УДК 517.9

А. М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЧАСТИЧНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A theorem on necessary and sufficient conditions for partial instability and, for nonlinear systems, a theorem on partial stabilization are proved. For systems, which are linear with respect to the control, sufficient conditions for controllability are obtained. For an angular motion of a rigid body, the problem of control and stabilization by using a rotor is considered.

Доведені теорема про необхідні та достатні умови часткової нестійкості і теорема про часткову стабілізованість нелінійних динамічних систем. Для систем, лінійних по керуванню, одержані достатні умови керованості. Розглянуто також задачу про керування і стабілізацію кутового руху твердого тіла за допомогою роторів.

Задачи устойчивости и управления по части переменных изучаются в различных постановках, основным отличием которых являются различные требования на начальное и конечное состояние системы. В частности, если начальное состояние является произвольным, а конечное принадлежит некоторому выделенному множеству, то устойчивость и управляемость по части переменных принято называть частичной; если как конечное, так и начальное состояние принадлежат заданному множеству, то говорят об условной устойчивости и управляемости. Эта терминология сохраняется и в задаче стабилизации. В настоящей работе изучаются свойства частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости, которые использованы для установления связи между частичной управляемостью и частичной стабилизируемостью нелинейных динамических систем. Полученные результаты применены к исследованию вопроса о стабилизации вращательного движения твердого тела с помощью роторов.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D \subset R^n, \quad u \in U \subset R^m, \quad t \in T = [0, \infty), \tag{1}$$

где x — фазовый вектор, u — вектор управления, являющийся ограниченной измеримой функцией времени t. В качестве областей D, U рассматриваются некоторые окрестности начала координат. Функцию f считаем достаточное число раз непрерывно дифференцируемой и такой, что $f(0, 0) = 0$.

Разобьем фазовый вектор на два вектора $x^{\mathrm{T}} = (x_\alpha^{\mathrm{T}}, x_\beta^{\mathrm{T}})$, $(x_\alpha \in D_\alpha \subset R^\alpha$, $x_\beta \in D_\beta \subset R^\beta)$ и для системы (1) введем следующие определения.

Определение 1. *Система* (1) *локально частично управляема по переменной* x_α, *если существуют окрестности* $G \subset D$, $G_\alpha \subset D_\alpha$ *такие, что при любых* $x_0 \in G$, $x_{\alpha 1} \in G_\alpha$ *существуют момент* $t_1 \in T$ *и допустимое управление* $u(t)$ *такое, что соответствующее ему решение* $x(t)$ *системы* (1) *удовлетворяет условиям* $x(0) = x_0$, $x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}$, $x(t) \in D$ *при* $0 \le t \le t_1$.

Определение 2. *Система* (1) *локально условно управляема по переменной* x_α, *если существуют окрестность* $G_\alpha \subset D_\alpha$ *такая, что при любых* $x_{\alpha 0}$, $x_{\alpha 1} \in G_\alpha$ *существуют момент* $t_1 \in T$ *и допустимое управление* $u(t)$ *такое, что соответствующее ему решение системы* (1) *удовлетворяет условиям* $x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}$, $x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}$, $x(t) \in D$ *при* $0 \le t \le t_1$.

Когда управление найдено, система (1) переходит в систему

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{2}$$

определенную для $\|x\| < h_0$, $t \in T$. Предположим, что система (2) допускает нулевое решение $x = 0$. Это означает, что $f(0, t) \equiv 0$. Решение задачи Коши

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1995, т. 47, № 2

для системы (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ обозначим через $x(t, x_0, t_0)$.

Определение 3. *Нулевое решение системы* (2) *называется частично устойчивым по переменной* x_α, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $x_0: \|x_0\| < \delta$ *следует* $\|x_\alpha(t)\| < \varepsilon$ *для всех* $t \in T$. *Если, кроме того,* $\|x_\alpha(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$, *то нулевое решение называется частично асимптотически устойчивым по переменной* x_α.

Задача частичной стабилизации ставится как задача нахождения управления $u = u(x(t))$, обеспечивающего частичную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы $\dot{x} = f(x, u(x))$. Если такое управление существует, то система (1) называется частично стабилизируемой (по переменной x_α). Относительно допустимых управлений предполагаем, что функции $u(x)$ непрерывно дифференцируемы и $u(0) = 0$. Отметим, что управление ищется в виде функции $u(x(t))$, а не в более общем виде $u(x(t), t)$, чтобы можно было использовать хорошо разработанный аппарат теории управления и устойчивости автономных систем.

2. Неустойчивость по части переменных. При исследовании методом ориентированных многообразий [1, 2] задачи стабилизации весьма эффективным оказывается использование теорем Ляпунова – Красовского [3, 4] о неустойчивости и Барбашина – Красовского [3, 5] об асимптотической устойчивости. Следуя работе [6], докажем теорему Ляпунова – Красовского для задачи неустойчивости по части переменных.

Теорема 1. *Для того чтобы нулевое решение системы* (2) *было частично неустойчиво по переменной* x_α, *необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(x_\alpha, t)$ *и* $W(x, t)$, *имеющие следующие свойства:*

1) *функция* $V(x_\alpha, t)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* $x_\alpha = 0$ *для всех* $t \in T$;

2) *в сколь угодно малой окрестности точки* $x = 0$ *существует по крайней мере одна точка* $\bar{x}$ *такая, что* $V(\bar{x}_\alpha, t_0) > 0$ *для некоторого* $t_0 \in T$;

3) *полная производная функции* $V(x_\alpha, t)$ *в силу системы* (2) *удовлетворяет соотношению*

$$dV/dt = \lambda V + W(x, t), \tag{3}$$

где $\lambda > 0$, $W(x, t)$ *— непрерывная положительно постоянная функция.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть нулевое решение системы (2) частично неустойчиво по переменной x_α. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что в любой δ-окрестности $\|x\| < \delta < h_0$ существуют точки x_0 такие, что траектория системы (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ покидает ε-цилиндр $\|x_\alpha\| \le \varepsilon$. На множестве $T \times \{x: \|x\| \le \delta_0 < \varepsilon\}$ определим функцию $\tau(x_0, t_0)$ как момент времени, в который траектория системы (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ попадает на поверхность цилиндра $\|x_\alpha\| \le \varepsilon$, т. е. $\|x_\alpha(\tau, x_0, t_0)\| = \varepsilon$. Если для всех $t \in T$ траектория остается внутри этого цилиндра, то полагаем $\tau(x_0, t_0) = \infty$. Введем в рассмотрение функцию $\tau_\alpha(x_{\alpha 0}, t_0) = \min\limits_{\|x_{\beta 0}\| \le \sigma_{x\alpha 0}} \tau(x_0, t_0)$, где $\delta_{x\alpha 0} = \sqrt{\delta_0^2 - x_{\alpha 0}^2}$. Точки x_0, для которых $\tau_\alpha < \infty$, назовем точками первого типа ($x_0 \in Q_1$), в случае $\tau_\alpha = \infty$ — точками второго типа ($x_0 \in Q_2$). Отметим, что вследствие принятого определения полные производные в силу системы (2) от функций $\tau(x, t)$, $\tau_\alpha(x_\alpha, t)$ равны нулю.

Рассмотрим функцию

$$V(x_\alpha, t) = \begin{cases} \exp\big(t - \tau_\alpha(x_\alpha, t)\big), & \text{если } x \in Q_1; \\ 0, & \text{если } x \in Q_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Покажем, что для этой функции выполнены все условия теоремы. Функция (4) ограничена: $V(x_\alpha, t) < 1$. В силу неустойчивости нулевого решения в любой окрестности нуля существует точка $\bar{x}$, для которой $\| x_\alpha(\tau, \bar{x}, t_0) \| = \varepsilon$. Тогда для этой точки $V(\bar{x}_\alpha, t_0) > 0$. Наконец, для полной производной функции V в силу системы (2) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} \exp\big(t - \tau_\alpha(x_\alpha, t)\big), & \text{если } x \in Q_1; \\ 0, & \text{если } x \in Q_2. \end{cases}$$

С учетом (4) последнее равенство записывается в виде $dV/dt = V$, т. е. функция (4) удовлетворяет и третьему условию с $\lambda = 1$, $W \equiv 0$, что и доказывает утверждение теоремы.

Достаточность. Доказательство проведем рассуждением от противного. Пусть вопреки утверждению нулевое решение устойчиво по переменной x_α. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x_0 : \| x_0 \| < \delta$ выполнено $\| x_\alpha(t, x_0, t_0) \| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$. Отсюда согласно свойству 1 следует, что функция $V(x_\alpha, t)$ ограничена. Воспользовавшись свойством 2, выберем точку x_0 так, чтобы $V(x_{\alpha 0}, t_0) = V_0 > 0$. Подставляя $x(t, x_0, t_0)$ в уравнение (3), получаем, что функция $V(x_\alpha(t, x_0, t_0), t)$ удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dV\big(x_\alpha(t, x_0, t_0), t\big)}{dt} = \lambda V\big(x_\alpha(t, x_0, t_0), t\big) + W\big(x(t, x_0, t_0), t\big)$$

с начальным условием $V\big(x_\alpha(t_0, x_0, t_0), t_0\big) = V_0 > 0$. Интегрируя это уравнение и переходя к неравенству, получаем $V\big(x_\alpha(t, x_0, t_0), t\big) \ge V_0 \exp \lambda (t - t_0)$, что противоречит ограниченности функции $V\big(x_\alpha(t, x_0, t_0), t\big)$ при $t \ge t_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Для автономной системы

$$\dot{x} = f(x) \qquad (5)$$

время $\tau(x_0, t_0) - t_0$ перехода точки из начального состояния в момент t_0 в некоторое конечное не зависит от начального момента, поскольку векторное поле зависит только от точки x. Поэтому для системы (5) функция (4) не зависит от времени t и в формулировке теоремы 1 функции V, W можно взять независимыми от t.

3. Условная управляемость. Критерий локальной условной управляемости по переменной x_α дает следующая теорема [7].

Теорема 2. *Система* (1) *локально условно управляема по переменной* x_α *тогда и только тогда, когда не существует знакопеременных функций* $V_i(x) = V_i(x_\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$, *являющихся решением системы уравнений в частных производных*

$$\big(f(x, u), \nabla V_i(x)\big) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda_{ij}(x, u) V_j(x) + G_i(x, u) \quad \forall u \in U,$$
$$i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1. \qquad (6)$$

Здесь $\lambda_{ij}(x, u)$ — *непрерывные,* $G_1(x, u)$ — *знакопостоянная функции,* $G_2(x, u) = \ldots = G_{\alpha-1}(x, u) = 0$ *в* $D \times U$.

Исследование системы (6) затруднено наличием в ней управляющего параметра u, который может принимать любые значения из U. Анализ можно упростить для систем, линейных по управлению

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \tag{7}$$

где вектор f и матрица g предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями переменной x и $f(0)=0$, $g(0)=0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Система* (7) *локально условно управляема по переменной* x_α *тогда и только тогда, когда не существует знакопеременных функций* $V_i(x) = V_i(x_\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha-1$, *являющихся решением системы уравнений в частных производных*

$$\begin{gathered}(f(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda_{ij1}(x) V_j(x) + G_i(x), \\ (g(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda_{ij2}(x) V_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha-1.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\lambda_{ij1}(x)$, λ_{ij2} *— непрерывные,* $G_1(x)$ *— знакопостоянная функции,* $G_2(x) = \ldots = G_{\alpha-1}(x) = 0$ *в области* D.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы, используя теорему 2, достаточно показать, что система (6) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система (8). Пусть сначала система (8) имеет решение при $\lambda^0_{ij1}(x)$, $\lambda^0_{ij2}(x)$, $G^0_1(x)$, тогда система (6), в которой $f(x,u)$ имеет вид (7), также имеет решение для непрерывных функций $\lambda_{ij}(x,u) = \lambda^0_{ij1}(x) + u\lambda^0_{ij2}(x)$ и знакопостоянной функции $G_1(x,u) = G^0_1(x)$. Предположим теперь, что система (6) имеет решение для непрерывных функций $\lambda^0_{ij}(x,u)$ и знакопостоянной функции $G_1(x,u)$, которые в силу линейности системы (7) можно считать также линейными по u: $\lambda^0_{ij}(x,u) = \lambda^0_{ij1}(x) + u\lambda^0_{ij2}(x)$, $G^0_1(x,u) = G^0_1(x)$. Функция G_1 не зависит от u, поскольку линейная зависимость от u приводит к ее знакопеременности.

Выбираем значения $u_1, \ldots, u_m \in U$ так, чтобы $\det(u_1, \ldots, u_m) \neq 0$. Подставляя эти значения, а также $u = 0$ в уравнение (6), будем иметь

$$(f(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda^0_{ij1}(x) V_j(x) + G^0_i(x),$$

$$(f(x), \nabla V_i(x)) + u_k(g(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} (\lambda^0_{ij1}(x) + u_k\lambda^0_{ij2}(x)) V_j(x) +$$

$$+ G^0_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha-1; \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Вычитая первое уравнение из m последующих, получаем систему уравнений

$$u_k(g(x), \nabla V_i(x)) = u_k \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda^0_{ij2}(x) V_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha-1; \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

которая эквивалентна системе

$$(g(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda^0_{ij2}(x) V_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, \alpha - 1.$$

Отсюда заключаем, что система (8) имеет решение для непрерывных функций $\lambda^0_{ij1}(x)$, $\lambda^0_{ij2}(x)$ и знакопостоянной функции $G_1(x)$. Теорема доказана.

4. Теорема о стабилизируемости. Исследование свойства частичной стабилизируемости основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Для каждого* $u \in U$ *система* (6) *не имеет решения* $V_i(x_\alpha)$, $i = 1, 2, \dots, \alpha - 1$, *выраженного знакопеременными функциями, тогда и только тогда, когда такого решения не существует для некоторого допустимого управления* $u(x)$.

Доказательство. *Достаточность* очевидна. *Необходимость* докажем рассуждением от противного. Пусть для всякого допустимого управления $u(x)$ можно указать непрерывные функции $\lambda^u_{ij}(x)$ и положительно постоянную функцию $G^u(x)$ такие, что знакопеременные функции $V_i = V_i^u(x_\alpha)$, $i = 1, 2, \dots, \alpha - 1$, являются решением системы

$$(f(x, u(x)), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \lambda^u_{ij}(x) V_j(x) + G^u_i(x),$$
$$G^u_1(x) = G^u(x), \quad G_2 = \dots = G_{\alpha-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha - 1. \tag{9}$$

Тогда для данного допустимого управления существует такое решение $V_1(x_\alpha), \dots, V_{\alpha-1}(x_\alpha)$ системы (9), что для всех x, u из достаточно малой окрестности $D_0 \times U$ точки $(0, 0)$ векторы $f(x, u)$ для $u \in U_0$ расположены либо в касательной плоскости, либо по одну сторону от касательной плоскости в точке $x \in D_0$ к поверхности, заданной равенствами $V_1(x_\alpha) = 0, \dots, V_{\alpha-1}(x_\alpha) = 0$. Если бы такой поверхности не существовало, то в силу непрерывной дифференцируемости векторного поля $f(x, u)$ можно было бы выбрать непрерывно дифференцируемую функцию $u_n(x)$ таким образом, чтобы для $u_n(x)$ не существовало поверхности такой, что векторы $f(x, u_n(x))$ лежали бы либо в касательном к ней пространстве, либо по одну сторону от него, т. е. уравнения (9) не имели бы для данного $u_n(x)$ решения. Указанные функции $V_1(x_\alpha), \dots, V_{\alpha-1}(x_\alpha)$ являются решением системы (6), определенным в некоторой окрестности $D_0 \times U_0$, что противоречит условию и доказывает лемму.

Используем теоремы 1, 2 и лемму 1 для доказательства теоремы о связи свойств условной управляемости и частичной стабилизируемости.

Теорема 4. *Если система* (1) *условно управляема, то она частично стабилизируема неасимптотически. Если, кроме того, известно, что решения системы* (1) *для допустимых управлений ограничены, то система* (1) *частично стабилизируема.*

Доказательство. Согласно теореме 2 в силу условной управляемости система уравнений (6) для любых непрерывных $\lambda_{ij}(x, u)$ и знакопостоянных $G_i(x, u)$ функций не имеет решения, выраженного знакопеременными функциями $V_1(x_\alpha), \dots, V_{\alpha-1}(x_\alpha)$ $\forall\, u \in U$. Тогда по лемме 1 существует управление $u = u(x)$ такое, что система уравнений (6) при $u = u(x)$ также не имеет решения. В частности, для $i = 1$ уравнение

$$(f(x, u(x)), \nabla V_1(x)) = \lambda(x, u(x)) V_1(x) + G(x, u(x))$$

не имеет решения $V_1(x_\alpha)$, выраженного знакопеременной функцией, для любой непрерывной $\lambda(x, u(x))$ и знакопостоянной $G(x, u(x))$ функций, в том числе и для функции $\lambda(x, u(x))$ такой, что $\lambda > 0$. Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение не является частично неустойчивым, т. е. оно частично устойчиво, и система (1) частично стабилизируема неасимптотически, что доказывает первую часть утверждения теоремы.

Переходя к доказательству второй части утверждения, отметим, что согласно теореме об обращении [8] существует x_α-определенно положительная функция $V(x)$, полная производная которой в силу системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{10}$$

является отрицательно постоянной. Траектории системы (10), принадлежащие множеству $V(x) > 0$, удовлетворяют уравнениям $V_1(x_\alpha) = 0, \ldots, V_{\alpha-1}(x_\alpha) = 0$, где функции $V_1(x_\alpha), \ldots, V_{\alpha-1}(x_\alpha)$ знакопеременны и удовлетворяют системе (6) при $u = u(x)$, $G_i = 0$. Выше установлено, что таких функций, а значит, и траекторий не существует. Если решения системы (10) ограничены, то для функции $V(x)$ выполнены условия теоремы Барбашина – Красовского, обобщенной на задачу устойчивости по части переменных [8], откуда заключаем, что система (1) частично стабилизируема. Теорема доказана.

5. Управление и стабилизация вращательного движения твердого тела. Движение относительно центра масс твердого тела с одним ротором описывается уравнениями [1, 6]

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + (e_2\omega_3 - e_3\omega_2)\xi - e_1 u \quad (123), \quad \dot{\xi} = u. \tag{11}$$

Здесь ω_i, e_i — проекции на главные оси вектора угловой скорости тела и единичного вектора кинетического момента ротора, ξ — величина кинетического момента ротора, A_i — главные центральные моменты инерции тела, u — момент сил, приложенных к ротору, который считаем управляющим параметром.

Уравнения (11) допускают интеграл

$$(A_1\omega_1 + \xi e_1)^2 + (A_2\omega_2 + \xi e_2)^2 + (A_3\omega_3 + \xi e_3)^2 = \text{const}, \tag{12}$$

наличие которого приводит к неуправляемости (по всем переменным) системы (11) в любой области. Для практики важно уметь переводить тело-носитель из одного вращательного движения в другое, для чего система (11) должна быть управляемой по угловой скорости $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Исследуем условную управляемость и частичную стабилизируемость системы (11) по переменным ω_1, ω_2, ω_3. Система (11) линейна по управлению, и на основании теоремы 3 условием ее управляемости по переменным ω_1, ω_2, ω_3 является отсутствие решений вида $V_1 = V_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $V_2 = V_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ у системы

$$\frac{e_1}{A_1}\frac{\partial V_i}{\partial \omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial V_i}{\partial \omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial V_i}{\partial \omega_3} - \frac{\partial V_i}{\partial \xi} = \lambda_{i1}V_1 + \lambda_{i2}V_2,$$

$$C_1\frac{\partial V_i}{\partial \omega_1} + C_2\frac{\partial V_i}{\partial \omega_2} + C_3\frac{\partial V_i}{\partial \omega_3} = \lambda_{2+i1}V_1 + \lambda_{2+i2}V_2 + \delta_{2+i3}G \tag{13}$$

$$(C_1 = A_1^{-1}[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + (e_2\omega_3 - e_3\omega_2)\xi] \ (123)), \quad i = 1, 2,$$

где λ_{ij} — непрерывные функции переменных ω_1, ω_2, ω_3, ξ, а G — знакопостоянная функция.

Изучим вопрос существования решений системы (13) отдельно для двух случаев: 1) $V_1 = V$, $V_2 \equiv 0$; 2) $V_1 \not\equiv 0$, $V_2 \not\equiv 0$. В первом случае уравнения (13) для $i = 2$ имеют решения при $\lambda_{21} = \lambda_{41} = 0$. Представляя функцию V в виде $V =$

$= (k, \omega) + \ldots \quad (k = (k_1, k_2, k_3) \neq 0)$ и подставляя в первое уравнение (13), видим, что она удовлетворяет уравнению для $\lambda_{11} = 0$ и значений k_i, подчиненных условию

$$(\kappa, k) = 0 \quad (\kappa = (e_1/A_1, e_2/A_2, e_3/A_3)). \tag{14}$$

Для исследования оставшегося уравнения функцию λ_{31} выберем в виде $\lambda_{31} = q_0\xi + (q, \omega) + \ldots \ (q = (q_1, q_2, q_3))$, где свободный член отсутствует, поскольку сразу приводит к знакопеременности G. После подстановки V, λ_{31} в это уравнение для функции G получаем выражение

$$G = k_1C + k_2C + k_3C - (q_0\xi + (q, \omega))(k, \omega) + \ldots . \tag{15}$$

Условия знакопостоянства квадратичной формы функции (15) приводят к равенству нулю главных миноров Δ_{14}, Δ_{24}, Δ_{34} матрицы коэффициентов, откуда получаем однородную систему линейных уравнений относительно k_i

$$A_2A_3q_0k_1 - A_3e_3k_2 + A_2e_2k_3 = 0 \quad (123).$$

Эта система имеет ненулевое решение $k_i = A_ie_i\beta$ ($\beta = \mathrm{const}$) лишь при $q_0 = 0$. Подставляя найденные значения k_i в равенство (14), приходим к равенству $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$, что противоречит условию нормировки $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. Таким образом, система (13) не имеет решений требуемого вида в первом случае.

Переходя к изучению второго случая, функции V_1, V_2 представим в виде $V_1 = (k, \omega) + \ldots$, $V_2 = (n, \omega) + \ldots$, причем векторы $k = (k_1, k_2, k_3)$ и $n = (n_1, n_2, n_3)$ ненулевые и неколлинеарные. Подставляя эти функции в первые два уравнения (13), убеждаемся, что они удовлетворяют уравнения при $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 0$ и значениях k_i, n_i, подчиненных условиям

$$(\kappa, k) = 0, \quad (\kappa, n) = 0. \tag{16}$$

Для исследования оставшихся двух уравнений (13) функции λ_{ij} выберем в виде $\lambda_{ij} = q_{ij0}\xi + (q_{ij}, \omega) + \ldots \ (q_{ij} = (q_{ij1}, q_{ij2}, q_{ij3}))$, где свободные члены отсутствуют, поскольку приводят либо к знакопеременности G, либо к нарушению условия пересечения поверхностей $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Для функции G получаем выражение

$$G = (k, C) - (q_{310}\xi + (q_{31}, \omega))(k, \omega) - (q_{320}\xi + (q_{32}, \omega))(n, \omega) + \ldots . \tag{17}$$

Из условия знакопостоянства функции (17) заключаем, что квадратичная форма функции G не зависит от ξ.

Для дальнейшего анализа используем условия совместности системы (13). Рассмотрим скобки Якоби первого, третьего и второго, четвертого уравнений

$$B_1\frac{\partial V_i}{\partial\omega_1} + B_2\frac{\partial V_i}{\partial\omega_2} + B_3\frac{\partial V_i}{\partial\omega_3} + D_{2+i1}V_1 + D_{2+i2}V_2 + \delta_{2+i3}H = 0,$$

$$B_1 = \frac{(A_3 - A_2)}{A_1A_2A_3}(e_2A_3\omega_3 + e_3A_2\omega_2 + e_2e_3\xi) \quad (123),$$

$$D_{2+ij} = \frac{e_1}{A_1}\frac{\partial\lambda_{2+ij}}{\partial\omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial\lambda_{2+ij}}{\partial\omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial\lambda_{2+ij}}{\partial\omega_3} - \frac{\partial\lambda_{2+ij}}{\partial\xi},$$

$$H = \frac{e_1}{A_1}\frac{\partial G}{\partial\omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial G}{\partial\omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial G}{\partial\omega_3} - \frac{\partial G}{\partial\xi}, \quad i, j = 1, 2.$$

Подставляя сюда выражения для V_1, V_2 и учитывая, что квадратичная форма функции G не зависит от ξ, приравниванием нулю коэффициента при ξ получаем два равенства

$$(\kappa_0, k) = 0, \quad (\kappa_0, n) = 0$$
$$(\kappa_0 = ((A_3 - A_2)e_2e_3, (A_1 - A_3)e_1e_3, (A_2 - A_1)e_2e_1)). \tag{18}$$

Рассматривая совместно равенства (16), (18), приходим к заключению, что для того, чтобы векторы k, n не были коллинеарными, необходимо, чтобы были коллинеарны векторы κ, κ_0. Равенство нулю их векторного произведения дает систему, имеющую решения

$$e_2 = e_3 = 0, \quad e_1 = 0 \quad (123). \tag{19}$$

Здесь не указано решение $A_1 = A_2$, $e_3 = 0$, поскольку оно является частным случаем решения (19) (поворотом вокруг третьей оси всегда можно добиться равенства $e_2 = 0$).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при условиях (19) система (13) имеет решения

$$V_1 = \omega_2, \quad V_2 = \omega_3,$$
$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{31} = \lambda_{42} = 0, \quad G = 0,$$
$$\lambda_{32} = -\frac{e_1}{A_2}\xi + \frac{A_3 - A_1}{A_2}\omega_1, \quad \lambda_{41} = \frac{e_1}{A_3}\xi + \frac{A_1 - A_2}{A_3}\omega_1.$$

Таким образом, при выполнении условий (19) система (11) условно неуправляема по переменным ω_1, ω_2, ω_3; если параметры e_i не удовлетворяют условиям (19), то для системы (11) выполнены условия локальной условной управляемости по переменным ω_1, ω_2, ω_3.

Переходя к рассмотрению вопроса о стабилизируемости системы (11), заключаем, что наличие интеграла (12) приводит к ее нестабилизируемости по всем переменным. Условная управляемость системы (11) по ω обеспечивает частичную неасимптотическую стабилизацию по ω, что ввиду наличия интеграла (12) влечет за собой ограниченность рассматриваемых решений системы (11). Поэтому на основании теоремы 4 система (11) является частично стабилизируемой, если ее параметры не удовлетворяют условиям (19). Случай, когда параметры удовлетворяют условиям (19), является критическим и требует дополнительного исследования.

1. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980.– 174 с.
2. *Ковалев А. М.* Ориентированные многообразия и управляемость динамических систем // Прикл. математика и механика. – 1991.– **55**, вып. 4.– С. 639–646.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.– 211 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч.: В 3-х т.–М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.–Т. 2.– 473 с.
5. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.– 240 с.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления – М.: Наука, 1975. – 496 с.
7. *Ковалев А. М.* Управляемость динамических систем по части переменных // Прикл. математика и механика. – 1993.– **57**, вып. 6.– С. 41–50.
8. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987.– 256 с.

Получено 21.03.94