УДК 517.349

О. И. Кузнецова, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

The asymptotic behavior is obtained for the Lebesque function which is generated by rhombic partial Fourier sums.

Знайдено асимптотичну поведінку функції Лебега, породженої ромбічними частковими сумами Фур'є.

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой найден асимптотический рост констант Лебега ромбических частных сумм Фурье

$$S_{mn}^{\Delta}(f;x,y)=\sum_{|k|/m+|l|/n\le 1} c_{kl}(f)e^{i(kx+ly)}$$

непрерывных на торе $T^2=[-\pi,\pi)^2$ функций в случае, когда параметры m, n, $(m,n)\in N^2$, ромба изменяются так, чтобы $n/m\in N$. В данной статье получена асимптотика соответствующих функций Лебега.

Вычислим коэффициенты Фурье $c_{kl}(f)$ (интегралы) по простейшей квадратурной формуле на равномерной сетке $(x_\mu,y_\nu)=(\pi\mu/m,\pi\nu/n)$, $(\mu,\nu)\in\in N^2$, $-m\le\mu\le m-1$, $-n\le\nu\le n-1$,

$$c_{kl}^{(m,n)}(f)=\frac{1}{4mn}\sum_{\substack{-m\le\mu\le m-1,\\ -n\le\nu\le n-1,}} f\left(x_\mu,y_\nu\right)e^{-ikx_\mu-ily_\nu}$$

и положим

$$\Lambda_{mn}(f;x,y)=\sum_{|k|/m+|l|/n\le 1} c_{kl}^{(m,n)}(f)e^{ikx+ily}.$$

Функциями Лебега называют величины

$$L_{mn}(x,y)=\sup_{|f|\le 1}|\Lambda_{mn}(f;x,y)|=$$

$$=\frac{1}{4mn}\sum_{\substack{-m\le\mu\le m-1,\\ -n\le\nu\le n-1,}}\left|\sum_{|k|/m+|l|/n\le 1} e^{ik(x-x_\mu)+il(y-y_\nu)}\right|.$$

Теорема. *Равномерно относительно* $(m,n)\in N^2$ *таких, что* $n/m\in N$, *справедливо асимптотическое равенство*

$$L_{mn}(x,y)=\frac{2}{\pi^2}\left\{\left|\sin\frac{mx+ny}{2}\sin\frac{mx-ny}{2}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\cos\frac{mx+ny}{2}\cos\frac{mx-ny}{2}\right|\right\}(2\ln m\ln n-\ln^2 m)+O(\ln n). \tag{1}$$

При доказательстве этой теоремы используется предложенный Р. М. Тригубом [2] метод замены полинома кусочно-синусоидальной функцией с равноотстоящими узлами, а также некоторые соотношения из [1]. Отметим также, что при $m=n$ для „близкой" сетки $\left(\frac{2\pi\mu}{2m+1},\frac{2\pi\nu}{2n+1}\right)$ равенство (1) получено другим методом в [3].

Всюду в дальнейшем $A = O(B)$ означает $A \le CB$, C — абсолютная постоянная.

Рассмотрим следующие функции:

$$\Delta_m^{(1)}(x, y) = \frac{\sin\dfrac{m(x+y)}{2}\sin\dfrac{m(x-y)}{2}\sin y}{y\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}},$$

$$\Delta_m^{(2)}(x, y) = \frac{\sin\dfrac{m(x+y)}{2}\sin\dfrac{m(x-y)}{2}}{\sin\dfrac{x-y}{2}},$$

и докажем для них утверждения, аналогичные лемме из [2, с. 317] для ядра Дирихле. Введем обозначения:

$$I_{\mu\nu} = \{(x, y)\colon x_{\mu-1/2} \le x \le x_{\mu+1/2},\ x_{\nu-1/2} \le y \le x_{\nu+1/2},$$
$$0 \le \mu, \nu \le m-1\};$$

$$A = \{(\mu, \nu) \in N^2\colon 0 \le \mu, \nu \le m-1,\ |\mu-\nu| \ge 2\};$$

$$h(s) = \frac{m^2}{(s-1)^2(2m-s-1)^2}, \quad 2 \le s \le 2m-2;$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x, y) = \begin{cases} (-1)^{\mu}\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}\sin\dfrac{\pi(x-y)}{2}, & \text{если } |\mu-\nu| \text{ — четное;}\\ \cos\dfrac{\pi(x+y)}{2}\cos\dfrac{\pi(x-y)}{2}, & \text{если } |\mu-\nu| \text{ — нечетное,}\end{cases}$$

$$D_s(t) = \sin\frac{st}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2}.$$

Лемма 1. *Пусть* $(x, y) \in I_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu) \in A$, $|t| \le 1/2$, $|s| \le 1/2$. *Тогда выполняются соотношения*

$$\left|\Delta_m^{(1)}(x, y) - \frac{\Delta_m^{(1)}(x_\mu + tx_1, x_\nu + sx_1)}{\varphi_{\mu\nu}(t, s)}\sin\frac{m(x+y)}{2}\sin\frac{m(x-y)}{2}\right| =$$

$$= O\left\{\frac{|D_m(x+y)D_m(x-y)|}{m} + \frac{m^2}{(|\mu-\nu|-1)^2}h(\mu+\nu) + \right.$$

$$\left. + \frac{m|D_m(x+y)|}{(|\mu-\nu|-1)^2} + m|D_m(x-y)|\,h(\mu+\nu)\right\}, \tag{2}$$

$$\left|\Delta_m^{(2)}(x, y) - \frac{\Delta_m^{(2)}(x_\mu + tx_1, x_\nu + sx_1)}{\varphi_{\mu\nu}(t, s)}\sin\frac{m(x+y)}{2}\sin\frac{m(x-y)}{2}\right| =$$

$$= O\left(\frac{m}{(|\mu-\nu|^2-1)^2}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку

$$\Delta_m^{(1)}(x_\mu + tx_1, x_\nu + sx_1) =$$

$$= \frac{\varphi_{\mu\nu}(t,s)\sin\left(x_\nu + sx_1\right)}{\left(x_\nu + sx_1\right)\sin\dfrac{x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1}{2}\sin\dfrac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}}\,,$$

левая часть (2) не превышает

$$|D_m(x+y)\,D_m(x-y)|\left|\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin\left(x_\nu + sx_1\right)}{x_\nu + sx_1}\right| +$$

$$+\ |D_m(x+y)|\left|\sin^{-1}\frac{x-y}{2} - \sin^{-1}\frac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}\right| +$$

$$+\left|\frac{\sin\dfrac{m(x-y)}{2}}{\sin\dfrac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}}\left(\sin^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1}{2}\right)\right)\right| :=$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3.$$

Нетрудно показать, что

$$J_1 \le \frac{2\pi}{m}\,|D_m(x+y)\,D_m(x-y)|.$$

При $(x,y) \in I_{\mu\nu}$

$$\left|\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}\right| \ge$$

$$\ge \pi^{-2}\,|x-y|\,|x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1| \ge m^{-2}\,(|m-\nu| - 1)^2,$$

поэтому

$$J_2 \le \frac{\pi m|D_m(x+y)|}{(|\mu-\nu|-1)^2}\,.$$

Оценим J_3. Очевидно, что $J_3 \le J_{31} + J_{32}$, где

$$J_{31} = |D_m(x-y)|\left|\sin^{-1}\frac{x+y}{2} - \sin^{-1}\frac{x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1}{2}\right|,$$

$$J_{32} = \left|\sin^{-1}\frac{x+y}{2} - \sin^{-1}\frac{x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1}{2}\right| \times$$

$$\times\left|\sin^{-1}\frac{x-y}{2} - \sin^{-1}\frac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}\right|.$$

Так как при $0 \le y \le \pi$ имеем $\sin y \ge 2\pi^{-1}\min\{y, \pi - y\} \ge 2\pi^{-2}y(\pi - y)$ и при $(x,y) \in I_{\mu\nu}$ — $\pi m^{-1}(\mu+\nu-1) \le x+y,\ x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1 \le \pi m^{-1}(\mu+\nu+1)$, учитывая определение $h(s)$, получаем

$$\left|\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x_\mu + x_\nu + (t+s)x_1}{2}\right| \ge \frac{1}{4}\,m^{-2}h^{-1}(\mu+\nu).$$

Следовательно,

$$J_{31} \le 4\pi m\,h(\mu+\nu)\,|D_m(x-y)|,$$

$$J_{32} \le \pi^2 m\,h(\mu+\nu)\,(|\mu-\nu|-1)^{-2}.$$

Соотношение (2) доказано. Для доказательства соотношения (3) заметим, что

$$\Delta_m^{(2)}\left(x_\mu + tx_1, x_\nu + sx_1\right) = \frac{\varphi_{\mu\nu}(t,s)}{\sin\dfrac{x_\mu - x_\nu + (t-s)x_1}{2}}.$$

Лемма 2. *Пусть* A_1 *— подмножество точек из* A, *для которых* $|\mu - \nu|$ *— четно,* $A_2 = A \setminus A_1$. *Тогда равномерно по* m

$$\sum_{A_1} \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right| d\sigma = \frac{8-2\pi}{\pi^2} \ln^2 m + O(\ln m), \tag{4}$$

$$\sum_{A_2} \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right| d\sigma = \frac{2}{\pi} \ln^2 m + O(\ln m), \tag{5}$$

$$\sum_{A_1} \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(2)}(x,y)\right| d\sigma = \frac{16-4\pi}{\pi} \ln m + O(1), \tag{6}$$

$$\sum_{A_2} \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(2)}(x,y)\right| d\sigma = 4 \ln m + O(1), \tag{7}$$

$$d\sigma = dx\,dy.$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость равенства (6). Так как при $|y| \le \pi$ функция $g(y) = |\sin(y/2)|^{-1} - 2|y|^{-1}$ ограничена, то левая часть (6) равна

$$\frac{2}{m} \sum_{A_1} \int_{I_{00}} \left| \frac{\sin\dfrac{m(x+y)}{2} \sin\dfrac{m(x-y)}{2}}{\sin\dfrac{x-y+x_\mu-x_\nu}{2}} \right| d\sigma =$$

$$= \frac{2}{m} \sum_{A_1} \int_{[-\pi/2,\pi/2]^2} \frac{\left|\sin\dfrac{x+y}{2} \sin\dfrac{x-y}{2}\right|}{|x-y+\pi(\mu-\nu)|} d\sigma + O(1) =$$

$$= \frac{4(4-\pi)}{\pi m} \sum_{A_1} \frac{1}{|\mu-\nu|} + O(1) = \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln m + O(1).$$

Аналогично находим (7). Для доказательства (4), (5) заменим, учитывая ограниченность функции g и оценку

$$\int_{T^2} |D_m(x+y)|\, d\sigma = O(\ln m),$$

y в знаменателе на $\sin(y/2)$ и воспользуемся тождеством

$$\sin(y + x_\nu) = \sin\left(\frac{x + x_\mu + y + x_\nu}{2} - \frac{x + x_\mu - y - x_\nu}{2}\right),$$

$$\sum_{A_1} \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right| d\sigma =$$

$$= \sum_{A_1} \int_{I_{00}} \left| \frac{\sin\dfrac{m(x+y)}{2} \sin\dfrac{m(x-y)}{2}}{\sin\dfrac{x+y+x_\mu+x_\nu}{2} \sin\dfrac{x-y+x_\mu-x_\nu}{2}} \right| \cos\frac{y+x_\nu}{2}\, d\sigma + O(\ln m). \tag{8}$$

Разобьем множества A_i, $i=1,2$, на части A_{i1} и A_{i2}, относя к A_{i1} те точки из A_i, для которых $\mu+\nu \le m/2-1$, $A_{i2}=A_i \setminus A_{i1}$. Заменяя синусы в знаменателе (8) их аргументами (при $\pi/2 \le y \le \pi$ функция $g(\pi-y)$ ограничена) и замечая, что при $(x,y)\in I_{00}$

$$m^{-2}\sum_{A}|x-y+x_\mu-x_\nu|^{-1} = O(\ln m),$$

получаем

$$\sum_{A_1}\int_{I_{\mu\nu}}\left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right|d\sigma =$$

$$= \frac{32-8\pi}{\pi^2}\left(\sum_{A_{11}}\frac{\cos\dfrac{\pi\nu}{2m}}{|\mu-\nu|(\mu+\nu)} + \sum_{A_{12}}\frac{\cos\dfrac{\pi\nu}{2m}}{|\mu-\nu|(2m-\mu-\nu)}\right) + O(\ln m) =$$

$$= \frac{32-8\pi}{\pi^2}\sum_{A_{11}}\frac{\cos\dfrac{\pi\nu}{2m}}{|\mu-\nu|(\mu+\nu)} + O(\ln m),$$

поскольку $\sum_{A_{12}}$ есть $O(\ln m)$. Аналогично

$$\sum_{A_2}\int_{I_{\mu\nu}}\left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right|d\sigma = \frac{8}{\pi}\sum_{A_{21}}\cos\frac{\pi\nu}{2m}\frac{1}{|\mu-\nu|(\mu+\nu)} + O(\ln m) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{A_{11}}\cos\frac{\pi\nu}{2m}\frac{1}{|\mu-\nu|(\mu+\nu)} + O(\ln m)$$

(сдвиг $\nu\to\nu+1$). Но согласно формуле (13) из [1]

$$\int_{[0,\pi]^2}\left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right|d\sigma = 2I_0 = \frac{8}{\pi^2}\ln^2 m + O(\ln m),$$

поэтому

$$\sum_{A_{11}}\cos\frac{\pi\nu}{2m}\frac{1}{|\mu-\nu|(\mu+\nu)} = \frac{1}{4}\ln^2 m + O(\ln m).$$

Соотношения (4) и (5) доказаны.

Доказательство теоремы. $L_{mn}(x,y)$ имеет период π/m по x и π/n по y, поэтому в дальнейшем $|x|\le\pi/(2m)$, $|y|\le\pi/(2n)$. Компактный вид ядра

$$\sum_{|\mu|/m+|\nu|/n\le 1} e^{i\mu x+i\nu y}$$

найден в [1] (формула (8)). Проведя преобразования, аналогичные выполненным в [1] для вычисления констант Лебега (получение соотношений для I_0 и (18) из [1]), будем иметь ($l=n/m$)

$$L_{mn}(x,y) = \frac{2}{m^2}\sum_{0\le\mu,\nu\le m-1}\left|\Delta_m^{(1)}\big(x+x_\mu, l(y+y_\nu)\big)\right| +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{\ln l}{m^2}\sum_{0\le\mu,\nu\le m-1}\left|\Delta_m^{(2)}\big(x+x_\mu, l(y+y_\nu)\big)\right| + O(\ln m).$$

Вклад в обе суммы слагаемых при $\nu=\mu$, $\mu\pm 1$ равен $O(\ln m)$, поэтому, полагая $v=ly$, получаем $(x_\nu = l\,y_\nu)$

$$L_{mn}(x, v/l) = \frac{2}{m^2}\sum_A \left|\Delta_m^{(1)}\left(x+x_\mu, v+x_\nu\right)\right| +$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\ln l}{m^2}\sum_A \left|\Delta_m^{(2)}\left(x+x_\mu, v+x_\nu\right)\right| + O(\ln n). \tag{9}$$

Найдем сначала асимптотику первой суммы в (9). Согласно лемме 1 для $(x,y)\in I_{\mu\nu}$, $|t|\le 1/2$, $|s|\le 1/2$ имеем

$$|\Delta_m^{(1)}(x,y)\varphi_{\mu\nu}(t,s)| =$$

$$= \left|\Delta_m^{(1)}\left(x_\mu + t x_1, x_\nu + s x_1\right)\right| \left|\sin\frac{m(x+y)}{2}\sin\frac{m(x-y)}{2}\right| +$$

$$+ O\left\{\frac{|D_m(x+y)\,D_m(x-y)|}{m} + \frac{m^2}{(|\mu-\nu|-1)^2}h(\mu+\nu) + \right.$$

$$\left. + \frac{m|D_m(x+y)|}{(|\mu-\nu|-1)^2} + m|D_m(x-y)|\ h(\mu+\nu)\right\}. \tag{10}$$

Обозначим через $Q(x,y) = Q_m^{(\mu,\nu)}(x,y)$ величину, стоящую под знаком O. Тогда

$$\sum_A \left|\varphi_{\mu\nu}(t,s)\right| \int_{I_{\mu\nu}} \left|\Delta_m^{(1)}(x,y)\right| d\sigma =$$

$$= \sum_A \left|\Delta_m^{(1)}\left(x_\mu + t x_1, x_\nu + s x_1\right)\right| \int_{I_{\mu\nu}} \left|\sin\frac{m(x+y)}{2}\sin\frac{m(x-y)}{2}\right| d\sigma +$$

$$+ O\left(\sum_A \int_{I_{\mu\nu}} |Q(x,y)|\, d\sigma\right).$$

Покажем, что сумма под знаком O имеет порядок $\ln m$, для этого оценим ее для каждого слагаемого, входящего в Q (см. (10)):

$$m^{-1}\sum_A \int_{I_{\mu\nu}} |D_m(x+y)\,D_m(x-y)|\, d\sigma = O\left(\frac{\ln^2 m}{m}\right),$$

$$m\sum_A \frac{h(\mu+\nu)}{(|\mu-\nu|-1)^2}\operatorname{mes} I_{\mu\nu} = O(1),$$

поскольку $\sum_{l=2}^{2m-2} h(l) = O(1)$;

$$m\sum_A \frac{1}{(|\mu-\nu|-1)^2}\int_{I_{\mu\nu}} |D_m(x+y)|\, d\sigma \le$$

$$\le \pi \sum_{2\le|k|\le m-1} \frac{1}{(|k|-1)^2} \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_{x_{2\mu-k-1}}^{x_{2\mu-k+1}} |D_m(t)|\, dt = O(\ln m).$$

Четвертая сумма оценивается аналогично и имеет тот же порядок $\ln m$.

Следовательно, полагая $u = tx_1$, $v = sx_1$, $|u| \le \pi/(2m)$, $|v| \le \pi/(2m)$, и применяя соотношения (4), (5), получаем

$$\frac{1}{m^2} \sum_A \left| \Delta_m^{(1)}\left(x_\mu + u, x_\nu + v\right) \right| = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left| \sin\frac{m(u+v)}{2} \sin\frac{m(u-v)}{2} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \cos\frac{m(u+v)}{2} \cos\frac{m(u-v)}{2} \right| \right\} \ln^2 m + O(\ln m). \tag{11}$$

Осталось найти асимптотику второй суммы в (9). Согласно соотношению (3) при $(x, y) \in I_{\mu\nu}$, $|t| \le 1/2$, $|s| \le 1/2$ имеем

$$|\varphi_{\mu\nu}(t,s)\, \Delta_m^{(2)}(x,y)| = \left| \Delta_m^{(2)}\left(x_\mu + tx_1, x_\nu + sx_1\right) \right| \left| \sin\frac{m(x+y)}{2} \sin\frac{m(x-y)}{2} \right| +$$

$$+ O\left(\frac{m}{(|\mu - \nu| - 1)^2} \right).$$

Применяя соотношения (6), (7), получаем

$$\frac{1}{m^2} \sum_A \left| \Delta_m^{(2)}\left(x_\mu + u, x_\nu + v\right) \right| = \frac{2}{\pi} \left\{ \left| \sin\frac{m(u+v)}{2} \sin\frac{m(u-v)}{2} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \cos\frac{m(u+v)}{2} \cos\frac{m(u-v)}{2} \right| \right\} \ln m + O(1), \tag{12}$$

поскольку

$$m \sum_A \frac{\operatorname{mes} I_{\mu\nu}}{(|\mu - \nu| - 1)^2} = O(1).$$

Объединяя (11), (12) и (9), получаем утверждение теоремы.

В заключение отметим, что теорема была анонсирована в [4].

1. *Кузнецова О. И.* Об асимптотическом поведении констант Лебега для последовательности треугольных частных сумм двойных рядов Фурье // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 3. – С. 629 – 636.
2. *Тригуб Р. М.* Об интегральных нормах полиномов // Мат. сб. – 1976. – **101**, № 3. – С. 315 – 333.
3. *Пименова Л. М.* О функциях Лебега для некоторых интерполяционных многочленов двух переменных // Докл. АН СССР. – 1979. – **249**, № 1. – С. 52 – 54.
4. *Кузнецова О. И.* О функции Лебега двойных рядов Фурье // Теория функций и приближений: Тр. Саратов. зимн. шк., 1982. – Саратов, 1983. – Ч. 2. – С. 68 – 70.

Получено 22.10.93