УДК 517.95

А. Е. Шишков, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

For divergence elliptic equations with a natural energy space $W_p^m(\Omega)$, $m \ge 1$, $p > 2$, we prove that the Dirichlet problem is solvable in a wide class of regions with noncompact boundaries if the growth of the right-hand side of the equation is given by a Phragmen–Lindelöf type theorem. For the corresponding parabolic equation, we prove that the Cauchy problem is solvable for the limiting growth of the initial function $u_0(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n)$: $\int_{|x|<\tau} u_0^2\,dx \le c\tau^{n+2mp/(p-2)}$ $\forall\, \tau < \infty$.

Для дивергентних еліптичних рівнянь з природним енергетичним простором $W_p^m(\Omega)$, $m \ge 1$, $p > 2$, встановлено існування розв'язку задачі Діріхле в широкому класі областей з некомпактними границями при зростанні правої частини рівняння, що визначається відповідною теоремою типу теореми Фрагмена–Ліндельофа. Для відповідного параболічного рівняння доведена розв'язуваність задачі Коші при граничному зростанні початкової функції $u_0(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n)$: $\int_{|x|<\tau} u_0^2\,dx \le c\tau^{n+2mp/(p-2)}$ $\forall\, \tau < \infty$.

1. В неограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, с некомпактной границей $\partial\Omega$ рассматривается задача Дирихле

$$Au = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_x^\alpha a_\alpha\big(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u\big) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x) \equiv f(x), \quad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad (2)$$

где каратеодориевы функции $a_\alpha(x,\xi)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi)\,\xi_\alpha^{(m)} \ge d_0|\xi^{(m)}|^p, \;\; d_0>0, \;\; p>2, \;\; \xi = (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}), \quad (3)$$

$$|a_\alpha(x,\xi)| \le d_1|\xi^{(m)}|^{p-1}, \quad d_1 < \infty, \quad (4)$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \big(a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta)\big)\big(\xi_\alpha^{(m)} - \eta_\alpha^{(m)}\big) \ge d_2|\xi^{(m)} - \eta^{(m)}|^p, \;\; d_2 > 0, \quad (5)$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \big|a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta)\big| \le$$

$$\le d_3|\xi^{(m)} - \eta^{(m)}|^2\,(|\xi^{(m)}| + |\eta^{(m)}|)^{p-2}, \;\; d_3 < \infty, \quad (6)$$

а функции $f_\alpha(x) \in L_{p',\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$. Введем семейство ограниченных областей $\Omega(\tau) \subset \Omega$: $\Omega(\tau) = \Omega \bigcap \{x \colon |x| < \tau\}$, предположив, что $0 \in R^n \backslash \overline{\Omega}$. Обозначим τ_0: $0 < \tau_0 = \inf\{\tau \colon \Omega(\tau) \ne \varnothing\}$. Геометрию области Ω будем описывать функцией нелинейной основной частоты сечений $S(\tau) \equiv \partial\Omega(\tau) \backslash \partial\Omega$:

$$\lambda_p^p(\tau) = \inf \left(\int_{S(\tau)} |\nabla_x v|^p\,ds \right) \cdot \left(\int_{S(\tau)} |v|^p\,ds \right)^{-1},$$

где нижняя грань берется по всем гладким в окрестности $S(\tau)$ функциям $v(x)$, обращающимся в нуль на $\partial S(\tau)=\overline{S(\tau)}\cap\partial\Omega$. Свойства этой характеристики достаточно хорошо изучены (см., например, [1]). Будем для определенности предполагать, что область Ω относится к классу „узких" в окрестности бесконечности областей, т. е.

$$\lambda_p(\tau)\geq h_0\tau^{-1}\quad\forall\,\tau:\ 0<\tau_0<\tau<\infty,\quad h_0>0. \tag{7}$$

(При $n=2$ условие (7) выполнено, если в дополнении $R^n\backslash\Omega$ можно провести непрерывную кривую, уходящую на бесконечность и проходящую через некоторую точку $x_0\in\overline{\Omega}$ $|x_0|<\tau_0$.) Будем также предполагать выполненным следующее техническое условие: существует измеримая функция $\Lambda_p(\tau)$: $\lambda_p(\tau)\geq\Lambda_p(\tau)\geq h_0\tau^{-1}$ $\forall\,\tau>\tau_0$ такая, что с некоторыми постоянными h_1, h_2: $0<h_2\leq h_1<\infty$ выполняются соотношения

$$h_1\inf_{t>\tau>t-h_0/(2\Lambda_p(t))}\Lambda_p(\tau)\geq\Lambda_p(t)\geq h_2\sup_{t>\tau>t-h_0/(2\Lambda_p(t))}\Lambda_p(\tau)\quad\forall\,t>\tau_0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Существует постоянная k_1, зависящая лишь от известных параметров, такая, что если для правой части уравнения* (1) *выполнено при каком-либо сколь угодно малом $\delta>0$ ограничение на рост*:

$$F(\tau)\equiv\int\limits_{\Omega(\tau)}\sum_{|\alpha|\leq m}|f_\alpha(x)|^{p'}\Lambda_p(|x|)^{-p'(m-|\alpha|)}dx\leq$$

$$\leq c_1\exp\left((k_1-\delta)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\Lambda_p(s)\,ds\right)\equiv c_1F_\delta(\tau)\quad\forall\,\tau>\tau_0,\quad c_1<\infty, \tag{9}$$

то существует обобщенное решение $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ задачи (1), (2).

Предварительно рассмотрим последовательность задач Дирихле в ограниченных областях:

$$Au_i(x)=f(x),\quad x\in\Omega(i)=\Omega\cap\{|x|<i\}, \tag{10}$$

$$u|_{\partial\Omega(i)}=0, \tag{11}$$

где A и f из (1). Как известно, для любого $i\in N$ существует решение $u_i(x)\in\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega(i))$ задачи (10), (11).

Лемма 1. *Существуют постоянные $k_2<\infty$, $\theta=\theta(h_0,h_1)$: $0<\theta<1$ (зависящие также и от других известных параметров задачи* (1), (2), *но не зависящие от номера i) такие, что справедливо следующее априорное функциональное соотношение*

$$I_i\left(t-\frac{h_0}{2\Lambda_p(t)}\right)\equiv\int\limits_{\Omega(t-h_0/(2\Lambda_p(t)))}\left|\nabla_x^m u_i\right|^p dx\leq$$

$$\leq\theta I_i(t)+k_2F(\tau)\quad\forall\,t<i,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Доказательство этой леммы содержится в доказательстве теоремы 1 из [2].

Лемма 2. *Для каждого решения $u_i(x)$ справедлива следующая априорная оценка*:

$$I_i(i)\leq k_3F(i)\quad\forall\,i\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

где $k_3<\infty$ не зависит от i.

Доказательство стандартно и соответствует получению первой энергетической оценки для обобщенного решения задачи Дирихле в ограниченной области.

Лемма 3. *Пусть имеется последовательность неубывающих на интервале* $\Delta_i = (t_0, i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *функций* $I_i(t)$, *удовлетворяющих для любого* $t \in \Delta_i$ *соотношению* (12), *пусть выполнено также соотношение* (13). *Тогда существует постоянная* $k_1 > 0$, *зависящая лишь от* θ, h_0, h_1, h_2, *такая, что справедливо следующее свойство. Если для* $F(t)$ *имеет место оценка роста*:

$$F(t) \le \tilde{F}(t) \quad \forall\, t > t_0,$$

где непрерывная $\tilde{F}(t)$ *имеет свойство*

$$\tilde{F}(t_2) \le c\, \tilde{F}(t_1) \exp\left(\left(k_1 - \delta\right) \int_{t_1}^{t_2} \Lambda_p(s)\, ds \right) \quad \forall\, t_2 > t_1 > t_0, \quad \delta > 0, \tag{14}$$

то справедлива равномерная по $i \in \mathbb{N}$ *априорная оценка*:

$$I_i(t) \le k_4 \tilde{F}(t) \quad \forall\, t\colon\ t_0 < t < i, \quad k_4 < \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Если некоторая неотрицательная функция $J(t)$ удовлетворяет „однородному" аналогу соотношения (12)

$$J\left(t - \frac{h_0}{2\Lambda_p(t)} \right) \le \theta J(t) \quad \forall\, t > t_0, \quad 0 < \theta < 1, \tag{12*}$$

где измеримая функция $\Lambda_p(t)$ удовлетворяет условию (8), то, как несложно проверить, справедлива следующая явная оценка функции $J(t)$:

$$J(t_1) \le \theta^{-1} J(t_2) \exp\left(-\frac{h_2 \ln \theta^{-1}}{h_0} \int_{t_1}^{t_2} \Lambda_p(s)\, ds \right) \quad \forall\, t_2 > t_1 > t_0.$$

Положим теперь $k_1 = h_2 h_0^{-1} \ln \theta^{-1} > 0$ и продолжим доказательство леммы 3 от противного. Пусть существует последовательность $M_i \to \infty$ при $i \to \infty$ такая, что

$$I_i(t_i) = M_i \tilde{F}(t_i) \quad 0 < t_i < i. \tag{16}$$

Тогда для любого $l < \infty$ в силу оценки (13) и непрерывности $I_i(t)$ и $\tilde{F}(t)$ существует номер $i_0 = i_0(l) < \infty$ такой, что для всех $i > i_0$, существует $\tilde{t}_i$: $t_i < \tilde{t}_i < i$ такое, что

$$I_i(t) \ge l^{-1} M_i \tilde{F}(t_i) \quad \forall\, t\colon\ t_i < t < \tilde{t}_i\,; \quad I_i(\tilde{t}_i) = l^{-1} M_i \tilde{F}\left(\tilde{t}_i\right). \tag{17}$$

При этом из соотношения (12) следует

$$I_i\left(t - \frac{h_0}{2\Lambda_p(t)} \right) \le \left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i} \right) I_i(t) \quad \forall\, t\colon\ t_i < t < \tilde{t}_i < i.$$

Это однородное неравенство, как и выше, порождает явную оценку для $I_i(t)$:

$$I_i(t_i) \le \left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i} \right)^{-1} I_i(\tilde{t}_i) \exp\left(-h_0^{-1} h_2 \ln\left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i} \right)^{-1} \int_{t_i}^{\tilde{t}_i} \Lambda_p(s)\, ds \right). \tag{18}$$

Из соотношений (16) – (18) получаем

$$\tilde{F}(t_i) \le \tilde{F}(\tilde{t}_i)\, l^{-1} \left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i}\right)^{-1} \exp\left(-h_0^{-1} h_2 \ln\left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i}\right)^{-1} \int_{t_i}^{\tilde{t}_i} \Lambda_p(s)\,ds\right). \quad (19)$$

Зафиксируем теперь l так, чтобы $\theta l > L$, а после этого возьмем номер i столь большим, что

$$h_0^{-1} h_2 \ln\left(\theta + \frac{k_2 l}{M_i}\right)^{-1} \ge h_0^{-1} h_2 \ln\theta^{-1} - \delta \equiv k_2 - \delta.$$

Вытекающее после этого из неравенства (19) соотношение противоречит условию (14) на функцию $\tilde{F}(t)$. Следовательно, предположения (16), (17) не могут реализоваться и, следовательно, лемма 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Покажем, что из последовательности $u_i(x)$ решений задач (10), (11) можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в пространстве $W_p^m(\Omega')$ для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \subset \Omega$. В силу лемм 1 – 3 для произвольного $t < \infty$ справедлива следующая равномерная оценка:

$$\int_{\Omega(t)} \left|\nabla_x^m u_i\right|^p dx \le K_1 \tilde{F}(t), \quad K_1 < \infty, \quad i = i_0, i_0 + 1, \ldots, \quad (20)$$

где $\tilde{F}(t)$ — функция, строящаяся по функции $F(t)$ в лемме 3 $\Big($в качестве $\tilde{F}(t)$ может быть взята, в частности, $\tilde{F}_1(t) = c_1 \exp\left((k_1 - \delta)\int_{\tau_0}^{t} \Lambda_p(s)\,ds\right)\Big)$. Из определения функции $\Lambda_p(t)$ легко следует также оценка

$$\int_{\Omega(t)} |u_i|^p dx \le k_5 \left(\inf_{\tau_0 < s < t} \Lambda_p^p(s)\right)^{-m} \int_{\Omega(t)} \left|\nabla_x^m u_i\right|^p dx,$$

что вместе с (20) дает равномерную априорную оценку

$$\|u_i\|_{W_p^m(\Omega(t))} \le K_2 = K_2(t) < \infty \quad \forall\, t < \infty. \quad (21)$$

Если $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ то, применяя диагональный процесс, выделяем в силу (21) подпоследовательность $u_j(x)$, слабо сходящуюся в $W_p^m\big(\Omega(t_s)\big)$ к некоторой функции $u(x) \in W_{p,\,\mathrm{loc}}^m(\Omega)$ в каждой из ограниченных подобластей $\Omega(t_s)$. Ввиду компактности вложения $W_p^m\big(\Omega(t_s)\big) \subsetneq W_p^{m-1}\big(\Omega(t_s)\big)$ следует

$$\left\|u_j - u\right\|_{W_p^{m-1}(\Omega(t_s))} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty \quad \forall\, s \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Зафиксируем произвольное $t < \infty$ и пусть u_j, u_k — два произвольных решения задачи (10), (11) $(\min(j, k) > t + 1)$. Обозначим $v_{j,k} = u_j - u_k$ и введем C^m-гладкую срезающую функцию $\eta(\tau) \ge 0$: $\eta(\tau) = 1 \quad \forall\, \tau < t$, $\eta(\tau) = 0 \quad \forall\, \tau > t + 1$. Запишем теперь интегральные тождества, определяющие решения u_j и u_k, с пробной функцией $v_{j,k}\eta(|x|)$ и вычтем полученные равенства. При этом в силу условий (5), (6) получим

$$d_2 \int_{\Omega(t+1)} \left|\nabla_x^m v_{j,k}\right|^p \eta(|x|)\,dx \le d_3 \int_{K(t,1) = \Omega(t+1)\setminus\Omega(t)} \Big(\left|\nabla^m u_j\right| +$$

$$+ \left|\nabla^m u_k\right|)^{p-2}\left|\nabla^m v_{j,k}\right| \sum_{i=1}^{m}\left|\nabla^i \eta\right|\left|\nabla^{m-i} v_{j,k}\right| dx .$$

Отсюда в силу (21) следует

$$\int\limits_{\Omega(t)} \left|\nabla^m v_{j,k}\right|^p dx \le$$

$$\le K_3 \left(\int\limits_{K(t,1)} \left(\left|\nabla^m u_j\right| + \left|\nabla^m u_k\right|\right)^p dx \right)^{(p-1)/p} \cdot \left(\int\limits_{K(t,1)} \sum_{i=0}^{m-1} \left|\nabla^i v_{j,k}\right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le K_4(t) \left\| v_{j,k} \right\|_{W_p^{m-1}(K(t,1))}$$

$(K_4(t) < \infty$ не зависит от $j, k)$.

Из этого неравенства ввиду (22) следует, что

$$\left\| \nabla^m v_{j,k} \right\|_{L_p(\Omega(\tau))} \to 0 \quad \text{при} \quad j, k \to \infty \quad \forall\, t < \infty .$$

Отсюда стандартно вытекает фундаментальность последовательности $u_j(x)$ в пространстве $W_p^m(\Omega(t_s)) \quad \forall\, s \in \mathbb{N}$. Предельная функция, очевидно, и будет искомым решением задачи (1), (2).

***Замечание* 1.** Доказательство теоремы справедливо и при отсутствии условия (6) на функции $a_\alpha(x, \xi)$.

***Следствие* 1.** *В частном случае цилиндрической области* Ω *теорема* 1 *гарантирует разрешимость задачи* (1), (2) *при экспоненциальном росте на бесконечности функций* $f_\alpha(x)$ (*что при* $m = 1$ *соответствует* [3, 4]).

2. Метод, основанный на получении априорных оценок типа принципа Сен-Венана (лемма 3) и использованный в п. 4 для изучения разрешимости стационарной граничной задачи, имеет достаточно широкую область применимости. Продемонстрируем его возможности в случае нелинейной нестационарной задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A u = 0, \quad (x, t) \in R^n \times (0, T), \tag{23}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n), \tag{24}$$

где A — оператор из (1). Причем каратеодориевые функции a_α, образующие оператор A и удовлетворяющие условиям (3) – (6), зависят также и от t. В случае $u_0(x) \in L_2(R^n)$ разрешимость задачи (23), (24) следует из общей теории уравнений с монотонными операторами (см. [5, 6]). Для уравнения нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla_x u\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{25}$$

в случае $n = 1$ разрешимость задачи Коши при

$$|u_0(x)| \le c\,(1 + |x|)^{p/(p-2)} \quad \forall\, x \in R^n, \quad 0 < c < \infty \tag{26}$$

была установлена А. С. Калашниковым [7, 8]. В многомерной ситуации разрешимость задачи (25), (2) при выполнении условия (26) установлена в работе [9].

Там же показана предельность роста, определяемого условием (26), относительно разрешимости задачи.

Определение 1. *Функция* $u(x,t)$, $(x,t)\in R^n\times(0,T)$, *называется обобщенным решением задачи* (23), (24), *если для произвольной ограниченной области* $\Omega\subset R^n$ $u(x,t)\in W(\Omega)\equiv\{v(x,t)\colon v\in L_p(0,T;\,W_p^m(\Omega)),\ \partial v/\partial t\in \in L_{p'}(0,T;\,W_{p'}^{-m}(\Omega))\}$, $p'=p/(p-1)$, *выполняется условие* (24), *а также интегральное тождество*

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)}\left[u_t' w+\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\left(x,t,u,\ldots,\nabla_x^m u\right)D_x^\alpha w\right]dx\,dt = 0 \qquad (27)$$

для произвольной $w(x,t)\in L_p(0,T;\,\mathring{W}_p^m(\Omega))$.

Основным результатом п. 2 настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $u_0(x)\in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n)$ *удовлетворяет оценке*

$$h(\tau)\equiv\int\limits_{|x|<\tau}u_0^2\,dx\ \le\ c\,h_0(\tau)\equiv c\,\tau^{n+2mp/(p-2)}\quad \forall\,\tau<\infty,\quad c<\infty. \qquad (28)$$

Тогда существует $T=T(c)>0$ *такое, что задача* (23), (24) *имеет обобщенное решение в* $R^n\times(0,T)$.

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть неотрицательные неубывающие функции* $f(\tau)$, $g(\tau)$ *связаны между собой функциональным соотношением*

$$f(\tau-f(\tau))\ \le\ \nu f(\tau)+g(\tau)\quad\forall\,\tau\colon\ \tau_0<\tau<\infty,\quad 0<\nu<1. \qquad (29)$$

Пусть также существует $\tau_1\colon\tau_0<\tau_1<\infty$ *такое, что для любого* $\tau>\tau_1$ *кроме соотношения* (29) *выполняется также следующее*:

$$f(\tau)\ \le\ (\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau),\quad 0<\nu<\nu_1<1. \qquad (30)$$

Предположим, что функция $g(\tau)$ *удовлетворяет ограничениям на рост*

$$g(\tau)\ \le\ (1-\nu_1)(\nu_1-\nu)\,\tau\quad\forall\,\tau>\tau_0, \qquad (31)$$

$$g(\tau-(\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau))\ \ge\ \nu_1 g(\tau)\quad\forall\,\tau>\tau_0. \qquad (32)$$

Тогда оценка (30) *для функции* $f(\tau)$ *справедлива для любого* $\tau>\tau_0$.

Доказательство. В силу (30)

$$f(\tau_1)\ \le\ (\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_1). \qquad (33)$$

Обозначим $\tau_2=\tau_1-f(\tau_1)$. Вследствие (31) и (33) $\tau_2>\nu\tau_1$. В силу условия (32) и соотношения (29) имеем

$$f(\tau_2)=f(\tau_1-f(\tau_1))\ \le\ \nu f(\tau_1)+g(\tau_1)\ \le\ \nu_1(\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_1)\ \le$$
$$\le\ (\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_1-(\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_1))\ \le$$
$$\le\ (\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_1-f(\tau_1))=(\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_2).$$

Продолжая построение таким способом, получаем последовательность $\{\tau_j\}$: $\tau_{i+1}\equiv\tau_i-f(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots$, для которой $f(\tau_i)\le(\nu_1-\nu)^{-1}g(\tau_i)$.

Пусть теперь τ_{i+1}' — произвольная точка из интервала (τ_{i+1},τ_i). Так как отображение $F\colon\ \tau\to\tau-f(\tau)$ является непрерывным отображением интервала $[\tau_i,\tau_{i-1}]$ на некоторый интервал $\Delta_{i+1}\supset[\tau_{i+1},\tau_i]$, то у выбранной точки τ_{i+1}'

существует прообраз, т. е. $\tau'_{i+1} = \tau'_i - f(\tau'_i)$, где $\tau'_i \in (\tau_i, \tau_{i-1})$. Продолжая этот процесс, через i шагов находим точку $\tau'_1 > \tau_1$ такую, что в силу (30)

$$f(\tau'_1) \le (\nu_1 - \nu)^{-1} g(\tau'_1).$$

Двигаясь теперь назад из точки τ'_1, получаем, как и выше,

$$f(\tau'_{i+1}) \le (\nu_1 - \nu)^{-1} g(\tau'_{i+1}),$$

что в силу произвола в выборе точки τ'_{i+1} доказывает справедливость леммы 4.

Определим теперь последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \forall\, x\colon |x| < j; \\ 0 & \forall\, x\colon |x| \ge j,\ j = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

и рассмотрим последовательность задач (23), (24) с начальными функциями $u_0^{(j)}(x) \in L_2(R^n)$. Каждому $j \in \mathbb{N}$ соответствует обобщенное решение $u^{(j)}(x)$.

Лемма 5. *Для каждого решения* $u^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, *справедливо следующее априорное функциональное соотношение*:

$$I_T^{(j)}(\tau - \Delta) \equiv \int\limits_{G_T(\tau-\Delta) \equiv \{|x| < \tau - \Delta\} \times (0,T)} \left| u^{(j)}(x,t) \right|^p dx\, dt \le$$

$$\le A_1 T \tau^{-n(p-2)/2} \left(\frac{\Delta I_T^{(j)}(\tau)}{\Delta^{mp}} + h_j(\tau) \right)^{p/2} +$$

$$+ A_2 T^{1-\theta} \left(\frac{\Delta I_T^{(j)}(\tau)}{\Delta^{mp}} + h_j(\tau) \right)^{1 + (p-2)(1-\theta)/2} \quad \forall\, \Delta > 0,\ \forall\, \tau > 2\Delta,\ T > 0, \tag{34}$$

где постоянные $A_1, A_2 < \infty$ *не зависят от* j, τ; $\theta = \dfrac{n(p-2)}{2mp + n(p-2)}$,

$$h_j(\tau) \equiv \int\limits_{\Omega(\tau) = \{|x| < \tau\}} \left| u_0^{(j)}(x) \right|^2 dx; \quad \Delta I_T^{(j)}(\tau) \equiv I_T^{(j)}(\tau) - I_T^{(j)}(\tau - \Delta).$$

Доказательство в основном следует доказательству теоремы 1 из [10]. Поэтому приведем только идею доказательства. Введем срезающую C^m-гладкую функцию $\eta(s)$: $\eta(s) = 1$ при $s < \tau - \Delta$, $\eta(s) = 0$ при $s > \tau$,

$$(D^i \eta(s)) \le c_1 \Delta^{-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Обозначив $g_T(t) = \exp(-t T^{-1})$, подставим в интегральное тождество (27) пробную функцию $v(x, t) = u^{(j)} \eta(|x|) g_T(t)$. После несложных преобразований и оценок с использованием условий (3), (4), неравенств Гельдера и Юнга с „ε", интерполяционных неравенств, характеризующих вложение $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow W_p^i(\Omega)$, $i < m$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega(\tau-\Delta)} \left| u^{(j)}(x,T) \right|^2 dx + \int\limits_{G_T(\tau-\Delta)} \left(T^{-1} \left| u^{(j)} \right|^2 + d_0 \left| \nabla_x^m u^{(j)} \right|^p \right) dx\, dt \le$$

$$\le c_2 \left(\Delta^{-mp} \int\limits_{K(\tau,\Delta) \equiv G_T(\tau) \setminus G_T(\tau-\Delta)} \left| u^{(j)} \right|^p dx\, dt + h_j(\tau) \right). \tag{35}$$

В силу интерполяционного неравенства Ниренберга – Гальярдо [11, 12] будем иметь

$$\int\limits_{\Omega(s)} \left|u^{(j)}(x,t)\right|^p dx \le c_3 s^{-n(p-2)/2} \left(\int\limits_{\Omega(s)} \left|u^{(j)}(x,t)\right|^2 dx \right)^{p/2} +$$

$$+ c_4 \left(\int\limits_{\Omega(s)} \left|\nabla_x^m u^{(j)}\right|^p dx \right)^{\theta} \left(\int\limits_{\Omega(s)} \left|u^{(j)}(x,t)\right|^2 dx \right)^{(1-\theta)p/2}$$

$$\forall\, s > 0, \quad \theta = \frac{n(p-2)}{2mp + n(p-2)}.$$

Проинтегрировав это неравенство по t при $s = \tau - \Delta$, использовав при оценке правой части неравенство Гельдера и соотношение (35), получим

$$I_T^{(j)}(\tau - \Delta) \le c_5 \tau^{-n(p-2)/2} B_T^{(j)}\left(\tau - \Delta, \frac{p}{2}\right) +$$

$$+ c_6 \left(B_T^{(j)}\left(\tau - \Delta, \frac{p}{2}\right)\right)^{1-\theta} \left(\frac{\Delta I_T^{(j)}(\tau)}{\Delta^{mp}} + h_j(\tau) \right)^{\theta}, \tag{36}$$

где $B_T^{(j)}(\tau, h) = \int_0^T \left(\int_{\Omega(\tau)} \left|u^{(j)}\right|^2 dx \right)^h dt.$

Для оценки сверху $B_T^{(j)}(\tau - \Delta, p/2)$ подставим в интегральное тождество, определяющее решение $u^{(j)}(x,t)$, пробную функцию $v^{(j)}(x,t) = u^{(j)} \eta(|x|) \times$ $\times\, b_l^{(j)}(t)$, где

$$b_l^{(j)}(t) = \int\limits_0^T \left(\int\limits_{R^n} \left|u^{(j)}(x,s)\right|^2 \eta(|x|) dx \right)^l ds, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя по частям, легко устанавливаем

$$\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, l+1) \equiv b_{l+1}^{(j)}(T) = \tilde{B}_T^{(j)}(\tau, l) \int\limits_{\Omega(\tau)} \left|u^{(j)}(x,T)\right|^2 \eta(|x|) dx +$$

$$+ \int\limits_{G_T(\tau)} \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha\left(x, t, u^{(j)}, \ldots, \nabla_x^m u^{(j)}\right) D_x^\alpha v^{(j)} dx\, dt. \tag{37}$$

Применяя при оценке членов в правой части неравенства (37) оценку (35), имеем

$$\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, l+1) \le c_7 \tilde{B}_T^{(j)}(\tau, l) \left[\Delta^{-mp} \Delta I_T^{(j)}(\tau) + h_j(\tau)\right]. \tag{38}$$

Так как в силу неравенства Гельдера

$$\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, s) \le \left(\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, [s]+1)\right)^{\theta_1} \left(\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, [s])\right)^{1-\theta_1},$$

где $\theta_1 = s - [s]$, $[s]$ — целая часть числа s, то, итерируя неравенство (38) и оценивая $\tilde{B}_T^{(j)}(\tau, 1)$ с помощью неравенства (35), получаем

$$B_T^{(j)}\left(\tau - \Delta, \frac{p}{2}\right) \le \tilde{B}_T^{(j)}\left(\tau, \frac{p}{2}\right) \le c_8 T \left(\Delta^{-mp} \Delta I_T^{(j)}(\tau) + h_j(\tau)\right)^{p/2}.$$

Подставляя последнюю оценку в соотношение (36), получаем требуемое неравенство (34) с $A_1 = c_8 c_5$, $A = c_6 c_8^{1-\theta}$.

Лемма 6. *Пусть в обозначениях и предположениях леммы 5 для функции $I_T^{(j)}(\tau)$, удовлетворяющей соотношению (34) для любого $\tau > \tau_0$, существует некоторое τ_1: $\tau_0 < \tau_1 < \infty$ такое, что*

$$I_T^{(j)}(\tau) \le \left(\frac{B}{\nu_1 - \nu}\right)^{mp(1+s)/s} T^{1-\theta} h_j(\tau)^{1+s} \tag{39}$$

$$\forall\, \tau > \tau_1, \quad s = \frac{(p-2)(1-\theta)}{2},$$

где постоянные ν_1, ν: $1 > \nu_1 > \nu > \nu_0 \equiv \left(1 - A_2^{-1}(1+s)^{-1}\right)^{s/(mp(1+s))}$ удовлетворяют соотношению

$$(1-\nu_1)^{mp/s} \left[\frac{1}{(A_1 p/2)\left(1 - \nu^{(mp(1+s))/s}\right)} - \frac{2 + A_1 p}{2A_2(1+s)}\right]^{2/(\theta(p-2))} \equiv$$

$$\equiv \mu^{2/(\theta(p-2))}, \tag{40}$$

а $B < \infty$ — некоторая постоянная, зависящая лишь от известных параметров. Пусть также выполнены следующие ограничения на функцию $h_j(\tau)$:

$$h_j(\tau) \le \left(\frac{(1-\nu_1)(\nu_1 - \nu)}{B}\right)^{mp/s} T^{-(1-\theta)/s}\, \tau^{mp/s} \quad \forall\, \tau > \tau_0, \tag{41}$$

$$h_j\left(\tau - \frac{B}{\nu_1 - \nu} T^{1-\theta} h_j(\tau)^{s/(mp)}\right) \ge \nu_1^{mp/s} h_j(\tau) \quad \forall\, \tau > \tau_0. \tag{42}$$

Тогда оценка (39) для функции $I_T^{(j)}(\tau)$ верна при каждом $\tau > \tau_0$.

Доказательство. Из соотношения (34) после подстановки $\Delta = \Delta_0 \equiv \equiv T^{(1-\theta)/(mp(1+s))} \left(I_T^{(j)}(\tau)\right)^{s/(mp(1+p))}$ получаем

$$I_T^{(j)}(t - \Delta_0) \le \frac{A_1 p}{2} T \tau^{-n(p-2)/2} \left(\frac{I_T^{(j)}(\tau)}{\Delta_0^{mp^2/2}}\right)^{(p-2)/2} \Delta I_T^{(j)}(\tau) +$$

$$+ \frac{A_1 p}{2} T \tau^{-n(p-2)/2} h_j(\tau)^{p/2} + A_2(1+s) T^{(1-\theta)} \Delta_0^{-mp(1+s)} I_T^{(j)}(\tau)^s\, \Delta I_T^{(j)}(\tau) +$$

$$+ A_2(1+s) T^{(1-\theta)} h_j(\tau)^{1+s} \le \left(A_2(1+s) + A_1 \frac{p}{2} \psi(\tau)\right) \Delta I_T^{(j)}(\tau) +$$

$$+ \left[\frac{A_1 p}{2} T \tau^{-n(p-2)/2} h_j(\tau)^{p/2} + A_2(1+s)\right] T^{1-\theta} h_j(\tau)^{1+s} \equiv$$

$$\equiv \left(A_3 + A_4 \psi(\tau)\right) \Delta I_T^{(j)}(\tau) + H_j(\tau),$$

где $\psi(\tau) \equiv T^{\theta/(1+s)} \left[\tau^{-n} I_T^{(j)}(\tau)^{\theta/(1+s)}\right]^{(p-2)/2}$. Поскольку

$$I_T^{(j)}(t - \Delta_0) \le \left(1 - \frac{1}{1 + A_3 + A_4 \psi(\tau)}\right) I_T^{(j)}(\tau) + \frac{H_j(\tau)}{1 + A_3 + A_4 \psi(\tau)}, \tag{43}$$

то для функции $J_T^{(j)}(\tau) \equiv T^{(1-\theta)/(mp(1+s))} I_T^{(j)}(\tau)^{s/(mp(1+s))}$ справедливы соотношения

$$J_T^{(j)}\left(\tau - J_T^{(j)}(\tau)\right) \le \left(1 - \frac{1}{1 + A_3 + A_4\psi(\tau)}\right)^{s/(mp(1+s))} J_T^{(j)}(\tau) + $$
$$+ \frac{T^{(1-\theta)/(mp(1+s))} H_j^{s/(mp(1+s))}(\tau)}{\left[1 + A_3 + A_4\psi(\tau)\right]^{s/(mp(1+s))}}. \tag{44}$$

Определяя функцию $\omega(\tau)$ равенством

$$h_j(\tau) = T^{-(1-\theta)/s}\tau^{mp/s}\omega(\tau)^{mp/s},$$

после простых вычислений получаем

$$T^{(1-\theta)/(mp(1+s))} H_j^{s/(mp(1+s))}(\tau) = \tau\omega(\tau)\left[A_5\omega(\tau)^{\gamma} + A_6\right],$$

где $A_5 = A_4^{s/(mp(1+s))}$, $A_6 = A_3^{s/(mp(1+s))}$, $\gamma = \dfrac{\theta(p-2)}{2(1+s)}$. Следовательно, соотношение (44) имеет вид

$$J_T^{(j)}\left(\tau - J_T^{(j)}(\tau)\right) \le$$
$$\le \left(1 - \frac{1}{1 + A_3 + A_4\psi(\tau)}\right)^{s/(mp(1+s))} J_T^{(j)}(\tau) + F\,T^{(1-\theta)/(mp)} h_j^{s/(mp)}(\tau), \tag{45}$$

где $F = \left(1 + A_3 + A_4\psi(\tau)\right)^{-s/(mp(1+s))}\left[A_5\omega(\tau)^{\gamma} + A_6\right]$.

В силу (40) и (41)

$$\left(\frac{B}{\nu_1 - \nu}\right)^{mp(1+s)/s} T^{1-\theta} h_j(\tau)^{1+s} \le \mu^{2(1+s)/(\theta(p-2))} T^{-(1-\theta)/s}\tau^{mp(1+s)/s} =$$
$$= \mu^{2(1+s)/(\theta(p-2))} T^{-2/(p-2)}\tau^{n(1+s)/\theta} \quad \forall\, \tau > \tau_0. \tag{46}$$

Далее продолжаем доказательство методом от противного. Пусть существует τ': $\tau_0 < \tau' < \tau_1$ такое, что для любого $\tau > \tau'$ выполняется оценка (39) и существует такое $\varepsilon > 0$, что $\forall\, \tau < \tau'$: $\tau' - \tau_1 < \varepsilon$ выполняется противоположное к (39) строгое неравенство. В силу этого предположения и соотношения (46) справедлива оценка

$$I_T^{(j)}(\tau) \le \mu^{2(1+s)/(\theta(p-2))} T^{-(1-\theta)/s}\tau^{mp(1+s)/s} \quad \forall\, \tau \ge \tau'.$$

Последнее же неравенство, как показывают простые вычисления, эквивалентно следующему:

$$\left(1 - \frac{1}{1 + A_3 + A_4\psi(\tau)}\right)^{s/(mp(1+s))} \le \nu \quad \forall\, \tau > \tau',$$

следовательно, из неравенства (45) вытекает

$$J_T^{(j)}\left(\tau - J_T^{(j)}(\tau)\right) \le \nu J_T^{(j)}(\tau) + F\,T^{(1-\theta)/(mp)} h_j^{s/(mp)}(\tau) \quad \forall\, \tau > \tau'. \tag{47}$$

Из определения функции $\omega(\tau)$ и предположения (41) следует

$$F \le A_7 \equiv \left(1 + A_3\right)^{-s/(mp(1+s))}\left[A_5\left(\frac{(1-\nu_1)(\nu_1 - \nu)}{B}\right)^{\gamma} + A_6\right].$$

Поэтому, выбирая постоянную B столь большой, что

$$\left(1 + A_3\right)^{-s/(mp(1+s))}\left[A_5\left(\frac{(1-\nu_1)(\nu_1-\nu)}{B}\right)^{\gamma} + A_6\right] < B, \tag{48}$$

в силу неравенства (47) и непрерывности всех фигурирующих в нем функций получаем, что существует некоторое $\delta > 0$ такое, что выполняется соотношение

$$J_T^{(j)}\left(\tau - J_T^{(j)}(\tau)\right) \le \nu J_T^{(j)}(\tau) + B\,T^{(1-\theta)/(mp)} h_j(\tau)^{s/(mp)} \quad \forall\, \tau > \tau' - \delta. \tag{49}$$

В силу условий (39) и (41)

$$J_T^{(j)}(\tau) \le \left(\frac{B}{\nu_1-\nu}\right) T^{(1-\theta)/(mp)} h_j(\tau)^{s/(mp)} \quad \forall\, \tau > \tau_0,$$

$$\tilde{H}_j(\tau) \equiv B\,T^{(1-\theta)/(mp)} h_j(\tau)^{s/(mp)} \le (1-\nu_1)(\nu_1-\nu)\tau \quad \forall\, \tau > \tau_0.$$

Следовательно, в силу леммы 5 справедлива оценка (39) для каждого $\tau > \tau' - \delta$, что противоречит определению точки τ'. Тем самым обязательно $\tau' \le \tau_0$ и лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Решение изучаемой задачи (23), (24) получим как предел последовательности решений $u^{(j)}(x, t)$, рассматривавшихся в леммах 5 и 6. Проверим выполнение условий леммы 6. Так как в силу [13] для каждого $j \in \mathbb{N}$ решения $u^{(j)}(x, t)$ имеют компактные носители при любом $t > 0$, то в соотношении (34), доказанном в лемме 5, $\Delta I_T^{(j)}(\tau) = 0$ для достаточно больших τ. Тем самым следует справедливость предположения (39) при

$$\left(\frac{B}{\nu_1-\nu}\right)^{mp(1+s)/s} \ge A_2.$$

Фиксируя ν_1 достаточно близким к единице, можно обеспечить выполнение условия (40). После этого, выбирая $T = T(c, \nu_1)$ достаточно малым, легко обеспечить выполнение условий (41), (42), учитывая имеющееся условие (28) из теоремы 2. При этом оказываемся в области применимости леммы 6 и поэтому справедлива следующая равномерная априорная оценка:

$$I_T^{(j)}(\tau) \le \left(\frac{B}{\nu_1-\nu}\right)^{mp(1+s)/s} T^{1-\theta} h_j^{1+s}(\tau) \le$$

$$\le \left(\frac{B}{\nu_1-\nu}\right)^{mp(1+s)/s} T^{1-\theta} h^{1+s}(\tau) \quad \forall\, \tau > \tau_0. \tag{50}$$

Значит, в силу (35) для любой ограниченной области $G' = \Omega' \times (0, T)$ справедлива оценка

$$\left\|u^{(j)}\right\|_{L_p\left(0,T;W_p^m(\Omega')\right)} \le C' < \infty, \tag{51}$$

где постоянная $C' < \infty$ не зависит от номера j. Так как $u^{(j)}(x, t)$ является решением уравнения (23), а нелинейный оператор A — ограниченным оператором из $L_p(0, T; W_p^m(\Omega'))$ в $L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-m}(\Omega'))$ для любой ограниченной области Ω', то из (51) следует также оценка

$$\left\|\frac{\partial u^{(j)}}{\partial t}\right\|_{L_{p'}\left(0,T;W_{p'}^{-m}(\Omega')\right)} \le C'' < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{52}$$

где C'' также не зависит от номера j. Пространство $W(\Omega')$ (см. определение 1) в силу теоремы Ж.-Л. Лионса [5, с. 70] компактно вкладывается в пространство $L_p(0, T; W_p^{m-1}(\Omega'))$. Поэтому последовательность $u^{(j)}(x, t)$, которую в силу оценок (51), (52) можно считать слабо сходящейся в пространстве $W(\Omega')$ к некоторой функции $u(x, t)$, в пространстве $L_p(0, T; W_p^{m-1}(\Omega'))$ сходится к этой функции сильно. Следовательно,

$$\int_0^T \int_{\Omega(\tau)} \left| D_x^\alpha u^{(k)} - D_x^\alpha u^{(l)} \right|^p dx\,dt \to 0 \tag{53}$$

при $k, l \to \infty$ $\forall\, \alpha : |\alpha| \le m - 1$, $\forall\, \tau < \infty$. Далее, рассуждая, как в п. 1, обозначаем $v_{k,l} = u^{(k)} - u^{(l)}$ и записываем интегральное тождество (27) для решений $u^{(k)}$ и $u^{(l)}$ с пробной функцией $w_{k,l} = v_{k,l}\eta(|x|)g_T(t)$, затем вычитаем полученные равенства. После стандартных оценок с использованием условий (3) – (5) получаем

$$\int_{\Omega_T(\tau)} v_{k,l}^2 \eta\, dx + \int_{G_T(\tau)} \left(T^{-1} v_{k,l}^2 \eta + d_2 \left| \nabla_x^m v_{k,l} \right|^p \right) \eta\, dx\,dt \le$$

$$\le c_1 R_T(\tau, \Delta)^{(p-1)/p} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{\Delta^{(m-i)p}} \int_{K_T(\tau, \Delta)} \left| \nabla^i_x v_{k,l} \right|^p dx\,dt \right)^{1/p} \tag{54}$$

$$\forall\, \tau < \max(k, l).$$

Здесь $R_T(\tau, \Delta) = \int_{K_T(\tau, \Delta)} \left(\left| \nabla^m u^{(k)} \right| + \left| \nabla^m u^{(l)} \right| \right)^p dx\,dt < c_2$, а постоянные $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$ не зависят от k, l (в силу (51)). Поэтому, учитывая (53), имеем

$$\int_{G_T(\tau - \Delta)} \left| \nabla_x^m v_{k,l} \right|^p dx\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad k, l \to \infty,$$

откуда ввиду произвольности выбора $\tau < \infty$ следует

$$\left\| u^{(k)} - u^{(l)} \right\|_{L_p\left(0, T; W_p^m(\Omega')\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad k, l \to \infty \tag{55}$$

для любой ограниченной области $\Omega' \subset R^n$. Из (55) в силу упоминавшейся выше ограниченности (а следовательно, и непрерывности) оператора A и того факта, что функции $u^{(k)}$, $u^{(l)}$ являются решением уравнения (23) в области $\Omega' \times (0, T)$, следует

$$\left\| \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(l)}}{\partial t} \right\|_{L_{p'}\left(0, T; W_{p'}^{-m}(\Omega')\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad k, l \to \infty. \tag{56}$$

Таким образом, найдена последовательность обобщенных решений уравнения (23), фундаментальная в пространстве $W(\Omega')$ при любой ограниченной области Ω'. Тогда предел этой последовательности функций $u(x, t) \in W_{\mathrm{loc}}(R^n)$ является обобщенным решением уравнения (23) в $R^n \times (0, T)$. В силу непрерывности вложения $W(\Omega') \subsetneq C(0, T; L_2(\Omega'))$ $u(x, t)$ удовлетворяет также и начальному условию (24). Тем самым теорема 2 доказана.

Замечания. **2.** Более детальный анализ зависимости интервала разрешимости $(0, T)$ от начальной функции $u_0(x)$ позволяет установить разрешимость при $T = \infty$ в случае, когда

$$\int\limits_{|x|<\tau} u_0^2(x)dx \le \omega(\tau)\tau^{n+2mp/(p-2)} \quad \forall \tau < \infty; \ \omega(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty.$$

3. Единственность решения в классе функций естественного для соответствующей задачи роста на бесконечности удается получить при более жестких, чем в теоремах существования, условиях. Так, для задачи (23), (24) единственность в полученном в теореме 2 классе разрешимости будет иметь место при

$$h(\tau) \equiv \int\limits_{|x|<\tau} u_0^2(x)dx \le c\tau^{2/(p-2)}\tilde{h}(\tau) \quad c < \infty, \quad \forall \tau < \infty,$$

где $\tilde{h}(\tau)$ — произвольная функция Дини: $\int_{c'}^{\infty}\left(\tilde{h}(s)\right)^{-1}ds = \infty$.

1. *Миклюков В. М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением // Мат. сб. – 1980. – **111**, № 1. – С. 42 – 66.
2. *Шишков А. Е.* Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 6. – С. 134 – 146.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **96**. – С. 117 – 160.
4. *Калантаров В.* О нахождении решений первой краевой задачи для системы уравнений Кармана, имеющих неограниченный интеграл энергии // Там же. – С. 117 – 160.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
6. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – **9**. – С. 5 – 130.
7. *Калашников А. С.* О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 4. – С. 682 – 691.
8. *Калашников А. С.* Об условиях единственности обобщенного решения задачи Коши для одного класса квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Там же. – № 12. – С. 2207 – 2212.
9. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for degenerate parabolic equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**, № 1. – P. 187 – 224.
10. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 8. – С. 1200 – 1210.
11. *Gagliardo E.* Ulterori proprieta di ancune classi di funzioni in piu variable // Ric. mat. – 1959. – **8**. – P. 24 – 51.
12. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
13. *Bernis F.* Finite speed of propation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1986. – **104**. – P. 1 – 19.

Получено 26.04.93