таке симетричне оточення W', що $W' \circ W' \subseteq W$. Розглянемо для кожної точки x з X такий її окіл V_x, що $f(V_x) \subseteq W'_x$, де $W'_x = \{z \in Z: (f(x), z) \in W'\}$ (або $\{f(x)\} \times \times f(V_x) \subseteq W'$). Оскільки $\mathcal{B}$ — база, то для кожного x з X існує така множина U_x з $\mathcal{B}$, що $x \in U_x \subseteq V_x$, і тоді $\{f(x)\} \times f(U_x) \subseteq W'$, яке б не було x. Тому що W' симетричне, то

$$f(U_x) \times f(U_x) = (f(U_x) \times \{f(x)\}) \circ (\{f(x)\} \times f(U_x)) \subseteq W' \circ W' \subseteq W.$$

Виділивши з відкритого покриття $\{U_x: x \in X\}$ простору X скінченне підпокриття, ми й одержуємо шукане покриття.

Позначимо через $x|_{\tilde{S}}$ звуження функції x на множину $\tilde{S}$.

***Означення* 1.** *Нехай* $X = \prod_{s \in S} X_s$, $A \subseteq X$, $\tilde{S} \subseteq S$ *і* Z — *довільна множина. Будемо говорити, що відображення* $f: A \to Z$ *зосереджене на множині* $\tilde{S}$, *якщо для будь-яких* x' *і* x'' *з* A *з умови* $x'|_{\tilde{S}} = x''|_{\tilde{S}}$ *випливає, що* $f(x') = f(x'')$. *Якщо при цьому потужність* $|\tilde{S}|$ *множини* $\tilde{S}$ *менша або рівна деякого кардинального числа* $\mathfrak{n}$, *то кажуть, що функція* f *залежить від* $\mathfrak{n}$ *змінних.*

Зрозуміло, що сталі функції і тільки вони зосереджені на порожній множині.

Теорема 1. *Якщо* $X = \prod_{s \in S} X_s$ — *топологічний добуток сім'ї компактних просторів* X_s *і* Z — *відокремний рівномірний простір ваги* $\mathfrak{m}$, *то для кожного неперервного відображення* $f: X \to Z$ *існує така найменша множина* $S_0 \subseteq S$, *на якій* f *зосереджене, і при цьому* $|S_0| \le \mathfrak{m}$.

Доведення. Розглянемо стандартну базу $\mathcal{B}$ топології добутку на X, що складається з множин $U = \prod_{s \in S} U_s$, де U_s — відкриті підмножини X_s і множина $S(U) = \{s \in S: U_s \ne X_s\}$ скінченна, і таку базу $\mathcal{W} = \{W_t: t \in T\}$ симетричних оточень W_t рівномірності на Z, що $|T| = \mathfrak{m}$. Оскільки за теоремою Тихонова простір X компактний, то на основі твердження 1 для кожного $t \in T$ існує таке скінченне покриття $\{U_i^{(t)}: i = 1, \ldots, k_t\}$ простору X елементами $U_i^{(t)}$ бази $\mathcal{B}$, що $f(U_i^{(t)}) \times f(U_i^{(t)}) \subseteq W_t$ для кожного $i = 1, \ldots, k_t$. Покладемо $\tilde{S}_t = \bigcup_{i=1}^{k_t} S(U_i^{(t)})$. Множина $\tilde{S}_t$, очевидно, скінченна і має таку властивість: якщо $x'|_{\tilde{S}_t} = x''|_{\tilde{S}_t}$, то $(f(x'), f(x'')) \in W_t$ (бо точки x' та x'' обов'язково належать хоча б одному $U_i^{(t)}$). Позначимо через S_t мінімальну підмножину $\tilde{S}_t$, для якої з умови $x'|_{S_t} = x''|_{S_t}$ випливає, що $(f(x'), f(x'')) \in W_t$ (існування такої множини легко одержується на основі скінченності $\tilde{S}_t$), і покладемо $S_0 = \bigcup_{t \in T} S_t$. Покажемо, що S_0 — шукана множина. Нехай S' — довільна підмножина S, на якій зосереджується функція f. Переконаємося в тому, що $S_0 \subseteq S'$. Нехай це не так. Тоді існує таке $t_0 \in T$, що $S_{t_0} \setminus S' \ne \varnothing$, отже, множина $S'_{t_0} = S_{t_0} \cap S'$ строго міститься в S_{t_0}. Припустимо $x'|_{S'_{t_0}} = x''|_{S'_{t_0}}$. Визначимо функцію $\tilde{x} \in X$, поклавши $\tilde{x}(s) = x'(s)$ при $s \notin S_{t_0}$ і $\tilde{x}(s) = x''(s)$ при $s \in S_{t_0}$. Оскільки $\tilde{x}|_{S \setminus S_{t_0}} = x'|_{S \setminus S_{t_0}}$ і $\tilde{x}|_{S'_{t_0}} = x''|_{S'_{t_0}} = x'|_{S'_{t_0}}$, то $\tilde{x}|_{(S \setminus S_{t_0}) \cup S'_{t_0}} = x'|_{(S \setminus S_{t_0}) \cup S'_{t_0}}$. Але

$$(S \setminus S_{t_0}) \cup S'_{t_0} = (S \setminus S_{t_0}) \cup S' \supseteq S'.$$

Тому $\tilde{x}|_{S'} = x'|_{S'}$, отже, $f(\tilde{x}) = f(x')$. Крім того, $\tilde{x}|_{S_{t_0}} = x''|_{S_{t_0}}$, звідки $(f(\tilde{x}), f(x'')) \in W_{t_0}$, а значить, і $(f(x'), f(x'')) \in W_{t_0}$, що суперечить мінімальності множини S_{t_0}. Таким чином, S_0 міститься в довільній множині, на якій зосереджена функція f. Далі, якщо $x'|_{S_0} = x''|_{S_0}$, то $x'|_{S_t} = x''|_{S_t}$, звідки $(f(x'), f(x'')) \in W_t$ для кожного $t \in T$, а значить, $(f(x'), f(x'')) \in \bigcap_{t \in T} W_t$. Оскільки простір Z відокремний, то

$$\bigcap_{t \in T} W_t = \Delta = \{(x, x) \colon x \in X\}.$$

Тому $f(x') = f(x'')$. Це показує, що f зосереджена на S_0, що й треба було довести.

Зауваження. Для функцій, визначених на підмножинах добутків, теорема 1 не вірна. Дійсно, якщо $|S| \geq 2$, s_1 і s_2 — два різних елементи з S, $X_s = [0, 1]$ для кожного s, $A = \{e_{s_1}, e_{s_2}\}$, де, як звичайно, через e_t позначена функція, для якої $e_t(s) = 0$ при $s \neq t$ і $e_t(t) = 1$, і $f \colon A \to \mathbb{R}$ — функція, що визначена, наприклад, рівностями $f(e_{s_1}) = 1$, $f(e_{s_2}) = 0$, і, очевидно, неперервна. Тоді f зосереджена як на множині $\{s_1\}$, так і на множині $\{s_2\}$ і відмінна від константи. Отже, найменшої множини s_0, на якій була б зосереджена функція f, не існує.

3. Розглянемо функції від двох змінних. Нагадаємо, що для функції $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ і елементів $x \in X$ і $y \in Y$ покладають $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$, а відображення $\varphi \colon X \to \mathbb{R}^Y$ та $\psi \colon Y \to \mathbb{R}^X$ означаються так: $\varphi(x) = f^x$ і $\psi(y) = f_y$. Якщо X і Y — топологічні простори, то функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ називається нарізно неперервною за умови, що для кожного $x \in X$ функція $f^x \colon Y \to \mathbb{R}$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y \colon X \to \mathbb{R}$ неперервна. Зауважимо, що неперервність f по y для кожного x рівносильна кожному з двох тверджень: $\varphi(X) \subseteq C(Y)$, де $C(Y)$ — простір неперервних на Y функцій, чи ψ — неперервне відображення відносно топології поточкової збіжності на $\mathbb{R}^X$, і, так само, неперервність f по x для кожного y рівносильна неперервності φ відносно топології поточкові збіжності на $\mathbb{R}^Y$ і включенню $\psi(Y) \subseteq C(X)$. Нарізна ж неперервність рівносильна неперервності відображення $\varphi \colon X \to C_p(Y)$ чи відображення $\psi \colon Y \to C_p(X)$, де $C_p(Y)$ і $C_p(X)$ — простори $C(Y)$ і $C(X)$ відповідно з топологіями поточкової збіжності. Зауважимо також те, що простори $C_p(X)$ і $C_p(Y)$ рівноміризовні за допомогою відокремної рівномірності.

Означення 2. *Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$, $Y = \prod_{t \in T} Y_t$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $\tilde{S} \subseteq S$, $\tilde{T} \subseteq T$. Будемо говорити, що функція $f \colon A \times B \to \mathbb{R}$ зосереджена по першій (другій) змінній на множині $\tilde{S}$ $(\tilde{T})$, якщо відповідне відображення $\varphi \colon A \to \mathbb{R}^B$ $(\psi \colon B \to \mathbb{R}^A)$ зосереджене на множині $\tilde{S}(\tilde{T})$. Якщо при цьому $|\tilde{S}| \leq \mathfrak{n}$ чи $|\tilde{T}| \leq \mathfrak{n}$, то кажуть, що f залежить від $\mathfrak{n}$ змінних по першій чи відповідно по другій змінній. Нарешті, f залежить від $\mathfrak{n}$ змінних, якщо f залежить від $\mathfrak{n}$ змінних як по першій, так і по другій змінній.*

Твердження 2. *Нехай $(X_s)_{s \in S}$ і $(Y_t)_{t \in T}$ — дві сім'ї топологічних просторів, а $X = \prod_{s \in S} X_s$ і $Y = \prod_{t \in T} Y_t$ — їхні топологічні добутки. Якщо f:*

$X \times Y \to \mathbb{R}$ — неперервна по другій змінній функція, $B \subseteq Y$ — всюди щільна в Y множина і звуження $f|_{X\times B}$ зосереджене на множині $\tilde{S} \subseteq S$ по першій змінній, то і функція f зосереджена на цій же множині $\tilde{S}$ по першій змінній.

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ і $x_1|_{\tilde{S}} = x_2|_{\tilde{S}}$. Припустимо, що $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| = \varepsilon > 0$. Оскільки f неперервна по першій змінній, то існують околи V_1 та V_2 точки y такі, що $\forall\, y' \in V_i$ $|f(x_i, y') - f(x_i, y)| < \varepsilon/3$ для $i = 1, 2$. За умовою множина B щільна в Y, тому існує така точка b із B, що $b \in V_1 \cap V_2$. Оскільки функція $f|_{X\times B}$ зосереджена на множині $\tilde{S}$ по першій змінній, то $f(x_1, b) = f(x_2, b)$. Крім того, врахувавши, що $b \in V_1 \cap V_2$, маємо, що $|f(x_1, b) - f(x_2, y)| < \varepsilon/3$ і $|f(x_2, b) - f(x_2, y)| < \varepsilon/3$. Звідси випливає, що $|f(x_1, y) - f(x_2', y)| < 2\varepsilon/3$. А це суперечить вибору числа ε. Таким чином, ми показали, що f зосереджена на $\tilde{S}$ по першій змінній.

Наступний результат базується на теоремі Г'юітта – Марчевського – Пондіцері про щільність добутку. Щільність топологічного простору Z, тобто найменшу потужність його всюди щільних підмножин, ми позначаємо, як звичайно, через $d(Z)$.

Твердження 3. *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ — сім'я компактів, $(Y_t)_{t\in T}$ — сім'я топологічних просторів, а $X = \prod_{s\in S} X_s$, і $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ — їхні топологічні добутки, $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ — таке кардинальне число, що $d(Y_t) \leq \mathfrak{m}$ для кожного $t \in T$, і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді якщо f залежить від $2^{\mathfrak{m}}$ змінних по другій змінній, то f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних по першій змінній.*

Доведення. З умов твердження випливає, що існує така множина $\tilde{T} \subseteq T$, що f зосереджена на $\tilde{T}$ по другій змінній і $|\tilde{T}| \leq 2^{\mathfrak{m}}$. Розглянемо функцію $g : X \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, де $\tilde{Y} = \prod_{t\in\tilde{T}} Y_t$, яка для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ означається за формулою $g(x, y|_{\tilde{T}}) = f(x, y)$. Оскільки f зосереджена на $\tilde{T}$, то функція g означена коректно. За теоремою Г'юітта – Марчевського – Пондіцері простір $\tilde{Y}$ задовольняє умову $d(\tilde{Y}) \leq \mathfrak{m}$. Нехай множина $B \subseteq \tilde{Y}$ така, що $\overline{B} = \tilde{Y}$, $|B| \leq \mathfrak{m}$. Оскільки простір $\mathbb{R}$ є рівномірним простором зліченної ваги, то з теореми 1 випливає, що кожна неперервна функція, визначена на добутку компактів, залежить від зліченного числа змінних. Тому для кожного $b \in B$ існує така не більш ніж зліченна множина $S_b \subseteq S$, на якій зосереджена функція $g_b : X \to \mathbb{R}$, $g_b(x) = g(x, b)$. Позначимо $\tilde{S} = \bigcup_{b\in B} S_b$. Зауважимо, що $|\tilde{S}| \leq \leq \mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$. Зрозуміло, що функція $g|_{X\times B} : X \times B \to \mathbb{R}$ є нарізно непервною функцією, яка зосереджена на множині $\tilde{S}$ по першій змінній. Тому за твердженням 2 функція g також зосереджена на множині $\tilde{S}$ по першій змінній. Але, як випливає з означення функції g, якщо $g(x', y|_{\tilde{T}}) = g(x'', y|_{\tilde{T}})$ для деяких $x', x'' \in X$ і $y \in Y$, то $f(x', y) = f(x'', y)$. Отже, і функція f зосереджена на $\tilde{S}$ по першій змінній.

4. Доведемо одну теоретико-множинну лему, яка має і самостійний інтерес.

Лема. *Нехай λ — довільний ординал, $\aleph_i$ — нескінченне кардинальне число, $(S_\xi)_{\xi<\lambda}$ — сім'я множин, яка задовольняє умови*

$$|S_\xi| \leq \aleph_i \quad \textit{для кожного } \xi < \lambda, \tag{1}$$

$$\textit{якщо } \xi_1 < \xi_2 < \lambda, \textit{ то } S_{\xi_1} \subseteq S_{\xi_2}. \tag{2}$$

Тоді $|\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi| \le \aleph_{i+1}$.

Доведення. Розглянемо систему $\mathcal{A} = \{S_\xi : \xi < \lambda\}$. З умов леми випливає, що відношення включення $\subseteq$ цілком впорядковує систему $\mathcal{A}$. Нехай α — порядковий тип множини $\mathcal{A}$ і $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \alpha\}$, причому сім'я (A_ξ) з ростом ξ строго зростає. Припустимо, що $|\alpha| > \aleph_{i+1}$. Для кожного ξ такого, що $\xi + 1 < \alpha$, існує $a_\xi \in A_{\xi+1} \setminus A_\xi$. Позначимо $A = \{a_\xi : \xi < \omega_{i+1}\}$. Оскільки всі елементи a_ξ різні, то $|A| = |\omega_{i+1}| = \aleph_{i+1}$. Але за вибором a_ξ маємо $A \subseteq A_{\omega_{i+1}}$, тому $|A| \le |A_{\omega_{i+1}}|$, що суперечить умові (1). Отже, $|\alpha| \le \aleph_{i+1}$. Тоді на основі теореми Гессенберга [7, с. 284]

$$\left|\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi\right| = \left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| \le |\alpha| \cdot \aleph_i \le \aleph_{i+1} \cdot \aleph_i = \aleph_{i+1}.$$

5. Розглянемо основні результати.

Теорема 2. *Нехай* $(X_s)_{s\in S}$ *і* $(Y_t)_{t\in T}$ *— дві сім'ї компактних просторів, а* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *і* $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ *— їхні топологічні добутки,* $\mathfrak{m} \ge \aleph_0$ *— таке кардинальне число, що* $d(X_s) \le 2^{\mathfrak{m}}$ *і* $d(Y_t) \le \mathfrak{m}$ *для довільних* $s \in S$ *і* $t \in T$, f: $X \times Y \to \mathbb{R}$ *— нарізно неперервне відображення. Тоді* f *залежить від* $\mathfrak{m}$ *змінних по першій змінній.*

Доведення проведемо за трансфінітною індукцією за потужністю множини T. Нехай потужність множини T не перевищує $2^{\mathfrak{m}}$. Тоді за твердженням 3 функція f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних по першій змінній.

Припустимо, що теорема справджується, як тільки потужність множини T менша $\mathfrak{n}$, де $\mathfrak{n}$ — деяке нескінченне кардинальне число. Тоді покажемо, що коли потужність множини T дорівнює $\mathfrak{n}$, тоді функція f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних по першій змінній. Нехай α — початковий ординал кардиналу $\mathfrak{n}$. Впорядкуємо множину T так, щоб α був її порядковим типом: $T = \{t_\xi : \xi < \alpha\}$. Позначимо для кожного $\xi < \alpha$ $T_\xi = \{t_\eta : \eta < \xi\}$. Зафіксуємо довільну точку $y_0 \in Y$, $y_0 = (y_t^{(0)})_{t\in T}$, де $y_t^{(0)} \in Y_t$, і покладемо $\tilde{Y}_\xi = \tilde{S}\prod_{t\in T_\xi} Y_t$, $Y_\xi = \tilde{Y}_\xi \times \prod_{t\in T\setminus T_\xi} \{y_t^{(0)}\}$ для кожного $\xi < \alpha$, і $Y_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} Y_\xi$. Оскільки $Y_\xi \subseteq Y$ для кожного $\xi < \alpha$, то ми можемо розглянути функції $f_\xi = f|_{X\times Y_\xi} : X \times Y_\xi \to \mathbb{R}$, які є нарізно неперервними. Зрозуміло, що і функції $\tilde{f}_\xi : X \times \tilde{Y}_\xi \to \mathbb{R}$, які означаються за формулою $\tilde{f}_\xi(x, y|_{T_\xi}) = f_\xi(x, y)$, є нарізно неперервними, бо відображення $h_\xi : Y_\xi \to \tilde{Y}_\xi$, $h_\xi(y) = y|_{T_\xi}$ є гомеоморфізмами. Тепер за теоремою 1 для кожного $\xi < \alpha$ існує найменша множина S_ξ, на якій зосереджена по першій змінній функція $\tilde{f}_\xi$, а значить, і функція f_ξ. Зауважимо, що оскільки для довільних ξ_1, ξ_2, $\xi_1 < \xi_2 < \alpha$, справджується включення $Y_{\xi_1} \subseteq Y_{\xi_2}$, то з того, що S_{ξ_1} — найменша множина, випливає, що $S_{\xi_1} \subseteq S_{\xi_2}$. Крім того, оскільки α — початковий ординал потужності $\mathfrak{n}$, то для довільного $\xi < \alpha$ маємо $|T_\xi| < \mathfrak{n}$. Тому за індуктивним припущенням маємо $|S_\xi| \le \mathfrak{m}$. Покладемо $S_0 = \bigcup_{\xi<\alpha} S_\xi$. Застосувавши лему до сім'ї $(S_\xi)_{\xi<\alpha}$, маємо $|S_0| \le 2^{\mathfrak{m}}$. Розглянемо функцію $f_\alpha = f|_{X\times Y_\alpha} : X \times Y_\alpha \to \mathbb{R}$. Зрозуміло, що функція f_α зосереджена на множині S_0 по першій змінній, а оскільки простір Y_α щільний в Y, то за твердженням 2 і функція f зосереджена на множині S_0 по першій змінній. Значить, f залежить від $2^{\mathfrak{m}}$ змінних по першій змінній. Застосовуючи твердження 3 до функції $f^*(y, x) = f(x, y)$, маємо, що f залежить від $2^{\mathfrak{m}}$ змінних по другій змінній. Тепер ще раз застосовуючи твердження 3 до функції f, одержуємо, що f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних по першій змінній, що й треба було довести.

Наступна теорема є нескладним наслідком із попереднього результату.

Теорема 3. *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ і $(Y_t)_{t\in T}$ — дві сім'ї компактних просторів, а $X = \prod_{s\in S} X_s$, і $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ — їхні топологічні добутки, $d(X_s) \le \mathfrak{m}$ і $d(Y_t) \le \mathfrak{m}$ для довільних $s \in S$, $t \in T$ і деякого нескінченного кардиналу $\mathfrak{m}$, і $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних.*

Доведення. Застосуємо теорему 2 до функції f двічі і таким чином покажемо, що f залежить від $\mathfrak{m}$ змінних як по першій, так і по другій змінній.

Покажемо, що в теоремі 3, а значить, і в теоремі 2 оцінка кількості змінних, від яких залежить функція f, не може бути покращеною. А саме: наведемо такий приклад.

Нехай S — дискретний простір нескінченної ваги $\mathfrak{m}$, $X_s = Y = \alpha S$, де $s \in S$, і αS — компактифікація Александрова простору S, $X = \prod_{s\in S} X_s$, $\alpha S\setminus S = \{\infty\}$, s_0 — фіксований елемент із S. Очевидно, $d(X_s) = d(Y) = \mathfrak{m}$. Означимо функцію $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ таким чином: $f(x, y) = f((x_s)_{s\in S}, y) = 1$, якщо $y \ne \infty$ і $x_y = x_{s_0} = y$, $f(x, y) = 0$ в іншому випадку. Перевіримо, що f — нарізно неперервна функція. Зафіксуємо $y \in Y$. Якщо $y = \infty$, то $f_y(x) \equiv 0$, отже, f_y — неперервна функція. Якщо $y \ne \infty$, тобто $y \in S$, то f_y набуває рівно двох значень 0 і 1, причому як множина $f_y^{-1}(1) = \prod_{s\in S} U_s$, де $U_{s_0} = U_y = \{y\}$ і $U_s = X_s$ в решті випадків, так і її доповнення $f_y^{-1}(0)$ відкриті в X. Тепер зафіксуємо $x \in X$. Якщо $x_{s_0} \ne \infty$ і $x_{x_{s_0}} = x_{s_0}$, то $f^x(y) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $y = x_{s_0}$, і тому функція f^x є неперервною. Якщо ж $x_{s_0} = \infty$ або $x_{x_{s_0}} \ne x_{s_0}$, то $f^x(y) \equiv 0$, і, зрозуміло, є неперервною функцією.

Перевіримо, що S є найменшою множиною, на якій зосереджена функція f по першій змінній. Нехай s' — фіксований елемент із S. Покладемо $S' = S\setminus\{s'\}$, $x'(s) = s'$ для кожного $s \in S$, $x''(s) = s'$ при $s \ne s'$, і $x''(s') = \infty$. Зауважимо, що $x'|_{S'} = x''|_{S'}$, але $f(x', s') = 1$ і $f(x'', s') = 0$. А це означає, що точка s' належить довільній множині $\tilde{S} \subseteq S$, на якій зосереджена функція f по першій змінній. Оскільки s' — довільна точка із S, то множина S є найменшою, на якій зосереджена функція f по першій змінній. Тобто функція f залежить рівно від $\mathfrak{m}$ змінних.

6. Застосуємо доведені результати до повного опису множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних компактів.

Теорема 4. *Нехай $X = \prod_{s\in S} X_s$, $Y = \prod_{t\in T} Y_t$, де X_s і Y_t — метризовні компакти для довільних $s \in S$ і $t \in T$. Тоді множина $C \subseteq X \times Y$ є множиною точок розриву деякого нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$*

тоді і тільки тоді, коли існують такі не більш ніж зліченні множини S_0 *і* T_0 *в* S *і* T *відповідно і така* F_σ*-множина* C_0 *в* $X_0 \times Y_0$, *де* $X_0 = \prod_{s \in S_0} X_s$, $Y_0 = \prod_{t \in T_0} Y_t$, *яка міститься в добутку* $A \times B$ *множин* A *і* B *першої категорії в* X_0 *і* Y_0 *відповідно, що множину* C *можна зобразити у вигляді*

$$C = (P_{S_0} \times P_{T_0})^{-1}(C_0),$$

де $P_{S_0}: X \to X_0$, $P_{S_0}(x) = x|_{S_0}$, $P_{T_0}: Y \to Y_0$, $P_{T_0}(y) = y|_{T_0}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай C — множина точок розриву деякого нарізно неперервного відображення $f: X \times Y \to \mathbb{R}$. Оскільки метризовний компакт є сепарабельним простором, то за теоремою 3 існують не більш ніж зліченні множини $S_0 \subseteq S$ і $T_0 \subseteq T$, на яких функція f зосереджена по першій і по другій змінній відповідно. Зауважимо, що топологічні добутки $X_0 = \prod_{s \in S_0} X_s$ і $Y_0 = \prod_{t \in T_0} Y_t$ є метризовними компактами, а функція $f_0: X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$, означена співвідношенням $f_0(x|_{S_0}, y|_{T_0}) = f(x, y)$, також є нарізно неперервною. Тому за теоремою Гана [6, с. 391] (див. також [8 – 10] множина C_0 точок розриву функції f_0 є F_σ-множиною, що міститься в добутку $A \times B$ множин першої категорії A і B в X_0 і Y_0 відповідно. Тепер, як випливає з означення функції f_0, множина C точок розриву функції f зображається у вигляді $C = (P_{S_0} \times P_{T_0})^{-1}(C_0)$.

Достатність. Нехай множина C задовольняє умови теореми. Зауважимо, що оскільки простори X_0 і Y_0 метризовні, а значить, — сепарабельні компакти, то за [3], або [4], або [5] існує таке нарізно неперервне відображення $f_0: X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$, множина точок розриву якого дорівнює C_0. Означимо функцію $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ так: $f(x, y) = f_0(x|_{S_0}, y|_{T_0})$. Зрозуміло, що з нарізної неперервності функції f_0 випливає нарізна неперервність функції f, а з того, що C_0 — множина точок розриву функції f_0, випливає, що C — множина точок розриву функції f.

1. *Михайлюк В. В.* Про нарізно неперервні функції на добутках тихонівських кубів. – Чернівці, 1991. – 8 с. – Деп. в УкрНДІНТІ, № 1638-Ук91.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М: Мир, 1986. – 751 с.
3. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 1992. – **44,** № 9. – С. 1209 – 1220.
4. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції з сепарабельною множиною точок розриву. – Чернівці, 1990. – 11 с. – Деп. в УкрНДІНТІ, № 902-Ук90.
5. *Breckenridge I. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191 – 203.
6. *Hahn H.* Theorie der reelen Funktionen. 1. Band. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. – **VIII**. – 600 s.
7. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – М: Мир, 1970. – 416 с.
8. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, № 2. – P. 515–531.
9. *Calbrix J., Troalic J.-P.* Applications separement continues // C. R. Acad. Sc. Paris. – 1979. – **288**, Ser. A. – P. 647 – 648.
10. *Маслюченко В. К.* Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С. 143–152.

Одержано 12.04.93