УДК 539.3

В. Н. Ложкин, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОЗНАЧНОНАПРЯЖЕННЫХ КОНТУРОВ В ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ВЫРЕЗОМ

A definition of a univalently strained contour in a compressible isotropic plane with a curvilinear cut, which extrends the notion of a equiresistant contour, is given. Conditions for elliptic and square contours to be univalently strained are given and proved.

Наведено визначення однозначнонапруженого контура в стисливій ізотропній площині з криволінійним вирізом, яке розширює поняття рівноміцного контура. Сформульовані і доведені умови, за яких еліптичний і квадратний контури будуть однозначнонапруженими.

Неограниченная изотропная плоскость D_z^- с криволинейным вырезом, контур которого L_z свободен от внешних воздействий, сжимается усилиями q и λq, приложенными вдали от выреза под углом α. Напряженное состояние плоскости описывается функциями $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, удовлетворяющими граничному условию [1]

$$\varphi(\sigma)+\omega(\sigma)+\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\overline{\psi(\sigma)} = 0, \quad \sigma = e^{i\vartheta}. \tag{1}$$

Здесь

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{4}(1+\lambda)q\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad \varphi_0(\infty) = 0,$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\lambda)qe^{-2i\alpha}\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad \psi_0(\infty) = 0,$$

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{m=1}\varepsilon_m\zeta^{-m}\right),$$

где $\omega(\zeta)$ — функция, конформно отображающая внешность единичной окружности на внешность контура L_z, коэффициенты которой R и ε_m либо заданы, либо подлежат определению из дополнительного условия.

Определение 1. *Контур* L_z *в задаче* (1) *называется равнопрочным, если на нем выполняется условие*

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = p, \tag{2}$$

где p *— постоянная, подлежащая определению.*

Решение задачи (1), (2) имеет вид [2]

$$4p = -(1+\lambda)q,$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{4}(1+\lambda)q\omega(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\lambda)q\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\omega(\zeta) = Re^{i\alpha}(\zeta+\varepsilon\zeta^{-1}), \quad \varepsilon = (1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче равнопрочным контуром является эллипс с соотношением полуосей $c = a^{-1}b = \lambda$, повернутой на угол α.

Определение 2. *Контур* L_z *в задаче* (1) *называется однозначнонапряженным, если на нем выполняется условие*

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} < 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Эллиптический контур в задаче* (1), (3) *будет однозначнонапряженным, если выполняются неравенства*

$$\alpha = 0, \quad c = a^{-1}b, \quad (2+c)^{-1}c < \lambda < 1+2c,$$

$$\alpha \neq 0, \quad (\sin^2\alpha + 2c + c^2\cos^2\alpha)^{-1}(\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha) <$$

$$< \lambda < (\cos^2\alpha + 2c + c^2\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha)^{-1}.$$

Доказательство. Если L_z —эллиптический контур, то

$$\omega(\zeta) = R(\zeta + \varepsilon\zeta^{-1}), \quad \varepsilon = (1-c)(1+c)^{-1}.$$

В этом случае решение задачи (1) имеет вид

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{4}qR\{(1+\lambda)\zeta - [(1+\lambda)\varepsilon - 2(1-\lambda)e^{2i\alpha}]\zeta^{-1}\},$$

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta).$$

Тогда из условия (3)

$$4\operatorname{Re}\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = -q(1 - 2\varepsilon\cos 2\vartheta + \varepsilon^2)^{-1}\{(1-\varepsilon^2)(1+\lambda) -$$

$$-2(1-\lambda)[\cos 2(\vartheta - \alpha) - \varepsilon\cos 2\alpha]\} < 0$$

будем иметь

$$(1-\varepsilon^2)(1+\lambda) - 2(1-\lambda)[\cos 2(\vartheta-\alpha) - \varepsilon\cos 2\alpha] > 0,$$

$$0 \le \lambda \le 1, \quad 1 - 2\varepsilon\cos 2\alpha + \varepsilon^2 < (3 - 2\varepsilon\cos 2\alpha - \varepsilon^2)\lambda,$$

$$\lambda \ge 1, \quad (1 + 2\varepsilon\cos 2\alpha + \varepsilon^2)\lambda < 3 + 2\varepsilon\cos 2\alpha - \varepsilon^2.$$

Из двух последних соотношений получим неравенства теоремы.

В частности, при $\alpha = 0$, $\lambda = c$ равнопрочный контур будет равнонапряженным.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1) *функция* $\omega(\zeta)$ *имеет вид*

$$\omega(\zeta) = R(\zeta - \varepsilon\zeta^{-3}). \tag{4}$$

Тогда контур L_z *будет однозначнонапряженным, если выполняется неравенство*

$$(2\beta-1)(2\beta+1)^{-1} < \lambda < (2\beta-1)^{-1}(2\beta+1),$$

$$\beta^2 = (1+\varepsilon)^{-2}(1-3\varepsilon)^{-2}\cos^2 2\alpha + (1-\varepsilon)^{-2}(1+3\varepsilon)^{-2}\sin^2 2\alpha.$$

Доказательство. Решение задач (1) для функции (4) имеет вид

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{4}qR[(1+\lambda)\zeta + 2(1-\varepsilon^2)^{-1}(1+\lambda)(e^{2i\alpha} - \varepsilon e^{-2i\alpha})\zeta^{-1} +$$

$$+ (1+\lambda)\varepsilon\zeta^{-3}], \quad \psi(\zeta) = -\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta).$$

Тогда из условия (3)

$$4\,\mathrm{Re}\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = -(1-9\varepsilon^2)q(1+6\varepsilon\cos 4\vartheta+9\varepsilon^2)^{-1}\{1+\lambda-$$

$$-2(1-\varepsilon^2)^{-1}(1-9\varepsilon^2)^{-1}(1-\lambda)[(1-\varepsilon)(1+3\varepsilon)\cos 2\alpha\cos 2\vartheta+$$

$$+(1+\varepsilon)(1-3\varepsilon)\sin 2\alpha\sin 2\vartheta]\} < 0$$

аналогичным образом получим неравенства теоремы.

Функция (4) при $\varepsilon = 1/6,\ 1/9$ конформно отображает внешность единичной окружности на внешность квадратного контура с закругленными углами, приведенная кривизна в которых равна соответственно $10,\ 9/2$ [2]. Тогда неравенства последней теоремы принимают вид

$$\varepsilon = \frac{1}{6}, \quad (8\beta_1-35)(8\beta_1+35)^{-1} < \lambda < (8\beta_1-35)^{-1}(8\beta_1+35),$$

$$\beta_1^2 = 225\cos^2 2\alpha + 49\sin^2 2\alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad (27\beta_2-40)(27\beta_2+40)^{-1} < \lambda < (27\beta_2-40)^{-1}(27\beta_2+40),$$

$$\beta_2^2 = 25\cos^2 2\alpha + 4\sin^2 2\alpha.$$

Положив в последних соотношениях $\alpha = 0,\ \pi/4$, убедимся, что с уменьшением кривизны интервал значений параметра λ сужается.

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Выща шк., 1975. – 277 с.

Получено 22.04.93