УДК 517.92

В. Е. Пузырев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

The problem of using the direct Lyapunov method to get estimates for solutions of a system of ordinary differential system in general form is studied. Theorems on asymptotic stability and behavior of solutions are proved.

Розглядається питання про використання прямого методу Ляпунова для одержання оцінок розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь загального виду. Доведено теореми про асимптотичну стійкість та поведінку розв'язків.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, x), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}$ — непрерывная вектор-функция такая, что на множестве $I \times D$ ($I = [0, \infty)$, D — некоторая область пространства $\mathbb{R}^n$) задача Коши для системы (1) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных значений t_0, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$. Ниже такое решение будем обозначать через $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$, а максимальный правый интервал, в котором оно определено, — $J = [t_0, T)$, $T \le \infty$.

Вопрос о построении вспомогательной функции, позволяющей судить о поведении решений изучаемой системы, является центральным вопросом прямого метода Ляпунова. Однако, хотя и можно перечислить ряд фундаментальных результатов, касающихся асимптотической устойчивости невозмущенного решения системы (1) (см., например, [1]), подавляющее их большинство имеет достаточный характер, в связи с чем остаются неясными пределы применимости конкретной теоремы для изучаемой системы. (Для удобства изложения часть ссылок на известные теоремы дается по [1].)

Следует отметить, что если исследуемая система автономна, или $\boldsymbol{F}$ является периодической функцией времени, то задача в значительной степени упрощается, поскольку при этом асимптотическая устойчивость является равномерной, и, значит, существует функция, удовлетворяющая условиям второй теоремы Ляпунова об устойчивости (см. [1], теорема 1.6.2). Более того, для подобных систем достаточно хорошо разработаны различные способы построения таких функций. Если же функция $\boldsymbol{F}$ не является периодической по t, то задача существенно усложняется. При этом можно отметить, по крайней мере, две особенности, делающие практически неприемлемыми большинство классических теорем об асимптотической устойчивости. С одной стороны, это неограниченность по времени функции $\boldsymbol{F}$, с другой, — наличие в правой части „малозначительных", на первый взгляд, членов, отбрасывание которых приведет, тем не менее, к потере свойства устойчивости. Поясним изложенное на следующем примере.

***Пример* 1.**

$$\dot{x} = f_1(t)x + f_2(t)x^3 + f_3(t)x^5, \tag{2}$$

функции f_1, f_2, f_3 непрерывные, знакоопределенные на I и хотя бы две *из них* имеют противоположные знаки. Если коэффициенты f_j, $j = \overline{1,3}$, являются ограниченными и отделены от нуля константами, то, используя в качестве функции Ляпунова $V = x^2/2$, решаем задачу об устойчивости нулевого решения, поскольку функция $\dot{V}$ будет знакоопределенной. Однако построение вспомогательной функции сталкивается с определенными трудностями в случае, когда коэффициенты уравнения (2) не являются ограниченными или не отделены от нуля константами (например, $f_1 = 1/t$, $f_2 = -1$). (Если же попытаться „улучшить" производную за счет добавления в функцию V слагаемых более высокого порядка малости относительно x, то „испортятся" свойства самой вспомогательной функции.) Теперь $\dot{V}(t, x)$ не будет знакоопределенной в строгом смысле, а является знакопеременной функцией (хотя на любом конечном промежутке времени она знакопостоянна), и большинство упомянутых выше теорем об устойчивости не могут быть применены. Возникает вопрос: насколько серьезны возникающие трудности и могут ли они быть преодолены в рамках прямого метода Ляпунова?

Ситуация с „неклассической функцией Ляпунова" возникала при исследовании критического случая пар чисто мнимых корней [2, 3], а также в работах [4–6]. В настоящей работе подобный подход используется как для решения задачи устойчивости, так и для получения оценок для возмущенных решений. Оставаясь в рамках прямого метода Ляпунова, автор счел полезным несколько расширить традиционные предположения относительно свойств вспомогательной функции.

Рассмотрим для любого $t \in I$ области $D_1(t)$, $D_2(t)$, границы которых $\partial D_1(t)$, $\partial D_2(t)$ являются непрерывными функциями времени, и $\overline{D}_1(t) \subset \subset D_2(t)$. Тогда справедлива следующая лемма.

Основная лемма. *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция* $U(t, \boldsymbol{x})$: $I \times D_2 \to R$ *и непрерывная функция* $U_0(t, \boldsymbol{x}) \leq \leq U(t, \boldsymbol{x})$ *такие, что*:

1) *функция* $U(t, \boldsymbol{x})$ *ограничена при* $\boldsymbol{x} \in \partial D_1(t)$ *для любого* $t \in J$;

2) *для любых* $(t, \boldsymbol{x}) \in J \times D_2(t) \backslash D_1(t)$ *полная производная функции* $U(t, \boldsymbol{x})$ *по времени в силу системы* (1) *неположительна*;

3) *для любых* $t_1, t_2 \in J$, $t_2 > t_1$,

$$\sup_{x \in \partial D_1(t_1)} U(t_1, \boldsymbol{x}) < \sup_{x \in \partial D_2(t_2)} U_0(t_2, \boldsymbol{x}).$$

Тогда для любых $t_0 \in J$ из $\boldsymbol{x}_0 \in D_1(t_0)$ *следует* $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D_2(t)$.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{x}_0 \in D_1(t_0)$, и покажем, что траектория $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ не покидает области $D_2(t)$. Допустим противное, т. е. существует такой момент времени $t_* > t_0$, что $x(t_*) \in \partial D_2(t_*)$. Но тогда в силу непрерывности решения функций $\partial D_1(t)$, $\partial D_2(t)$ и того факта, что $\partial D_1(t) \subset \subset D_2(t)$, существует интервал времени (t', t'') (t'', вообще говоря, может не совпадать с t_*) такой, что $\boldsymbol{x}(t') \in \partial D_1(t')$, $\boldsymbol{x}_2(t'') \in \partial D_2(t'')$ и $\boldsymbol{x}(t) \in \in D_2(t) \backslash \overline{D}_1(t)$ для любого $t \in (t', t'')$. Следовательно, на этом интервале выполняется условие 2 леммы. С другой стороны, на основании условий 1 и 3 имеем

$$U(t', \boldsymbol{x}(t')) \leq \sup_{x \in \partial D_1(t')} U(t', \boldsymbol{x}) < \inf_{x \in \partial D_2(t'')} U_0(t'', \boldsymbol{x}) \leq U_0(t'', \boldsymbol{x}(t'')),$$

что противоречит невозрастанию функции $U(t)$ на (t', t''). Полученное противоречие и доказывает лемму.

Рассмотрим несколько примеров использования леммы. Для удобства изложения считаем в дальнейшем $\boldsymbol{F}(t, 0) = 0$ для любого $t \in I$, под вспомогательной функцией будем понимать такую функцию $V(t, \boldsymbol{x})$: $I \times D \to R$, $V \in C^1$, что $V(t, 0) = 0$, а ее производной по времени будем называть

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, \boldsymbol{F}).$$

Теорема 1. *Предположим, что функции* $a(t)$, $c(t)$, $f(t)$, $\varphi(t)$, $h(t) \in C^0$, *причем* $a(t)$ *монотонно возрастает, а* f, φ, c *положительны* ($a(0) = c(0) = 0$), *и существует вспомогательная функция* V *такая, что в некоторой окрестности начала координат выполняются условия*:

1) $V(t, \boldsymbol{x}) \geq f(t) a(\|\boldsymbol{x}\| / \varphi(t))$;

2) $\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -h(t) c(V(t, \boldsymbol{x}))$.

А. *Тогда для любого решения системы* (1) *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\| \leq \varphi(t)\, a^{-1}\left(d^{-1} \frac{d(V_0) - \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau}{f(t)} \right); \tag{3}$$

где $d(y) = \int dy / c(y)$.

Б. *Если, кроме того,* $\lim\limits_{t \to \infty} \int h(t) dt = +\infty$, *а функции* $\varphi(t)$, $1 / f(t)$ *ограничены, то нулевое решение системы* (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку $V(t, 0) = 0$, то для любых $t \in I$ и $\varepsilon(t) > 0$ найдется такое $\delta(t) > 0$, что $V(t, \boldsymbol{x}) < \varepsilon(t)$ для любых x из δ-окрестности начала координат. Пусть $\varepsilon(t) = d^{-1}\left(-\int h(t) dt\right)$. Воспользуемся леммой и положим

$$U(t, \boldsymbol{x}) = \exp\left(\int h(t) dt + d(V)\right),$$

$$U_0(t, \boldsymbol{x}) = \exp\left(\int h(t) dt + d\left(f(t) a(\|\boldsymbol{x}\| / \varphi(t))\right)\right).$$

В качестве областей $D_1(t)$, $D_2(t)$ возьмем окрестности начала координат с радиусами соответственно $\delta(t)$ и $\varphi(t) a^{-1}(\varepsilon(t) / f(t))$. Нетрудно видеть, что условия 1–3 леммы при этом выполнены, значит, из $\|\boldsymbol{x}_0\| \leq \delta(t_0)$ следует $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \varphi(t) a^{-1}\left(d^{-1}\left(-\int h(t) dt\right) / f(t)\right)$.

Предположим теперь, что $\lim\limits_{t \to \infty} \int h(t) dt = +\infty$. Учитывая, что $\lim\limits_{V \to 0} d(V) = -\infty$, заключаем, что $d^{-1}\left(-\int h(t) dt\right) \to 0$ при $t \to \infty$, и если функции $\varphi(t)$, $1 / f(t)$ ограничены, то правая часть неравенства (3) стремится к нулю. Более того, если $\eta > 0$ настолько мало, что $\underset{\|\boldsymbol{x}\| < \eta}{d(V(t, \boldsymbol{x}))} < 0$, то для любых $t \in I$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что

$$d^{-1}\left(d(V_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0 + \sigma} h(\tau) d\tau \right) < d^{-1}\left(- \int\limits_{t_0}^{t_0 + \sigma} h(\tau) d\tau \right) < \varepsilon.$$

Таким образом, если выполнены условия п. Б, то начало координат $\mathbb{R}^n$ является эквипритягивающим, что, как известно (см. [1], теорема 1.2), влечет за собой для системы (1) эквиасимптотическую устойчивость решения $\boldsymbol{x} = 0$. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** В случае, когда функции f, φ, h тождественно равны единице, а функция $c(\tau)$ монотонна, утверждение Б теоремы 1 представляет собой известную теорему J. L. Massera (см. [1], теорема I.6.26).

Теорема 2. *Если в теореме* 1 *условие* 1 *заменить на*

$$V(t, x) \geq f(t)\, a\left(\frac{|x_1|}{\varphi_1(t)} + \ldots + \frac{|x_n|}{\varphi_n(t)}\right), \quad \varphi_j(t) > 0, \quad j = \overline{1, n},$$

то оценка (3) *примет вид*

$$|x_j(t, t_0, x_0)| \leq \varphi_j(t)\, a^{-1}\left(d^{-1}\frac{d(V_0) - \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau}{f(t)}\right).$$

Если же функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$, $0 \leq k \leq n$, *ограничены, то выполнение п.* Б *обеспечивает асимптотическую устойчивость относительно переменных* $x_1, \ldots, x_k$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пример 2 (теорема 1 работы [6]). Условия леммы выполнены для

$$U(t, \boldsymbol{x}) = \varphi^2(t) V(t, \boldsymbol{x}),$$

$$U_0(t, \boldsymbol{x}) = \varphi^2(t)\left[\omega_1 r^2 - \sum_{j=1}^{l_1}\alpha_j \varphi^j(t) r^{j+2}\right], \quad r = \|\boldsymbol{x}\|,$$

при этом $D_1(t)$, $D_2(t)$ — окрестности начала координат с радиусами $p_1/\varphi(t)$, $p_2/\varphi(t)$. Отметим, что с учетом леммы условие (6) работы [6] можно заменить более общим

$$g(t)\,\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -G_1 r^k + \sum_{j=1}^{l_2+1}\beta_j \varphi^{j-k}(t) r^j. \tag{4}$$

Возвращаясь к примеру 1, видим, что при $f_1 = 1/t$, $f_2 = -1$ условие (6) не выполняется, в то время как неравенство (4) имеет место при $\varphi = \sqrt{t}$, $|h| < \alpha t$ ($\boldsymbol{x} = 0$ асимптотически устойчиво и порядок стремления возмущенных решений к нулю равен $t^{-1/2}$). С другой стороны, если $f_1 = -1/t$, $f_2 = 1$, $|h| < \alpha t^3$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво и $\|x(t)\| \leq t^{-1}$. Напомним [7], что если $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ допускает предел $\boldsymbol{F}_0(x)$ при $t \to \infty$ (равномерно по $\boldsymbol{x}$), и начало координат асимптотически устойчиво для предельной системы, то устойчивость сохраняется при добавлении в правую часть произвольной функции $F_1(t, x)$ с нулевым пределом. Для уравнения (2) тривиальное решение предельной системы $\left(\text{если } \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \text{const}\right)$ неустойчиво, таким образом, именно исчезающий член разложения правой части обеспечивает асимптотическую устойчивость (неравномерную по t_0).

Пример 3 (первая теорема Ляпунова об устойчивости (см. [1], теорема I.4.2). Пусть $\varepsilon > 0$ как угодно мало. Поскольку $V(t, 0) = 0$, то для любого $t > t_0$ можно указать $\delta(t, \varepsilon)$ такое, что $\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\| \leq \delta(t)} V(t, \boldsymbol{x}) < a(\varepsilon)$. Условия леммы выполнены ($D_1(t)$, $D_2(t)$ — окрестности начала координат с радиусами $\delta(t)$, ε), значит, неравенство $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ влечет за собой $\|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$, что по определению означает устойчивость тривиального решения системы (1).

Пример 4 (теорема К. П. Персидского о равномерной устойчивости (см. [1], теорема I.4.3)). Пусть $\varepsilon > 0$ как угодно мало. Выбирая в качестве $D_1(t)$, $D_2(t)$ окрестности начала координат с радиусами $\delta < b^{-1}(a(\varepsilon))$, ε, легко видеть, что все условия леммы выполняются, а поскольку δ не зависит от t_0, то $\boldsymbol{x} = 0$ равномерно устойчиво.

Пример 5 (вторая теорема Ляпунова об устойчивости). Пусть условия теоремы 1.6.2 из [1] выполнены в некоторой α-окрестности начала координат. Поскольку $V(t,x)\le b(\|x\|)$, то $\dot V(t,x)\le -c\left(b^{-1}(V(t,x))\right)$, и требования утверждения Б теоремы 1 также выполнены. Более того, справедлива оценка

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le a^{-1}\left(d^{-1}(d(V_0)-t+t_0)\right) \le a^{-1}\left(d^{-1}(d(b(\alpha))-t+t_0)\right),$$

и, значит, начало является равномерно притягивающим, а нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчивым.

Аналогичным образом нетрудно показать, что утверждения теорем об устойчивости по части переменных В. В. Румянцева [1] (теоремы I.4.5, I.6.34), N. Rouche и K. Peiffer [1] (теорема I.6.34), A. Halanay [1] (теорема I.6.35) могут быть получены как следствия теоремы 2.

Используем предложенный выше подход для оценки решений на основании анализа уравнений первого приближения. Предположим, что

$$F(t,x) = A(t)x + X(t,x), \quad \lim_{\|x\|\to 0}\frac{X}{\|x\|} = 0.$$

Рассмотрим вначале случай $X(t,x)=0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы некоторая положительная функция* $\varphi(t)\in C^1$ *была мажорирующей для* $\|x(t)\|$, *где* $x(t)$ *— решение линейной системы* $\dot x = A(t)x$, *необходимым и достаточным является существование положительно-определенной квадратичной формы* $V(t,x)$, *производная которой удовлетворяет неравенству*

$$\dot V(t,x) \le \frac{2\dot\varphi(t)}{\varphi(t)}V(t,x).$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что $\|x(t)\|\le\varphi(t)$, а $R(t)$ — матрица фундаментальной системы решений (1). Сделаем замену $x = \varphi(t)y$ и рассмотрим систему $\dot y = \left(A - \frac{\dot\varphi}{\varphi}E\right)y$ (E — единичная матрица). Очевидно, что $R(t)/\varphi(t)$ — матрица ее фундаментальной системы решений, причем ограниченная. Но тогда в соответствии с теоремой К. П. Персидского [8] существует определенно-положительная квадратичная форма $U(t,y)$, производная которой неположительна*. Выбирая $V(t,x)=\varphi^2(t)U(t,y)$, видим, что последняя положительно-определенна, и

$$\dot V(t,x) = 2\dot\varphi\,\varphi\,U(t,y)+\varphi^2\dot U(t,y) \le 2\dot\varphi\,\varphi\,U(t,y) = \frac{2\dot\varphi}{\varphi}V(t,x).$$

Достаточность. Легко видеть, что требования утверждения А теоремы 1 выполнены при $f(t)=1$, $a(\tau)=\alpha\tau^2$, $c(\tau)=\tau$, $h(t)=-2\dot\varphi(t)/\varphi(t)$, а поскольку $d(\tau)=\ln\tau$, то получаем

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le \frac{\sqrt{V_0}}{\alpha}\frac{\varphi(t)}{\varphi_0}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда для линеаризованной системы удалось построить вспомогательную функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 3, дать оценку поведения возмущенных решений полной нелинейной системы позволяет следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что существует положительно-определенная*

* Как известно [9], ограниченность решений линейной системы равносильна устойчивости тривиального решения.

квадратичная форма $V(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{s,j=1}^{n} b_{sj}(t) x_s x_j$, *производная которой в силу линейной системы* $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ *удовлетворяет неравенству* $\dot{V}_{\text{lin}} \le -h(t)V$. *Пусть, далее,* $\varphi(t) \in C^1$ — *некоторая положительная функция такая, что* $\dot{\varphi}/\varphi < h/2$ *для любого* $t \in J$, *а* $b(\tau)$ *монотонно возрастает и* $\lim_{\tau \to 0} b(\tau)/\tau = 0$. *Тогда если нелинейные члены разложения правых частей удовлетворяют условиям*

$$|X_s(t, \boldsymbol{x})| \le \left\{ \frac{B[h(t)\varphi(t) + 2\dot{\varphi}(t)]}{\sum_{j=1}^{n} |b_{sj}(t)|} \right\} \cdot b(\|\boldsymbol{x}\|/\varphi(t)), \quad B = \text{const}, \tag{5}$$

то справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\| \le c\varphi(t), \tag{6}$$

где постоянная c *зависит от начальных значений.*

Доказательство. Возьмем вспомогательную функцию $U(t, \boldsymbol{x}) = V/\varphi^2$ и найдем ее производную по времени в силу (1). Получим

$$\dot{U}(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{2\dot{\varphi}}{\varphi^3} V(t, \boldsymbol{x}) + \frac{1}{\varphi^2} \left[\dot{V}_{\text{lin}}(t, \boldsymbol{x}) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(t, \boldsymbol{x}) \right] \le$$

$$\le -\varphi^{-2} \left[\left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) V(t, \boldsymbol{x}) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(t, \boldsymbol{x}) \right].$$

Сделаем замену переменных $\boldsymbol{x} = \varphi(t)\boldsymbol{y}$ и покажем, что решение $\boldsymbol{y} = 0$ является устойчивым по Ляпунову. Учитывая, что $V(t, \boldsymbol{y}) = U(t, \boldsymbol{x})$ и справедлива оценка

$$\frac{\partial V(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_s} X_s(t, \boldsymbol{x}) = \varphi(t) \sum_{j=1}^{n} b_{sj}(t) y_j X_s \le \varphi(t) \|\boldsymbol{y}\| \sum_{j=1}^{n} |b_{sj}(t)| |X_s| \le$$

$$\le B\varphi^2(t) \|\boldsymbol{y}\| \left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) \cdot b(\|\boldsymbol{x}\|/\varphi(t)) = B\varphi^2 \left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) \cdot b(\|\boldsymbol{y}\|),$$

получаем

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{y}) = \dot{U}(t, \boldsymbol{x}) \le -\varphi^2 \left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) [V(t, \boldsymbol{x}) - nB\varphi^2 \|\boldsymbol{y}\| b(\|\boldsymbol{y}\|)] =$$

$$= -\left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) [V(t, \boldsymbol{y}) - nB\|\boldsymbol{y}\| b(\|\boldsymbol{y}\|)] \le$$

$$\le -\left(h + \frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} \right) [\alpha \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 - nB\|\boldsymbol{y}\| b(\|\boldsymbol{y}\|)].$$

Последнее выражение отрицательно, если $\|\boldsymbol{y}\|$ достаточно мала, значит, функция $V(t, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет вместе со своей производной условиям первой теоремы Ляпунова об устойчивости, и выполняется оценка (6).

***Замечания.* 2.** В качестве функции $\varphi(t)$ можно взять $\exp\left(-\beta \int h(t)\,dt\right)$, $0 < \beta < 1/2$. Условие (5) при этом принимает вид

$$|X_s(t, x)| \le \left\{ \frac{Bh(t)\exp\left(-\beta \int h(t)\,dt\right)}{\sum_{j=1}^{n} |b_{sj}(t)|} \right\} \cdot b(\|x\|/\varphi(t)).$$

3. Если $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$, то теоремы 3 и 4 дают условия асимптотической устойчивости тривиального решения [6].

В качестве примера использования теоремы 4 рассмотрим уравнение колебаний математического маятника с трением, зависящим от времени (см. также [1], теоремы I.6.27, II.2.6 [10]),

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + \sin x = 0,$$

$f(t)$ — некоторая непрерывная положительная функция.

Возьмем в качестве вспомогательной функции квадратичную форму

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2\gamma\psi(t)x\dot{x} + \dot{x}^2\right),$$

где γ — некоторое положительное число, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема, положительна и убывает к нулю при $t \to \infty$, а $\dot{\psi}$ монотонно не убывает. Учитывая, что

$$\dot{V}_{\text{lin}} = -\gamma\psi x^2 + \gamma(\dot{\psi} - \gamma f)x\dot{x} + (f - \gamma\psi)\dot{x}^2,$$

и полагая $h(t) = 2\alpha\psi$ (α — некоторое положительное число, меньшее γ), нетрудно убедиться в том, что решение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ линеаризованной системы асимптотически устойчиво, если функция f удовлетворяет ограничениям

$$(\alpha + \gamma)\psi(t) \le f(t) \le \frac{4(\gamma - \alpha)}{\gamma^2\psi(t)} \tag{7}$$

и

$$\lim_{t \to \infty} \int \psi(t)\,dt = \infty.$$

Условие (5) дает следующее ограничение на функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t)\exp\left(4\alpha\gamma\int\psi(t)\,dt\right) > \text{const} > 0.$$

Если задаться целью получить наиболее слабые ограничения на функцию f, обеспечивающие асимптотическую устойчивость тривиального решения, то можно взять $\psi(t) = 1/t$. Ограничения (7) при этом являются более слабыми по сравнению с ограничениями работы [1], кроме того, в качестве верхней границы скорости стремления возмущенных решений к нулю получается величина $t^{-1+\varepsilon}$ (ε как угодно мало). Если же ограничения, налагаемые на функцию f a priori, позволяют в условии (7) выбрать ψ так, что $\lim_{t \to \infty} t\psi(t) = \infty$, то функция $\varphi(t)$ имеет более высокий порядок малости, чем t^{-1}. Например, при $A \le$ $\le f(t) \le B$ можно взять $\psi(t) = 1$, тогда теорема 4 свидетельствует об экспоненциальной устойчивости изучаемого решения.

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
2. *Пузырев В. Е., Савченко А. Я.* Достаточные условия устойчивости для неавтономных систем в критическом случае n пар чисто мнимых корней // Мат. физика. – 1983. – Вып. 34. – С. 31–36.
3. *Пузырев В. Е.* Устойчивость неавтономных систем в критическом случае чисто мнимых корней // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 35. – С. 63–68.
4. *Савченко А. Я.* Об асимптотической устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 4. – С. 801–803.
5. *Savchenko A. Ya.* On the stability on motions of dynamical systems with time-unbounded coefficients // Diff. equations: Qualitative theory. – Amsterdam: North-Holland, 1987. – P. 921–933.
6. *Puzyrev V. E.* On some special auxiliary functions in stability theory of motion // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. – Hungary: Szeged, 1988. – P. 531–544.
7. *Игнатьев А. О.* О влиянии исчезающих постоянно действующих возмущений на асимптотически устойчивые движения // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 92–95.
8. *Персидский К. П.* Избранные труды: В 2-х т. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т. 1. –272 с.
9. *Yoshizawa T.* Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. – New York etc.: Springer, 1975. – 233 p.
10. *Ballieu R. J., Peiffer K.* Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})|\dot{x}|^{\alpha}\dot{x} + g(x) = 0$ // J. Math. Anal. and Appl. – 1978. – **65**. – P. 321–332.

Получено 21.03.94