УДК 517. 95

А. А. Ковалевский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НАКОПИТЕЛЯМИ

The asymptotic behaviour of solutions of Neumann problems has been studied for nonlinear elliptic equations in domains with accumulators which are models for fracture-cellular media. An effective description has been given for the homogenized problem, which is a problem for the system of one functional and one differential equations in the case of simple accumulators and which is a problem for two functional and one differential equations in the case of complicated accumulators.

Вивчена асимптотична поведінка розв'язків задач Неймана для нелінійних еліптичних рівнянь в областях зі збирачами, що є моделями тріщиновато-пористих середовищ. Наведено ефективний опис усередненої задачі, яка у випадку простих збирачів є задачею для системи функціонального і диференціального рівнянь, а у випадку подвійних збирачів — задачею для системи двох функціональних і одного диференціального рівнянь.

Введение. Выяснение асимптотического поведения обобщенных решений класса $W^{1,m}(\Omega_s)$ задач Неймана в последовательности областей $\Omega_s \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \ldots$, и вида соответствующей усредненной задачи тесно связано с вопросом о существовании последовательности линейных непрерывных операторов продолжения $p_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to W^{1,m}(\Omega)$, удовлетворяющей неравенству $\sup\limits_s \| p_s \| < \infty$. Если такая последовательность операторов существует, то говорят, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$; в противном случае говорят о слабой связанности пространств $W^{1,m}(\Omega_s)$ с $W^{1,m}(\Omega)$. В некоторых ситуациях полезным является следующее обобщение понятия сильной связанности пространств. Пусть имеются семейства $\{\Omega'_r\}$, $\{\Omega''_r\}$ областей в $\mathbb{R}^n$, причем при произвольном r $\Omega'_r \subset \Omega''_r$. Говорят, что пространства $W^{1,m}(\Omega'_r)$ сильно связаны с пространствами $W^{1,m}(\Omega''_r)$, если существует семейство линейных непрерывных операторов продолжения p_r : $W^{1,m}(\Omega'_r) \to W^{1,m}(\Omega''_r)$, удовлетворяющее неравенству $\sup\limits_r \| p_r \| < \infty$; если же такого семейства операторов не существует, то говорят о слабой связанности соответствующих пространств.

Понятия сильной связанности соболевских пространств $W^{1,2}$ были введены, хотя и в несколько иной форме, Е. Я. Хрусловым в [1 – 4].

Результаты работ [1, 5 – 7] показывают, что последовательности задач Неймана для эллиптических уравнений в областях Ω_s в случае сильной связанности соответствующих энергетических пространств в качестве усредненной отвечает также задача Неймана для одного дифференциального уравнения. Если же энергетические пространства, соответствующие рассматриваемым задачам Неймана, слабо связаны, то возможны качественно различные случаи усреднения этих задач.

Одним из примеров слабо связанных пространств являются соболевские пространства, соответствующие областям Ω_s, для которых справедливо разложение $\Omega_s = \Omega'_s \cup H_s \cup \Omega''_s$, причем пространства, соответствующие областям Ω'_s, Ω''_s, сильно связаны с пространством, соответствующим области Ω, содержащей Ω_s, и $\lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} H_s = 0$. Описанная ситуация реализуется, в частности, для областей, состоящих из двух основных компонент каркасного типа и соединяющих их тонких каналов. Усреднение задач Неймана для эллиптических уравнений в областях подобного типа приводит к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений [1, 2, 8, 9].

К другому типу областей, порождающих слабо связанные соболевские пространства, относятся области Ω_s, представимые в виде $\Omega_s = \Omega_s' \bigcup H_s \bigcup E_s$, где области Ω_s' таковы, что соответствующие соболевские пространства сильно связаны, $\lim\limits_{s\to\infty} \operatorname{mes} H_s = 0$, открытые множества E_s являются объединениями непересекающихся областей E_s^j, $j \in J_s$, называемых накопителями. Если пространства $W^{1,m}(E_s^j)$ сильно связаны с пространствами $W^{1,m}(B_s^j)$ (B_s^j — шар минимального радиуса, содержащий E_s^j), то области E_s^j будем называть простыми m-накопителями; если же пространства $W^{1,m}(E_s^j)$ слабо связаны с пространствами $W^{1,m}(B_s^j)$, то области E_s^j будем называть сложными m-накопителями. В работах [3, 4, 10] для вариационных уравнений установлены достаточные условия, при которых усреднение задач Неймана в областях с простыми накопителями приводит к системе функционального и дифференциального уравнений.

Настоящая статья посвящена изучению асимптотики решений задач Неймана в трехмерных областях с периодически расположенными накопителями для нелинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида (т. е. не обязательно вариационных). Предлагаемый подход не связан с вариационными методами работ [3, 4, 10], а базируется, главным образом, на специальном асимптотическом приближении решений исследуемых задач и использовании свойства равномерной монотонности коэффициентов рассматриваемых уравнений. В первой части статьи исследуется поведение решений задач Неймана в областях с простыми накопителями. Устанавливается, что этим задачам в качестве усредненной отвечает задача для системы функционального и дифференциального уравнений. Во второй части изучается поведение решений задач Неймана в областях со сложными (двойными) накопителями. Усреднение этих задач приводит к системе из двух функциональных и одного дифференциального уравнений.

Отметим, что ранее асимптотика решений краевых задач в областях со сложными накопителями не изучалась.

1. Усреднение задач Неймана в областях с простыми накопителями.

1. 1. Области $\boldsymbol{\Omega_s}$. Введем обозначения: $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < 1/2,\ i = 1, 2, 3\}$; если $y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = y + t^{-1}Q$. Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$Z_s = \left\{ z \in \Omega : sz_i - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $Z_s \neq \varnothing$ и справедливы предложения

$$\bigcup_{z \in Z_s} \overline{Q_s(z)} = \overline{\Omega} \qquad \forall s \in \mathbb{N},$$

$$Q_s(z) \cap Q_s(z') = \varnothing \qquad \forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall z, z' \in Z_s, \quad z \neq z'.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + \beta s^{-1}\overline{Q}), \qquad \Omega_s^{(2)} = \bigcup_{z \in Z_s} (z + \alpha s^{-1} Q).$$

Множества $\Omega_s^{(1)}$ являются областями в $\mathbb{R}^3$, содержащимися в Ω.

Пусть еще $\tau > 1$, $0 < \rho < \alpha$. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$\Lambda_s^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2},\ \forall j \ne i\ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau} \right\}.$$

Наконец, положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s),$$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Относительно структурных составляющих областей Ω_s отметим следующие легко устанавливаемые факты. Прежде всего, для любой функции $\varphi \in L^1(\Omega)$ имеем

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} \varphi\, dx = (1 - \beta^3) \int_{\Omega} \varphi\, dx, \tag{1}$$

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} \varphi\, dx = \alpha^3 \int_{\Omega} \varphi\, dx. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes} H_s = 0. \tag{3}$$

1.2. Операторы A_s, $\hat{A}$ и некоторые их свойства. Пусть $m > 1$, $m' = m/(m-1)$, $1 < m_1 \le m$, $m_2 \ge m$, $c \ge 1$, μ — неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$, для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ e^i — орт i-го направления в $\mathbb{R}^3$, a_i — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$. Будем предполагать, что для любых x, $x' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x, \eta - \eta_i e^i)| = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x, \eta) - a_i(x', \eta')|^{m'} \le \mu(|x - x'|)(1 + |\eta|)^m +$$
$$+ c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m - m_1} |\eta - \eta'|^{m_1}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta'))(\eta_i - \eta_i') \ge c^{-1}(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m - m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}. \tag{6}$$

Пусть еще a — функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ такая, что для любых $x, x' \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$

$$a(x, 0) = 0, \tag{7}$$

$$|a(x, \xi) - a(x', \xi')|^{m'} \le \mu(|x - x'|)(1 + |\xi|)^m +$$
$$+ c(1 + |\xi| + |\xi'|)^{m - m_1} |\xi - \xi'|^{m_1}, \tag{8}$$

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi'))(\xi - \xi') \ge c^{-1}(1 + |\xi| + |\xi'|)^{m - m_2} |\xi - \xi'|^{m_2}. \tag{9}$$

Введем операторы A_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(x, \nabla u)\partial_i v + a(x, u)v \right\} dx.$$

Приведем некоторые следствия из условий на коэффициенты операторов A_s. Через c_i, $i = 1, 2, \ldots$, здесь и в дальнейшем будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от α, β, m, m_2, c. Используя неравенства (5), (6), (8), (9), устанавливаем, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\| A_s u - A_s v \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \le$$

$$\le c_1 (1 + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_1} \| u - v \|^{m_1}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{10}$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v \rangle \ge$$

$$\ge c_2 (1 + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_2} \| u - v \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)}. \tag{11}$$

Из этих неравенств и равенства $A_s 0 = 0$ справедливого в силу (4), (7), вытекает, что операторы A_s обратимы [11]. Используя неравенство (11) и равенство $A_s 0 = 0$, получаем, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $g \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$

$$\| A_s^{-1} g \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_3 (1 + \| g \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*})^{1/(m-1)}. \tag{12}$$

Перейдем к описанию оператора $\hat{A}$. Положим $\Pi = Q \setminus \beta \overline{Q}$ и пусть для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ $Q^i = \{ x \in \partial Q : x_i = -1/2 \}$. Пусть теперь $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Pi)$ множества всех функций $u \in C^1(\overline{\Pi})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in Q^i$ $u(x + e^i) = u(x)$. Из результатов [11] о разрешимости уравнений с монотонными операторами вытекает, что для произвольной пары $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует единственная функция $v_{y,\eta} \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi)$ такая, что $\int_\Pi v_{y,\eta} dx = 0$ и

$$\int_\Pi \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta})\partial_i v \right\} dx = 0 \quad \forall v \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi). \tag{13}$$

Используя (13), (4) – (6), устанавливаем, что

$$\int_\Pi | \eta + \nabla v_{y,\eta} |^m dx \le c_4 (1 + |\eta|)^m \quad \forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3. \tag{14}$$

Введем функции $\hat{a}_i$. Если $i \in \{1, 2, 3\}$, то $\hat{a}_i$ — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что

$$\hat{a}_i(y, \eta) = \int_\Pi a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta}) dx \quad \forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3. \tag{15}$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $\hat{a}_i$. Положим

$$m_3 = \frac{m_1 m'}{m_2 m' - m_1}, \quad \mu_1 = \mu + \mu^{m_1/(m_2 m')}.$$

Предложение 1. *Пусть* $y, y' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{3} |\hat{a}_i(y, \eta) - \hat{a}_i(y', \eta')|^{m'} \leq c_5 \mu_1(|y - y'|)(1 + |\eta| + |\eta'|)^m +$$

$$+ c_5(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m - m_3} |\eta - \eta'|^{m_3}, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\hat{a}_i(y, \eta) - \hat{a}_i(y, \eta'))(\eta_i - \eta_i') \geq 0. \tag{17}$$

Доказательство предложения проводится с использованием прежде всего (13), затем (5), (6) и (14), (15).

Отметим еще, что в силу (4) для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $y \in \Omega$ $\hat{a}_i(y, 0) = 0$.

Пусть теперь $\hat{A}$ — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A} u, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \hat{a}_i(x, \nabla u) \partial_i v + (1 - \beta^3) a(x, u) v \right\} dx.$$

Используя неравенства (16), (17) и (8), (9), устанавливаем, что для любых $u, v \in$ $\in W^{1,m}(\Omega)$

$$\| \hat{A}u - \hat{A}v \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega))^*} \leq c_6 (1 + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega)} + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega)})^{m - m_3} \| u - v \|^{m_3}_{W^{1,m}(\Omega)}, \tag{18}$$

$$\langle \hat{A} u - \hat{A} v, u - v \rangle \geq c_7 (1 + \| u \|_{L^m(\Omega)} + \| v \|_{L^m(\Omega)})^{m - m_2} \| u - v \|^{m_2}_{L^m(\Omega)}. \tag{19}$$

1.3. Основной результат. Пусть $f \in L^{m'}(\Omega)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in$ $\in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, причем

$$\langle f_s, v \rangle = \int_{\Omega_s} f v dx, \quad v \in W^{1,m}(\Omega_s).$$

Нас будет интересовать поведение при $s \to \infty$ последовательности $\{ A_s^{-1} f_s \}$. Для точного описания асимптотического поведения этой последовательности понадобятся два дополнительных предположения.

Прежде всего, предположим, что выполняется условие:

$\mathcal{H}$) для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-m} a_i(x, \lambda\eta) = b_i(x, \eta),$$

где b_i, $i = 1, 2, 3$, — функции на $\Omega \times \mathbb{R}^3$.

Заметим, что в силу этого условия и (4) – (6) для любых $x, x' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in$ $\in \mathbb{R}^3$ $\sum_{i=1}^{3} |b_i(x, 0)| = 0$,

$$\sum_{i=1}^{3} |b_i(x, \eta) - b_i(x', \eta')|^{m'} \leq \mu(|x - x'|) |\eta|^m + c(|\eta| + |\eta'|)^{m - m_1} |\eta - \eta'|^{m_1}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (b_i(x, \eta) - b_i(x, \eta'))(\eta_i - \eta_i') \geq 0. \tag{21}$$

Предположим еще, что числа τ и m связаны соотношением

$$\tau - \frac{m}{2} \geq 1. \tag{22}$$

Положим теперь

$$\kappa = 1 - \operatorname{sign}\left(\tau - \frac{m}{2} - 1\right), \quad \nu = \frac{2}{\beta - \alpha}$$

и введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, то F_u — отображение $L^m(\Omega)$ в $L^{m'}(\Omega)$ такое, что для любых $\psi \in L^m(\Omega)$ и $x \in \Omega$

$$(F_u\psi)(x) = -\kappa\nu^{m-1}\rho^2 \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u(x) - \psi(x))e^i) + \alpha^3[a(x, \psi(x)) - f(x)].$$

Предложение 2. *Пусть* $u \in L^m(\Omega)$. *Тогда существует единственная функция* $\psi \in L^m(\Omega)$ *такая, что* $F_u\psi = 0$.

Доказательство. Используя неравенства (20), (21) и (8), (9), устанавливаем, что для любых $\psi_1, \psi_2 \in L^m(\Omega)$

$$\| F_u\psi_1 - F_u\psi_2 \|^{m'}_{L^{m'}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_8(1 + \| u \|_{L^m(\Omega)} + \| \psi_1 \|_{L^m(\Omega)} + \| \psi_2 \|_{L^m(\Omega)})^{m-m_1} \| \psi_1 - \psi_2 \|^{m_1}_{L^m(\Omega)},$$

$$\int_\Omega (F_u\psi_1 - F_u\psi_2)(\psi_1 - \psi_2)\,dx \geq$$

$$\geq c_9(1 + \| \psi_1 \|_{L^m(\Omega)} + \| \psi_2 \|_{L^m(\Omega)})^{m-m_2} \| \psi_1 - \psi_2 \|^{m_2}_{L^m(\Omega)}.$$

Отсюда и из результатов [11] о разрешимости уравнений с монотонными операторами выводим, что существует единственная функция $\psi \in L^m(\Omega)$ такая, что $F_u\psi = 0$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $u, u', \psi, \psi' \in L^m(\Omega)$, *причем*

$$F_u\psi = 0, \quad F_{u'}\psi' = 0. \tag{23}$$

Тогда

$$\int_\Omega (a(x, \psi) - a(x, \psi'))(u - u')\,dx \geq 0. \tag{24}$$

Доказательство. Положим

$$E = \{x \in \Omega : (F_u\psi)(x) = 0, \ (F_{u'}\psi')(x) = 0\},$$

$$E' = \{x \in \Omega : u(x) \geq u'(x)\}, \quad E'' = \{x \in \Omega : u(x) < u'(x)\}.$$

В силу (23) $\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \Omega$. Покажем, что

$$\psi(x) \geq \psi'(x) \quad \forall x \in E \cap E'. \tag{25}$$

Пусть $x \in E \cap E'$. Предположим, что $\psi(x) < \psi'(x)$. Тогда $u(x) - \psi(x) > u'(x) - - \psi'(x)$. Теперь в силу (21) и (9) имеем

$$\sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u(x) - \psi(x))e^i) \geq \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u'(x) - \psi'(x))e^i),$$

$$a(x, \psi(x)) < a(x, \psi'(x)).$$

Из этих неравенств вытекает, что $(F_u\psi)(x) < (F_{u'}\psi')(x)$. Полученное неравенство противоречит тому, что $x \in E$. Следовательно, $\psi(x) \ge \psi'(x)$. Тем самым (25) установлено. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что

$$\psi(x) \le \psi'(x) \quad \forall x \in E \cap E''. \tag{26}$$

Из (25), (26) и (9) выводим (24). Предложение доказано.

Введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, то $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Сформулируем теперь основной результат первой части статьи.

Теорема 1. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{H_s} |u_s|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |\nabla u_s|^m dx = 0 \tag{27}$$

и существуют функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\psi \in L^m(\Omega)$ *такие, что*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s\psi|^m dx = 0, \tag{28}$$

$F_u\psi = 0$ *и для любой функции* $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A} u, v\rangle + \alpha^3 \int_\Omega a(x,\psi) v\, dx = (1 - \beta^3 + \alpha^3) \int_\Omega f v\, dx. \tag{29}$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных предложений. Они рассматриваются в следующем пункте.

1. 4. Вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $v \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $v = 0$ *на* $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, w — *функция на* $\mathbb{R}^3$ *такая, что для любого* $x \in \mathbb{R}^3$ $w(x) = \sum_{z\in Z_s} v(z + s^{-1}x)$. *Тогда* $w|_\Pi \in W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in Q^i$ $w(x + e^i) = w(x)$. Введем обозначения: если $i \in \{1, 2, 3\}$, то $Y_i = \{y \in Z_s : y_i = -1 + 1/(2s)\}$; если $i \in \{1, 2, 3\}$ и $y \in Y_i$, то $X_{i,y} = \{y + ks^{-1}e^i : k = 0, 1, \ldots, 2s-1\}$. Имеем

$$Z_s = \bigcup_{y\in Y_i} X_{i,y} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\};$$

для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $y, y' \in Y_i$, $y \ne y'$, $X_{i,y} \cap X_{i,y'} = \varnothing$. Используя это, для $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in Q^i$ получаем

$$w(x + e^i) - w(x) = \sum_{y\in Y_i} [v(y + 2e^i + s^{-1}x) - v(y + s^{-1}x)].$$

Отсюда и из того, что для любого $y \in Y_i$ $(y + s^{-1}x)$, $(y + 2e^i + s^{-1}x) \,\overline{\in}\, \Omega$, выводим равенство $w(x + e^i) = w(x)$. Лемма доказана.

В силу (14) для любой пары $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует функция $\tilde{v}_{y,\eta} \in W^{1,m}(Q)$ такая, что $\tilde{v}_{y,\eta}|_\Pi = v_{y,\eta}$ и

$$\| \tilde{v}_{y,\eta} \|_{W^{1,m}(Q)} \le c_{10}(1 + |\eta|). \tag{30}$$

Введем обозначение: если $y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{N}$, то $V_s[y,\eta]$ — функция на Ω такая, что при $z \in Z_s$ и $x \in Q_s(z)$

$$V_s[y,\eta](x) = s^{-1}\tilde{v}_{y,\eta}(s(x-z)).$$

Используя принадлежность функций $v_{y,\eta}$ пространству $W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi)$, устанавливаем, что если $y\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}^3$, $s\in\mathbb{N}$, то $V_s[y,\eta]\in W^{1,m}(\Omega)$ и при $z\in Z_s$ для почти всех $x\in Q_s(z)$

$$\nabla V_s[y,\eta](x) = \nabla\tilde{v}_{y,\eta}(s(x-z)).$$

Лемма 2. *Пусть* $y\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}^3$, E *— открытое множество в* $\mathbb{R}^3$, *причем* $E\subset\Omega$ *и* $\operatorname{mes}\partial E=0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\int_E\{|\nabla V_s[y,\eta]|^m+s^m|V_s[y,\eta]|^m\}dx\le c_{11}(1+|\eta|)^m\operatorname{mes}E. \tag{31}$$

Доказательство леммы основано на использовании определения функций $V_s[y,\eta]$ и неравенства (30).

Приведем теперь несколько полезных оценок для интегралов по n-мерным параллелепипедам от функций класса $W^{1,m}$.

Лемма 3. *Пусть* $P=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha_j<x_j<\beta_j,\ j=1,\dots,n\}$, $v\in W^{1,m}(P)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\Gamma^i=\{x\in\partial P:x_i=\alpha_i\}$. *Тогда для любого* $\lambda\in(0,1)$

$$\int_{\Gamma^i}|v|^m d\Gamma\le m\lambda^{-1}(\beta_i-\alpha_i)^{-1}\int_P|v|^m dx+\lambda^{m-1}(\beta_i-\alpha_i)^{m-1}\int_P|\nabla v|^m dx.$$

Этот результат устанавливается с помощью формулы Ньютона – Лейбница для функций класса $C^1(\overline{P})$ таким же образом, как и аналогичные неравенства из § 6 гл. 1 монографии [12]. Используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем также следующий результат.

Лемма 4. *Пусть* $P=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha_j<x_j<\beta_j,\ j=1,\dots,n\}$, $v\in W^{1,m}(P)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda\in(0,1)$, $P_1^i=\{x\in P:\alpha_i<x_i<\alpha_i+\lambda(\beta_i-\alpha_i)\}$, $P_2^i=\{x\in P:\alpha_i+\lambda(\beta_i-\alpha_i)<x_i<\beta_i\}$. *Тогда*

$$\int_{P_1^i}|v|^m dx\le 4^{m-1}\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_{P_2^i}|v|^m dx+4^{m-1}(\beta_i-\alpha_i)^m\int_P|\nabla v|^m dx.$$

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2 из [3].

Лемма 5. *Пусть* K *— открытый куб в* $\mathbb{R}^n$ *со стороной* h, $v\in W^{1,m}(K)$, P *— параллелепипед, содержащийся в* K. *Тогда*

$$\int_P|v|^m dx\le 2^{m-1}h^{-n}\operatorname{mes}P\int_K|v|^m dx+c'h^{m-1}(\operatorname{mes}P)^{1/n}\int_K|\nabla v|^m dx,$$

где c' *— положительная постоянная, зависящая только от* n *и* m.

С помощью лемм 3 – 5 получим два важных результата, которые будут непосредственно использованы в доказательстве теоремы 1.

Введем обозначения: $\gamma=\min\{\alpha/2,1-\beta\}$, если $i\in\{1,2,3\}$, то

$$K_1^i=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\frac{\beta}{2}<x_i<\frac{\beta+\gamma}{2},\ \forall j\ne i\ |x_j|<\frac{\gamma}{4}\right\},$$

$$K_2^i=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\frac{\alpha-\gamma}{2}<x_i<\frac{\alpha}{2},\ \forall j\ne i\ |x_j|<\frac{\gamma}{4}\right\};$$

если $s\in\mathbb{N}$ и $i\in\{1,2,3\}$, то

$$\Lambda_{s,1}^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\beta}{2} < x_i < \frac{\beta+\gamma}{2},\ \forall j \neq i\ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau} \right\},$$

$$\Lambda_{s,2}^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha-\gamma}{2} < x_i < \frac{\alpha}{2},\ \forall j \neq i\ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau} \right\}.$$

Лемма 6. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 4\gamma^{-2}$, $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$. *Тогда*

$$\int_{H_s} |v|^m dx \leq c_{12} s^{-m} \|v\|^m_{W^{1,m}(\Omega_s)}. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $z \in Z_s$ и $i \in \{1, 2, 3\}$. Положив $P_i(z) = z + s^{-1}(\Lambda_s^i \cup \Lambda_{s,1}^i)$, согласно лемме 4 имеем

$$\int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} |v|^m dx \leq 4^{m-1}\gamma^{-1} \int_{z+s^{-1}\Lambda_{s,1}^i} |v|^m dx + 2^{m-2} s^{-m} \int_{P_i(z)} |\nabla v|^m dx. \tag{33}$$

Но так как в силу неравенств (22) и $s \geq 4\gamma^{-2}$ справедливо включение $z + s^{-1}\Lambda_{s,1}^i \subset z + s^{-1} K_1^i$, то согласно лемме 5 с учетом (22) получаем

$$\int_{z+s^{-1}\Lambda_{s,1}^i} |v|^m dx \leq c_{13} s^{-m} \int_{z+s^{-1}K_1^i} \{|v|^m + s^{-m/3} |\nabla v|^m\} dx. \tag{34}$$

Используя неравенства (33) и (34), находим

$$\int_{z+s^{-1}\Lambda_s} |v|^m dx \leq c_{14} s^{-m} \int_{Q_s(z)\cap\Omega_s} \{|v|^m + |\nabla v|^m\} dx.$$

Отсюда выводим (32). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $g_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ *и* $\sigma_1 = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \|g_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty$, $\sigma = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \|g_s\|_{L^m(\Omega_s)}$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ s^{m-1} \sum_{z\in Z_s} \sum_{i=1}^{3} \left| \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i g_s dx \right| \leq c_{15} (1+\sigma_1)^{1/m} \sigma^{(m-1)/m}. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 4\gamma^{-2}$. Введем обозначения:

$$\lambda_s = (s^{-m/6} + \|g_s\|_{L^m(\Omega_s)})(1 + \|g_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{-1},$$

если $z \in Z_s$, $i \in \{1, 2, 3\}$, то

$$\Gamma_{s,1}^i(z) = \left\{ x \in \partial(z + s^{-1}\Lambda_s^i) : x_i - z_i = \frac{\beta}{2s} \right\},$$

$$\Gamma_{s,2}^i(z) = \left\{ x \in \partial(z + s^{-1}\Lambda_s^i) : x_i - z_i = \frac{\alpha}{2s} \right\}.$$

Положим теперь

$$T_{s,l} = s^{m-1} \sum_{z\in Z_s} \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_{s,l}^i(z)} |g_s|^m d\Gamma, \quad l = 1, 2.$$

Используя формулу интегрирования по частям, интегральное и числовое неравенства Гельдера, а также неравенство (22), устанавливаем, что

$$s^{m-1} \sum_{z\in Z_s} \sum_{i=1}^{3} \left| \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i g_s dx \right| \leq 24 T_{s,1}^{1/m} + 24 T_{s,2}^{1/m}. \tag{36}$$

Получим оценки для $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$. Пусть $z \in Z_s$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Согласно лемме 3

$$\int\limits_{\Gamma^i_{s,1}(z)} |g_s|^m d\Gamma \le \frac{2ms}{\gamma\lambda_s} \int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,1}} |g_s|^m dx + \left(\frac{\lambda_s}{s}\right)^{m-1} \int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,1}} |\nabla g_s|^m dx. \quad (37)$$

Аналогично

$$\int\limits_{\Gamma^i_{s,2}(z)} |g_s|^m d\Gamma \le \frac{2ms}{\gamma\lambda_s} \int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,2}} |g_s|^m dx + \left(\frac{\lambda_s}{s}\right)^{m-1} \int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,2}} |\nabla g_s|^m dx. \quad (38)$$

Но так как в силу (22) и неравенства $s \ge 4\gamma^{-2}$ справедливы включения $z + s^{-1}\Lambda^i_{s,1} \subset z + s^{-1}K^i_1$, $z + s^{-1}\Lambda^i_{s,2} \subset z + s^{-1}K^i_2$, согласно лемме 5 с учетом (22) получаем

$$\int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,1}} |g_s|^m dx \le c_{16}s^{-m} \int\limits_{z+s^{-1}K^i_1} \{|g_s|^m + s^{-m/3}|\nabla g_s|^m\} dx, \quad (39)$$

$$\int\limits_{z+s^{-1}\Lambda^i_{s,2}} |g_s|^m dx \le c_{16}s^{-m} \int\limits_{z+s^{-1}K^i_2} \{|g_s|^m + s^{-m/3}|\nabla g_s|^m\} dx. \quad (40)$$

Используя неравенства (37) – (40), находим

$$T_{s,1} + T_{s,2} \le c_{17}(1 + \|g_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})(s^{-m/6} + \|g_s\|_{L^m(\Omega_s)})^{m-1} +$$

$$+ c_{17}s^{-m/6}(1 + \|g_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m+1}.$$

Отсюда и из (36) выводим (35). Лемма доказана.

Введем обозначение: если $s \in \mathbb{N}$, $z \in Z_s$, то $\chi_{s,z}$ — функция на Ω_s такая, что $\chi_{s,z}(x) = 1$ при $x \in z + \alpha s^{-1}Q$, $\chi_{s,z}(x) = 0$ при $x \in \Omega_s \setminus (z + \beta s^{-1}\overline{Q})$, $\chi_{s,z}(x) = -\nu s(x_i - z_i - \beta/(2s))$ при $x \in z + s^{-1}\Lambda^i_s$, $i = 1, 2, 3$.

Положим теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ $\chi_s = \sum_{z\in Z_s}\chi_{s,z}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\chi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ и в силу (22)

$$\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le 20\nu. \quad (41)$$

Используя это неравенство, легко показать, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Действительно, предположим, что существует последовательность линейных непрерывных операторов продолжения $p_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to W^{1,m}(\Omega)$, удовлетворяющая неравенству $\sup\limits_s \|p_s\| < \infty$. Тогда в силу (41) последовательность $\{p_s\chi_s\}$ ограничена в $W^{1,m}(\Omega)$ и, следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $\chi \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_j}\chi_{s_j} \to \chi$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Тогда, учитывая, что $\chi_s = 0$ на $\Omega^{(1)}_s$, $\chi_s = 1$ на $\Omega^{(2)}_s$, получаем

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega^{(1)}_{s_j}} |\chi|^m dx = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega^{(2)}_{s_j}} |\chi - 1|^m dx = 0.$$

Из этих равенств и (1), (2) выводим, что $\chi = 0$ почти всюду на Ω и $\chi = 1$ почти всюду на Ω. Полученное противоречие доказывает, что предполагаемой последовательности операторов продолжения не существует. Значит, пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Однако заметим, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s^{(1)})$ сильно связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Это устанавливается с помощью рассуждений, аналогичных изложенным в леммах 2.1 – 2.3 из [7]. С помощью таких же рассуждений проверяется, что пространства $W^{1,m}(z+\alpha s^{-1}Q)$ сильно связаны с пространствами $W^{1,m}(B_{s,z})$, $s \in \mathbb{N}$, $z \in Z_s$ ($B_{s,z}$ — шар минимального радиуса, содержащий $z+\alpha s^{-1}Q$). Поэтому области $z+\alpha s^{-1}Q$ являются простыми m-накопителями.

***1. 5. Доказательство теоремы* 1.** В силу (12) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_3 (1 + \| f \|_{L^{m'}(\Omega)})^{1/(m-1)}. \tag{42}$$

Отсюда и из леммы 6 вытекает первое из равенств (27). Кроме того, используя оценку (42) и сильную связанность пространств $W^{1,m}(\Omega_s^{(1)})$ с пространством $W^{1,m}(\Omega)$, устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_{s_j}^{(1)}} | u_{s_j} - q_{s_j} u |^m dx = 0. \tag{43}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ через δ_s обозначим интеграл по $\Omega_s^{(1)}$ от $|u_s - q_s u|^m$ и положим $\delta = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, \delta_s$.

Далее, в силу предложения 2 существует функция $\psi \in L^m(\Omega)$ такая, что $F_u \psi = 0$. Положим

$$r = 1 + \| f \|_{L^{m'}(\Omega)}^{1/(m-1)} + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega)} + \| \psi \|_{L^m(\Omega)}.$$

Возьмем еще произвольную функцию $v \in W^{1,m}(\Omega)$ и положим

$$r_1 = 1 + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega)}.$$

Зафиксируем теперь $k \in \mathbb{N}$ и возьмем функции $\tilde f$, $\tilde\psi \in C(\overline{\Omega})$, w, $\tilde v \in$ $\in C^1(\overline{\Omega})$ такие, что

$$\| \tilde f - f \|_{L^{m'}(\Omega)} + \| \tilde\psi - \psi \|_{L^m(\Omega)} \le k^{-m'}, \tag{44}$$

$$\| w - u \|_{W^{1,m}(\Omega)} + \| \tilde v - v \|_{W^{1,m}(\Omega)} \le k^{-m'}. \tag{45}$$

Ясно, что найдется $d \in (0, 1)$ такое, что

$$\mu_1(d) \le k^{-m'} \tag{46}$$

и для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \le d$, справедливы неравенства

$$| w(x') - w(x'') | + | \nabla w(x') - \nabla w(x'') | \le k^{-m'}, \tag{47}$$

$$| \tilde\psi(x') - \tilde\psi(x'') | \le k^{-m'}, \tag{48}$$

$$| \tilde v(x') - \tilde v(x'') | + | \nabla \tilde v(x') - \nabla \tilde v(x'') | \le k^{-1}. \tag{49}$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$ такое, что $t \geq \max\{k^{mm'}, 2d^{-1}\}$, и пусть для любого $y \in Z_t$ φ_y — функция из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ такая, что $0 \leq \varphi_y \leq 1$ на $\mathbb{R}^3$, $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_t(y)$, $|\nabla\varphi_y| \leq c_0 t^2$ на $\mathbb{R}^3$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$w_s = \sum_{y \in Z_t} V_s[y, \nabla w(y)]\varphi_y.$$

Используя (31), (45), (47) и то, что $\operatorname{mes}\Lambda_s \to 0$ при $s \to \infty$, устанавливаем

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s \|_{L^m(\Omega)} = 0, \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \| w_s \|_{W^{1,m}(\Omega)} \leq c_{18} r, \tag{50}$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{H_s} \{ |\nabla w_s|^m + s^m |w_s|^m \} \, dx = 0. \tag{51}$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\tilde{u}_s$ — функция на Ω такая, что при $z \in Z_s$ и $x \in Q_s(z)$

$$\tilde{u}_s(x) = \left(\frac{s}{\alpha}\right)^3 \int_{z+\alpha s^{-1}Q} u_s \, dx.$$

В силу неравенства Пуанкаре для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{z \in Z_s} \int_{z+\alpha s^{-1}Q} |u_s - \tilde{u}_s(z)|^m \, dx \leq c_{19} s^{-m} \int_{\Omega_s} |\nabla u_s|^m \, dx$$

и, следовательно, с учетом (42)

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s \tilde{u}_s|^m \, dx = 0. \tag{52}$$

Кроме того, в силу определения функций $\tilde{u}_s$ и (42) имеем

$$\sup_s \| \tilde{u}_s \|_{L^m(\Omega)} \leq c_{20} r. \tag{53}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$h_s = (1-\chi_s) q_s (w + w_s) + \sum_{z \in Z_s} \sigma(z) \chi_{s,z},$$

$$\tilde{h}_s = h_s + (1-\chi_s) q_s (u - w),$$

$$g_s = (1-\chi_s) q_s (u + w_s) - u_s + \sum_{z \in Z_s} \tilde{u}_s(z) \chi_{s,z}.$$

Используя соотношения (3), (22), (42) – (45), (50) – (53), первое из равенств (27) и лемму 6, получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \| h_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leq c_{21} r, \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \| \tilde{h}_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leq c_{22} r, \tag{54}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \| g_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leq c_{23} r, \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \| g_s \|_{L^m(\Omega_s)} \leq 2\delta^{1/m}, \tag{55}$$

$$\lim_{j\to\infty} \| g_{s_j} \|_{L^m(\Omega_{s_j})} = 0. \tag{56}$$

Пусть теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s^{(1)}$, $I_s^{(2)}$, $I_s^{(3)}$ — интегралы от функции

$(a(\cdot, h_s(\cdot)) - f)(h_s - u_s)$ соответственно по $\Omega_s^{(1)}$, $\Omega_s^{(2)}$ и H_s; $I_s^{(4)}$, $I_s^{(5)}$ — интегралы от функции $\sum_{i=1}^{3} a_i(\cdot, \nabla h_s(\cdot))\, \partial_i(h_s - u_s)$ соответственно по $\Omega_s^{(1)}$ и H_s. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\langle A_s u_s - A_s h_s, u_s - h_s\rangle = I_s^{(1)} + I_s^{(2)} + I_s^{(3)} + I_s^{(4)} + I_s^{(5)}. \tag{57}$$

Из (57) и (11) выводим, что

$$\| u_s - h_s \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_2^{-1} (1 + \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| h_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m_2 - m} \times$$
$$\times (I_s^{(1)} + I_s^{(2)} + I_s^{(3)} + I_s^{(4)} + I_s^{(5)}). \tag{58}$$

Изучим поведение интегралов $I_s^{(1)}, \ldots, I_s^{(5)}$ при $s \to \infty$. Используя неравенства (8), (45), первое из соотношений (50) и равенство (43), находим

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, I_s^{(1)} \le c_{24} r^{m-1} (k^{-1} + \delta^{1/m}), \tag{59}$$

$$\overline{\lim_{j \to \infty}}\, I_{s_j}^{(1)} \le c_{24} r^{m-1} k^{-1}. \tag{60}$$

С помощью соотношений (7), (8), (42), (44), (52), (53) и первого из неравенств (54) устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \left\{ I_s^{(2)} - \alpha^3 \int\limits_{\Omega} (a(x, \psi) - f)(\psi - \tilde{u}_s)\, dx \right\} \le c_{25} r^m k^{-1}. \tag{61}$$

Используя соотношения (3), (7), (8), (22), (42), лемму 6, первое из соотношений (50) и первое из неравенств (54), получаем

$$\lim_{s \to \infty} I_s^{(3)} = 0. \tag{62}$$

Перейдем к оценке $I_s^{(4)}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ ψ_s — сужение функции $q_s(u + w_s) - u_s$ на $\Omega_s^{(1)}$ и пусть $\{\psi'_s\}$ — последовательность функций из $C^1(\mathbb{R}^3)$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \| \psi'_s|_{\Omega_s^{(1)}} - \psi_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s^{(1)})} \le s^{-1}. \tag{63}$$

Для любых $y \in Z_t$ и $s \in \mathbb{N}$ положим $\psi_{y,s} = \varphi_y \psi'_s$. Пусть еще для любого $y \in Z_t$ $\eta^y = \nabla w(y)$. Положим теперь для любых $y \in Z_t$ и $s \in \mathbb{N}$

$$J_{y,s} = \int\limits_{\Omega_s^{(1)}} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta^y + \nabla V_s[y, \eta^y]) \partial_i \psi_{y,s} \right\} dx.$$

Используя (4), (5), (42), (45) – (47), (50), (63), лемму 2, свойства функций φ_y и выбор t, устанавливаем, что для $s \ge s_0$

$$I_s^{(4)} \le \sum_{y \in Z_t} J_{y,s} + c_{26} r^m k^{-1} + c_{27} r^{m-1} t^2 \delta_s^{1/m}. \tag{64}$$

Покажем, что интегралы $J_{y,s}$ на самом деле равны нулю. Пусть $y \in Z_t$ и $s \in \mathbb{N}$. Имеем $\psi_{y,s} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и $\psi_{y,s} = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Пусть $\psi'_{y,s}$ — функция на $\mathbb{R}^3$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\psi'_{y,s}(x) = \sum_{z \in Z_s} \psi_{y,s}(\dot{z} + s^{-1} x)$; $\psi''_{y,s}$ — сужение функции $\psi'_{y,s}$ на П. По лемме 1 $\psi''_{y,s} \in W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi)$. Учитывая определение функций $V_s[y, \eta^y]$ и $\psi''_{y,s}$, получаем

$$J_{y,s} = s^{-2} \int_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta^y + \nabla v_{y,\eta^y}) \partial_i \psi''_{y,s} \right\} dx.$$

Интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль в силу принадлежности $\psi''_{y,s}$ пространству $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi)$ и (13). Поэтому $J_{y,s} = 0$. Теперь из (64) и (43) выводим, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} I_s^{(4)} \le c_{26} r^m k^{-1} + c_{27} r^{m-1} t^2 \delta^{1/m}, \tag{65}$$

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} I_{s_j}^{(4)} \le c_{26} r^m k^{-1}. \tag{66}$$

Найдем оценку $I_s^{(5)}$. Используя (3) – (5), (22), (42), (44), (45), (47), (48), (51), (54) и лемму 6, устанавливаем, что при $s \ge s'$

$$I_s^{(5)} \le \sum_{z\in Z_s} \sum_{i=1}^{3} a_i\big(z, (w(z) - \tilde\psi(z)) \nu s e^i\big) \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i(\tilde h_s - u_s)\, dx + c_{28} r^m k^{-1/m}. \tag{67}$$

Введем обозначения: $C(w, \tilde\psi) = \sup_{\Omega} (1 + |w| + |\tilde\psi|)^{m-1}$, для любого $s \in \mathbb{N}$

$$J_s^{(1)} = \sum_{z\in Z_s} \sum_{i=1}^{3} a_i\big(z, (w(z) - \tilde\psi(z)) \nu s e^i\big) \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i g_s\, dx,$$

$$J_s^{(2)} = \rho^2 s^{-2\tau} \sum_{z\in Z_s} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i\big(z, (w(z) - \tilde\psi(z)) \nu s e^i\big) \right\} (\tilde u_s(z) - \tilde\psi(z)).$$

Тогда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\tilde h_s - u_s = g_s + \sum_{z\in Z_s} (\tilde\psi(z) - \tilde u_s(z)) \chi_{s,z},$$

в силу (67) при $s \ge s'$ имеем

$$I_s^{(5)} \le J_s^{(1)} + J_s^{(2)} + c_{28} r^m k^{-1/m}. \tag{68}$$

Используя лемму 7 и соотношения (55), (56), устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} J_s^{(1)} \le c_{29} C(w, \tilde\psi) r \delta^{(m-1)/m^2}, \tag{69}$$

$$\lim_{j\to\infty} J_{s_j}^{(1)} = 0. \tag{70}$$

Остается получить оценку для $J_s^{(2)}$. Пусть b — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ $b(x) = \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (w(x) - \tilde\psi(x)) e^i)$. В силу (20), (46) – (48) для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \le d$, имеем

$$|b(x') - b(x'')| \le 2^{m+2} c (1 + |w(x')| + |\tilde\psi(x')|)^{m-1} k^{-1}. \tag{71}$$

Кроме того, используя условие $\mathcal{H}$, для любых $s \ge s''$ и $y \in Z_t$ находим

$$\left| (\nu s)^{1-m} \sum_{i=1}^{3} a_i\big(y, (w(y) - \tilde\psi(y)) s \nu e^i\big) - b(y) \right| \le k^{-1}. \tag{72}$$

Из (5), (71), (72), (46) – (48) вытекает, что для любых $s \ge s''$ и $z \in Z_s$

$$(\nu s)^{1-m}\left\{\sum_{i=1}^{3} a_i\big(z,(w(z)-\tilde\psi(z))\nu s e^i\big)\right\}(\tilde u_s(z)-\tilde\psi(z)) \le$$

$$\le b(z)(\tilde u_s(z)-\tilde\psi(z)) + c_{30}k^{-1}(1+|w(z)|+|\tilde\psi(z)|)^{m-1}|\tilde u_s(z)-\tilde\psi(z)|.$$

Тогда, учитывая (22), для любого $s \ge s''$ получаем

$$J_s^{(2)} \le \rho^2\nu^{m-1}s^{m+2-2\tau}\sum_{z\in Z_s} b(z)(\tilde u_s(z)-\tilde\psi(z))s^{-3} +$$

$$+ c_{30}\nu^{m-1}k^{-1}\sum_{z\in Z_s}(1+|w(z)|+|\tilde\psi(z)|)^{m-1}|\tilde u_s(z)-\tilde\psi(z)|s^{-3}.$$

Используя это неравенство и (20), (22), (44), (45), (47), (48), (53), (71), при $s \ge s'''$ находим

$$J_s^{(2)} \le \rho^2\nu^{m-1}s^{m+2-2\tau}\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{3} b_i(x,(u-\psi)e^i)\right\}(\tilde u_s-\psi)\,dx + c_{31}r^m k^{-1}.$$

Отсюда, учитывая (22) и (53), выводим

$$\varlimsup_{s\to\infty}\left\{J_s^{(2)} - \kappa\rho^2\nu^{m-1}\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{3} b_i(x,(u-\psi)e^i)\right\}(\tilde u_s-\psi)\,dx\right\} \le c_{31}r^m k^{-1}. \quad (73)$$

Теперь, используя (58) – (62), (65), (66), (68) – (70), (73), (42), первое из неравенств (54) и равенство $F_u\psi = 0$, устанавливаем

$$\varlimsup_{s\to\infty}\|u_s-h_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_{32}r[k^{-1/m}+t^2\delta^{1/m}+C(w,\tilde\psi)\delta^{(m-1)/m^2}]^{1/m^2}, \quad (74)$$

$$\varlimsup_{j\to\infty}\|u_{s_j}-h_{s_j}\|_{W^{1,m}(\Omega_{s_j})} \le c_{32}rk^{-1/(mm_2)}. \quad (75)$$

Положим $m'' = m_1(mm'm_2)^{-1}$. Используя (10), (42), первое из неравенств (54), (75) и лемму 6, получаем

$$\varlimsup_{j\to\infty}|\langle A_{s_j}u_{s_j} - A_{s_j}h_{s_j}, (1-\chi_{s_j})q_{s_j}v\rangle| \le c_{33}(r+r_1)^m k^{-m''}. \quad (76)$$

Далее, для любого $s\in\mathbb{N}$ положим

$$\mathfrak{D}_s^{(1)} = \int_{\Omega_s^{(1)}}\left\{\sum_{i=1}^{3} a_i(x,\nabla h_s)\partial_i v + a(x,h_s)v\right\}dx,$$

$$\mathfrak{D}_s^{(2)} = \int_{H_s}\left\{\sum_{i=1}^{3} a_i(x,\nabla h_s)\partial_i\chi_s\right\}v\,dx,$$

$$\mathfrak{D}_s^{(3)} = \int_{H_s}\left\{\sum_{i=1}^{3} a_i(x,\nabla h_s)\partial_i v + a(x,h_s)v\right\}(1-\chi_s)\,dx.$$

Тогда для любого $s\in\mathbb{N}$

$$\left|\langle\hat A u, v\rangle + \alpha^3\int_\Omega a(x,\psi)v\,dx - (1-\beta^3+\alpha^3)\int_\Omega fv\,dx\right| \le$$

$$\le |\mathfrak{D}_s^{(1)} - \langle\hat A u, v\rangle| + \left|\mathfrak{D}_s^{(2)} + \alpha^3\int_\Omega[a(x,\psi)-f]v\,dx\right| +$$

$$+ |\mathfrak{D}_s^{(3)}| + |\langle A_s u_s - A_s h_s, (1-\chi_s) q_s v\rangle| +$$

$$+ \left| \langle f_s, (1-\chi_s) q_s v\rangle - (1-\beta^3) \int_\Omega f v dx \right|. \tag{77}$$

Используя (1), (4), (5), (7), (8), (16), (18), (45) – (47), (49), (50), лемму 2, свойства функций φ_y и выбор t, устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |\mathfrak{D}_s^{(1)} - \langle \hat{A}u, v\rangle| \le c_{34} r_1 r^{m-1} k^{-m''}. \tag{78}$$

С помощью (3) – (5), (20), (22), (44) – (49), (51), первого из неравенств (54), (71), (72), леммы 6 и равенства $F_u \psi = 0$ находим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \left| \mathfrak{D}_s^{(2)} + \alpha^3 \int_\Omega [a(x, \psi) - f] v dx \right| \le c_{35} (r + r_1)^m k^{-1}. \tag{79}$$

Наконец, в силу (3) и первого из равенств (54) имеем

$$\lim_{s\to\infty} \mathfrak{D}_s^{(3)} = 0. \tag{80}$$

Теперь из (1), (3), (76) – (80) выводим

$$\left| \langle \hat{A}u, v\rangle + \alpha^3 \int_\Omega a(x, \psi) v dx - (1 - \beta^3 + \alpha^3) \int_\Omega f v dx \right| \le c_{36} (r + r_1)^m k^{-m''}.$$

Отсюда в силу произвольности k получаем равенство (29).

Итак, для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$ справедливо равенство (29). Покажем теперь, что $\delta = 0$. Предположим, что $\delta \ne 0$. Тогда найдутся возрастающая последовательность $\{s_j'\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_{s_j'}^{(1)}} |u_{s_j'} - q_{s_j'} u'|^m dx = 0 \quad \text{и} \quad u' \ne u.$$

Взяв $\psi' \in L^m(\Omega)$ такую, что $F_{u'} \psi' = 0$, аналогично изложенному выше получаем, что для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A}u', v\rangle + \alpha^3 \int_\Omega a(x, \psi') v dx = (1 - \beta^3 + \alpha^3) \int_\Omega f v dx. \tag{81}$$

Из (29) и (81), полагая $v = u - u'$, выводим равенство

$$\langle \hat{A}u - \hat{A}u', u - u'\rangle + \alpha^3 \int_\Omega [a(x, \psi) - a(x, \psi')](u - u') dx = 0.$$

Отсюда и из (19), учитывая, что $u' \ne u$, получаем

$$\int_\Omega [a(x, \psi) - a(x, \psi')](u - u') dx < 0.$$

Но это противоречит (24). Полученное противоречие доказывает, что $\delta = 0$. Тогда верно первое из равенств (28) и, кроме того, в силу (74)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \| u_s - h_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_{32} r k^{-1/(m m_2)}.$$

Из этого неравенства, учитывая определение функций h_s, получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega_s^{(2)}} |\nabla u_s|^m dx \le c_{37} r^m k^{-1/m_2}, \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s\psi|^m dx \le c_{38} r^m k^{-1/m_2}.$$

Отсюда, учитывая произвольность k, выводим второе из равенств (27) и второе из равенств (28). Теорема доказана.

2. Усреднение задач Неймана в областях с двойными накопителями. Пусть Q, $Q_t(y)$ $(y \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{N})$, Ω и Z_s $(s \in \mathbb{N})$ — те же множества, что и в п. 1. Пусть $0 < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha < \beta < 1$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \Omega \setminus \bigcup_{z\in Z_s} (z + \beta s^{-1}\overline{Q}), \quad \Omega_s^{(2)} = \bigcup_{z\in Z_s} (z + \alpha_0 s^{-1} Q),$$

$$\Omega_s^{(0)} = \bigcup_{z\in Z_s} \left\{(z + \alpha s^{-1} Q) \setminus (z + \beta_0 s^{-1}\overline{Q})\right\}.$$

Пусть еще $\tau > 1$, $0 < \rho_0 < \alpha_0$, $0 < \rho < \alpha$. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$\Lambda_s^i = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2},\ \forall j \ne i\ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau}\right\},$$

$$\mathrm{M}_s^i = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha_0}{2} \le x_i \le \frac{\beta_0}{2},\ \forall j \ne i\ |x_j| < \frac{\rho_0}{2} s^{1-\tau}\right\}.$$

Наконец, для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad \mathrm{M}_s = \mathrm{M}_s^1 \cup \mathrm{M}_s^2 \cup \mathrm{M}_s^3,$$

$$H_s = \bigcup_{z\in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s), \quad H_s^{(0)} = \bigcup_{z\in Z_s} (z + s^{-1}\mathrm{M}_s), \tag{82}$$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(0)} \cup H_s^{(0)} \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Легко убедиться в том, что $\operatorname{mes} H_s \to 0$, $\operatorname{mes} H_s^{(0)} \to 0$ при $s \to \infty$ и для любой функции $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(i)}} \varphi dx = \Delta_i \int_{\Omega} \varphi dx, \quad i = 0, 1, 2, \tag{83}$$

где $\Delta_0 = \alpha^3 - \beta_0^3$, $\Delta_1 = 1 - \beta^3$, $\Delta_2 = \alpha_0^3$.

Далее, пусть m, m', m_1, m_2, c, μ, a_i $(i = 1, 2, 3)$, a, f — числа и функции из первой части статьи и пусть операторы $A_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $\hat{A} : W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ и функционалы $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ определяются по тем же формулам, что и в пп. 1.2, 1.3; для любых $u \in L^m(\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$ $q_s u$ — сужение функции u на Ω_s. Будем предполагать, что выполняется условие $\mathcal{H}$ и числа τ, m связаны соотношением

$$\tau - \frac{m}{2} = 1. \tag{84}$$

Положим $\nu_0 = 2(\beta_0 - \alpha_0)^{-1}$, $\nu = 2(\beta - \alpha)^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{H_s \cup H_s^{(0)}} |u_s|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(0)} \cup \Omega_s^{(2)}} |\nabla u_s|^m dx = 0$$

и существуют функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\varphi, \psi \in L^m(\Omega)$ *такие, что*

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^m dx = 0,$$

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(0)}} |u_s - q_s \varphi|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s \psi|^m dx = 0,$$

для почти всех $x \in \Omega$

$$-\rho_0^2 \nu_0^{m-1} \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (\varphi(x) - \psi(x))e^i) + \alpha_0^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)] = 0, \tag{85}$$

$$-\rho^2 \nu^{m-1} \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u(x) - \varphi(x))e^i) + \alpha_0^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)] +$$
$$+ (\alpha^3 - \beta_0^3)[a(x, \varphi(x)) - f(x)] = 0, \tag{86}$$

для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A} u, v \rangle + \int\limits_{\Omega} \{ \alpha_0^3 a(x, \psi) + (\alpha^3 - \beta_0^3) a(x, \varphi) \} v \, dx =$$
$$= (1 - \beta^3 + \alpha^3 - \beta_0^3 + \alpha_0^3) \int\limits_{\Omega} f v \, dx.$$

Доказательство теоремы проводится с использованием вспомогательных предложений из п. 1.4 по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Далее укажем лишь функции h_s, для которых при доказательстве теоремы 2 аналогично изложенному в доказательстве теоремы 1 устанавливаются оценки типа (74), (75). Это функции, определяемые формулой

$$h_s = (1 - \chi_s) q_s (w + w_s) + \sum_{z \in Z_s} \left[(1 - \chi_{s,z}^{(0)}) \tilde{\varphi}(z) + \chi_{s,z}^{(0)} \tilde{\psi}(z) \right] \chi_{s,z}.$$

Здесь $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi} \in C(\overline{\Omega})$ — функции, „близкие" соответственно к u в $W^{1,m}(\Omega)$ и φ, ψ в $L^m(\Omega)$ (u — предел $\{u_{s_j}\}$ в смысле (43), (φ, ψ) — решение системы (85), (86)), w_s определяется по w так же, как и в п. 1.5, для $z \in Z_s$ $\chi_{s,z}$ — функция на Ω_s такая, что $\chi_{s,z}(x) = 1$ при $x \in \Omega_s \cap (z + \alpha s^{-1} Q)$, $\chi_{s,z}(x) = 0$ при $x \in \Omega_s \setminus (z + \beta s^{-1} \overline{Q})$, $\chi_{s,z}(x) = -\nu s(x_i - z_i - \beta/(2s))$ при $x \in z + s^{-1} \Lambda_s^i$, $i = 1, 2, 3$; $\chi_s = \sum_{z \in Z_s} \chi_{s,z}$; для $z \in Z_s$ $\chi_{s,z}^{(0)}$ — функция на Ω_s такая, что $\chi_{s,z}^{(0)}(x) = 1$ при $x \in z + \alpha_0 s^{-1} Q$, $\chi_{s,z}^{(0)}(x) = 0$ при $x \in \Omega_s \setminus (z + \beta_0 s^{-1} \overline{Q})$, $\chi_{s,z}^{(0)}(x) = -\nu_0 s(x_i - z_i - \beta_0/(2s))$ при $x \in z + s^{-1} \mathrm{M}_s^i$, $i = 1, 2, 3$.

В заключение покажем, что области Ω_s являются областями со сложными накопителями. Пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $z \in Z_s$ $E_{s,z} = \Omega_s \cap (z + \alpha s^{-1} Q)$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $E_s = \bigcup_{z \in Z_s} E_{s,z}$. В силу (82) $\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup E_s$. Множества $E_{s,z}$ являются сложными m-накопителями. Действительно, пусть для любых

$s \in \mathbb{N}$ и $z \in Z_s$ $B_{s,z}$ — шар минимального радиуса, содержащий $E_{s,z}$. Предположим, что существует семейство линейных непрерывных операторов продолжения $p_{s,z}: W^{1,m}(E_{s,z}) \to W^{1,m}(B_{s,z})$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{s,z} \| p_{s,z} \| < \infty. \tag{87}$$

Положим для любых $s \in \mathbb{N}$ и $z \in Z_s$ $v_{s,z} = p_{s,z} \chi_{s,z}^{(0)}$ и определим на Ω последовательность функций v_s, полагая $v_s(x) = v_{s,z}(x)$ при $x \in z + \alpha s^{-1} Q$, $v_s(x) = 0$ при $x \in Q_s(z) \setminus (z + \alpha s^{-1} Q)$ $(z \in Z_s)$. Заметим, что в силу (84) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $z \in Z_s$

$$\| \chi_{s,z}^{(0)} \|_{W^{1,m}(E_{s,z})}^m \le (1 + 3 \nu_0^{m-1}) s^{-3}.$$

Отсюда и из (87) вытекает, что последовательность $\{v_s\}$ ограничена в $W^{1,m}(\Omega)$ и, следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $v_{s_j} \to v$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Тогда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s = 0$ на $\Omega_s^{(0)}$ и $v_s = 1$ на $\Omega_s^{(2)}$, получаем

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\Omega_{s_j}^{(0)}} |v|^m dx = 0, \quad \lim_{j \to \infty} \int_{\Omega_{s_j}^{(2)}} |v - 1|^m dx = 0.$$

Из этих равенств и (83) выводим, что $v = 0$ почти всюду на Ω и $v = 1$ почти всюду на Ω. Полученное противоречие доказывает, что предполагаемого семейства операторов продолжения не существует и, значит, пространства $W^{1,m}(E_{s,z})$ слабо связаны с пространствами $W^{1,m}(B_{s,z})$. Поэтому области $E_{s,z}$ в соответствии с терминологией, принятой во введении, являются сложными m-накопителями.

1. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604 – 621.
2. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабосвязанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 129 – 173.
3. *Хруслов Е. Я.* Усредненная модель нестационарной диффузии в трещиновато-пористых средах. – Харьков, 1988. – 34 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур; 50-88).
4. *Хруслов Е. Я.* Усредненные модели диффузии в трещиновато-пористых средах // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 2. – С. 332 – 335.
5. *Берлянд Л. В., Чудинович И. Ю.* Осреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // Там же. – 1983. – **272**, № 4. – С. 777 – 780.
6. *Ковалевский А. А.* Вторая краевая задача для вариационных эллиптических уравнений в областях сложной структуры. – Киев, 1984. – С. 3 – 22. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84. 40).
7. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. – Донецк, 1990. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90. 01).
8. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур; 53-88).
9. *Ковалевский А. А.* G-сходимость абстрактных операторов, определенных на слабо связанных пространствах // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 27 – 30.
10. *Панкратов Л. С.* Асимптотическое поведение решений вариационных задач в областях с „накопителями" // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – Вып. 54. – С. 97 – 105.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

Получено 21.03.94