УДК 519.21

И. И. Гихман, д-р физ.-мат. наук,
И. Е. Клычкова, асп. (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ВЛОЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

We construct a solution of the stochastic differential equation on the imbedded manifold.

Побудовано розв'язок стохастичного диференціального рівняння на вкладеному многовиді, коли об'ємним многовидом є евклідів простір.

Теория обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в линейных пространствах является хорошо разработанной областью теории случайных процессов. Менее разработанной областью общей теории случайных процессов, имеющей нетривиальные положения, является теория СДУ в нелинейных пространствах. Изучению СДУ на гладких многообразиях посвящены монографии [1, 2]. В настоящей работе рассмотрен вопрос о построении решения СДУ на гладком вложенном многообразии в случае, когда объемлющим многообразием является евклидово пространство. При этом используется евклидова метрика исходного пространства, что упрощает некоторые этапы доказательств.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $R_+=[0,+\infty)$, $R_+^{n+1}=R_+\times \times R^n$. Пусть многообразие $M\subset R_+^{n+1}$ задано системой уравнений

$$F_1(t,x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,F_{n-k}(t,x_1,\ldots,x_n)=0.$$

Предположим, что для произвольной точки $(s,y)\in M$ найдется шар радиуса $\delta>0$, который вырезает из многообразия M область ν_{sy}, задаваемую уравнениями

$$x_0=t,$$

$$x_{j_l}=x_{j_l},\quad l=1,2,\ldots,k;\quad j_l=1,2,\ldots,n;$$

$$x_{j_l}=f_{sy}^{(l)}(t,x_{j_1},\ldots,x_{j_k}),\quad l=k+1,\ldots,n;\quad j_l=1,2,\ldots,n.$$

Для этого достаточно, чтобы ранг матрицы $(\partial F_i/\partial x_{j_l})_{(s,y)}$, $i=1,2,\ldots,n-k$; $l=k+1,\ldots,n$, был равен $n-k$. В этом случае многообразие M имеет размерность $k+1$. В дальнейшем будем считать многообразие M гладким, подразумевая при этом, что все функции, с помощью которых это многообразие задано, имеют достаточную гладкость и не имеют особенностей. Последнее означает, что радиус $\delta>0$ и размерность многообразия могут быть выбраны не зависящими от точки $(s,y)\in M$. Для простоты обозначений локальные координаты в каждой координатной окрестности ν_{sy} будем обозначать через $x_l=x_{j_l}$, $l=0, 1,\ldots,k$. Поэтому в различных локальных картах многообразия одни и те же координаты $x_1,\ldots,x_k$ будут обозначать, вообще говоря, различные координаты исходного пространства. Определим локальное отображение $\varphi: R_+^{k+1}\to \to \nu_{sy}$, полагая

$$\varphi(t,x_1,\ldots,x_k)=$$

$$=(t,x_1,\ldots,x_k,f_{sy}^{(k+1)}(t,x_1,\ldots,x_k),\ldots,f_{sy}^{(n)}(t,x_1,\ldots,x_k)).\tag{1}$$

Очевидно, что отображение φ при фиксированном $t=x_0$ является гладким диффеоморфизмом.

Теорема. *Допустим, что выполнены условия:*

i) неслучайные функции $b(t, x)$, $c(t, x)$, определенные на M со значениями в R^n и $R^d \times R^n$ соответственно, при фиксированном x являются борелевскими функциями по переменной t, а при фиксированном t — непрерывно дифференцируемыми по аргументу x и

$$|\nabla b(t,x)| + |\nabla c(t,x)| \leq L, \quad L > 0, \quad (t,x) \in M;$$

ii) для произвольной точки $(s, y) \in M$ вектор $(s, b(s,y) + c(s,y)h)$, $h \in \in R^d$, лежит в касательном многообразии $T_{sy}M$ к многообразию M в точке (s, y);

iii) для произвольной точки $(s, y) \in M$ и $l = k+1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial x_i \partial x_j} (c_{im} \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) \, (c_{jm} \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) = 0.$$

Пусть $w(t)$, $t \in R_+$, — d-мерный винеровский процесс, заданный на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Тогда для произвольной точки $(s, y) \in M$ и $T < +\infty$ существует решение уравнения

$$\xi(t; s, y) = y + \int_s^t b(r, \xi(r))\,dr + \int_s^t c(r, \xi(r))\,dw(r). \tag{2}$$

При этом почти все траектории пространственно-временного процесса $(t; \xi(t; s, y))$, $t \in [s, T]$, принадлежат многообразию M.

Доказательство. Пусть $(s, y) \in M$ и (ν_{sy}, φ) — соответствующая ей локальная карта многообразия. С помощью гладкого отображения $\varphi = \varphi(t, x_1, \ldots, x_k)$, определяемого равенством (1), введем суперпозиции гладких отображений $B(\cdot) = b \circ \varphi(\cdot)$, $C(\cdot) = c \circ \varphi(\cdot)$, определяемые согласно правилу

$$B(t, x_1, \ldots, x_k) = b(\varphi(t, x_1, \ldots, x_k)),$$

$$C(t, x_1, \ldots, x_k) = c(\varphi(t, x_1, \ldots, x_k)),$$

определенные при $(t, x_1, \ldots, x_k) \in S_\delta(s, y)$, со значениями в R^n. Заметим, что функции $B(t, x)$, $C(t, x)$ удовлетворяют условию *i)* теоремы и в силу известных теорем о продолжении функций [3] могут быть продолжены с сохранением исходной гладкости на все пространство R^k при каждом фиксированном значении $t \in (s, s+\delta)$. Тогда существует единственное решение уравнения (2) с коэффициентом сноса $B(t, x)$ и матрицей диффузии $C(t, x)$, определенное на R_+. Для простоты обозначений это решение будем также обозначать через $\xi(t; s, x)$. Пусть $\tau = \tau_{sy}^\delta$ — момент первого достижения процессом $(t; \xi(t; s, x))$ внешности открытого шара $S_\delta(s, y)$. Если при некотором ω процесс не достигает указанной области, то по определению полагаем $\tau = t$. В силу единственности решения СДУ с коэффициентами $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ и совпадения коэффициентов в шаре $S_\delta(s, y)$ с коэффициентами $(b \circ \varphi)(\cdot)$, $(c \circ \varphi)(\cdot)$ имеем

$$\xi_i(t \wedge \tau; s, y) = y + \int_s^t \chi_{(\tau > r)}(b_i \circ \varphi)(r, \xi_1(r), \ldots, \xi_k(r))\,dr +$$

$$+ \sum_{m=1}^{d} \int_s^t \chi_{(\tau > r)}(c_{im} \circ \varphi)(r, \xi_1(r), \ldots, \xi_k(r))\,dw_m(r), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Заметим, что хотя в правой части (3) аргументом коэффициентов служит выражение, определенное в точках $\mathrm{v}_{sy} \subset M$, сам процесс $(t \wedge \tau; \xi(t \wedge \tau; s, y))$ должен рассматриваться как процесс в пространстве R_+^{n+1}.

Зафиксируем в пространстве R_+^{n+1} репер $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и пусть $(\mathrm{v}_{sy}, \varphi)$ — локальная карта многообразия M. Покажем, что вектор $N(s, y)$, заданный равенством

$$N(s, y) = \vec{e}_0 \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \vec{e}_i \sum_{l=k+1}^{k} \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_i} -$$

$$- \sum_{l=k+1}^{k} \vec{e}_l = \sum_{l=k+1}^{k} \left\{ \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial t} \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{k} \vec{e}_i \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_i} - \vec{e}_l \right\},$$

ортогонален к многообразию M в точке (s, y).

Вектор N из пространства R_+^{n+1} по определению ортогонален к многообразию M, если он ортогонален к линейному многообразию $T_{sy}M$. Очевидно, что вектор N ортогонален $T_{sy}M$ тогда и только тогда, когда он ортогонален к векторам $(\partial\varphi / \partial x_i) = \nabla_i \varphi$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, образующим базис в пространстве $T_{sy}M$. Имеем

$$\nabla_i \varphi(s, y_1, \ldots, y_k) = \vec{e}_i + \sum_{j=k+1}^{n} \vec{e}_j \nabla_j f_{sy}^{(j)}(s, y_1, \ldots, y_k).$$

В силу того, что $(\nabla_i \varphi, \nabla_j \varphi) \neq 0$, базис из $\nabla_i \varphi$ не ортогонален.

Умножая скалярно векторы $N(s, y)$ и $\nabla_i \varphi(s, y)$, замечаем, что их скалярное произведение $(N(s, y), \nabla_i \varphi) = 0$, что и требовалось доказать. В силу ортогональности вектора $N(s, y)$ векторным полям $\nabla_i \varphi$ с учетом условия *ii)* можно записать

$$\sum_{l=k+1}^{n} \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \left[(b_i \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{d} (c_{im} \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) h_m \right] \sum_{l=k+1}^{k} \frac{\partial f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_i} =$$

$$= \sum_{l=k+1}^{n} \left[(b_l \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) + \sum_{m=1}^{d} (c_{lm} \circ \varphi)(s, y_1, \ldots, y_k) h_m \right]. \tag{4}$$

Покажем, что в действительности процесс $(t \wedge \tau, \xi(t \wedge \tau, s, y))$, $t \in R_+$, с вероятностью 1 принадлежит области $\mathrm{v}_{sy} \subset M$. Для этого достаточно показать, что для любого $l = k+1, \ldots, n$

$$\xi_l(t \wedge \tau; s, y) = f_{sy}^{(l)}(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau, s, y), \ldots, \xi_k(t \wedge \tau, s, y)).$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$f_{sy}^{(l)}(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau, s, y), \ldots, \xi_k(t \wedge \tau, s, y)) = f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k) +$$

$$+ \int_s^t \chi_{(\tau > r)} \left[\nabla_0 f_{sy}^{(l)}(Q) + \sum_{i=1}^{k} \nabla_i f_{sy}^{(l)}(Q)(b_i \circ \varphi)(Q) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{k} \nabla_{ij}^2 f_{sy}^{(l)}(Q)(c_{im} \circ \varphi)(Q)(c_{jm} \circ \varphi)(Q) \right]_{Q = (r, \xi_1(r), \ldots, \xi_k(r))} dr +$$

$$+\int_s^t \chi_{(\tau>r)} \sum_{m=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \nabla_i f_{sy}^{(l)}(Q)(c_{im} \circ \varphi)(Q)_{Q=(r,\xi_1(r),\ldots,\xi_k(r))}\, dw_m(r).$$

Здесь $\nabla_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Не уменьшая общности, для любой точки $(t, x) \in \nu_{sy}$ можно считать, что $f_{sy}^{(l)}(t, x_1, \ldots, x_k) = f_{tx}^{(l)}(t, x_1, \ldots, x_k)$, где координатные отображения $f_{tx}^{(l)}(Q)$ определены в некоторой окрестности точки (t, x), содержащейся в ν_{sy}. Учитывая условие теоремы *iii)* и формулу (4), имеем

$$f_{sy}^{(l)}(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau), \ldots, \xi_k(t \wedge \tau)) = y_l +$$

$$+\int_s^t \chi_{(\tau>r)}[\nabla_0 f_{sy}^{(l)}(Q) + \sum_{i=1}^{k} \nabla_i f_{sy}^{(l)}(Q)(b_i \circ \varphi)(Q)]_{Q=(r,\xi_1(r),\ldots,\xi_k(r))}\, dr +$$

$$+\int_s^t \chi_{(\tau>r)} \sum_{m=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \nabla_i f_{sy}^{(l)}(Q)(c_{im} \circ \varphi)(Q)_{Q=(r,\xi_1(r),\ldots,\xi_k(r))}\, dw_m(r) =$$

$$= y_l + \int_s^t \chi_{(\tau>r)}(c_{im} \circ \varphi)(r; \xi_1(r), \ldots, \xi_k(r))\, dw_m(r) = \xi_1(t \wedge \tau),$$

$$l = k+1, \ldots, n.$$

Здесь учтено, что при любом l $y_l = f_{sy}^{(l)}(s, y_1, \ldots, y_k)$. Предыдущая формула показывает, что при любом $t \in [s, +\infty)$ координаты остановленного процесса $(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau), \ldots, \xi_n(t \wedge \tau))$ связаны соотношением (1). Это доказывает, что процесс $(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau), \ldots, \xi_n(t \wedge \tau)) \in M$.

Для продолжения локального решения заметим сначала, что на множестве $\Omega^{(1)} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \wedge t = t\} \in \mathfrak{F}_t$ процесс $\xi(t, s, x)$ построен. Для простоты будем предполагать, что поток σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$ построен по приращениям процесса $\omega(t)$ и потому непрерывен. Пусть $\omega \in \Omega \setminus \Omega^{(1)}$. Тогда для каждого ω существует набор взаимно различных индексов $I_n^{(k)}(\omega) = \{i_1(\omega), \ldots, i_k(\omega)\}$, принимающих значения из множества $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых часть многообразия $\nu_{t \wedge \tau \xi(t \wedge \tau)} \subset M$, вырезаемая шаром $S_\delta(t \wedge \tau, \xi(t \wedge \tau))$, задается уравнениями

$$x_0 = t,$$

$$x_i = x_{j_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$x_l = f_{t \wedge \tau, \xi(t \wedge \tau)}^{(l)}(t, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \quad l \in I_n \setminus I_n^{(k)}(\omega).$$

Поскольку локальные координаты в окрестности любой точки $(s, y) \in M$ могут быть выбраны не единственным образом, при фиксированном ω набор индексов $\mathcal{J}(\omega)$ может принимать только конечное число различных значений. При этом для любого допустимого набора индексов $Q = (q_1, \ldots, q_k)$

$$\{\omega : Q \in \mathcal{J}(\omega)\} = \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \left\{ \omega: \det \left\| \frac{\partial F_i(t \wedge \tau, \xi_1(t \wedge \tau), \ldots, \xi_n(t \wedge \tau))}{\partial x_{q_l}} \right\| \right\} \neq 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-k; \quad l = k+1, \ldots, n.$$

Так как функция $\det \| \partial F_i(t, x)/\partial x_{q_l} \|$ непрерывна по (t, x), правая часть этого равенства $\mathfrak{F}_{t\wedge\tau}$-измерима. Очевидно, что $\mathfrak{F}_{t\wedge\tau}$-измеримы будут также конечные объединения $\bigcup_Q \{\omega: Q \in \mathcal{J}(\omega)\}$. Для продолжения процедуры „склейки" решения необходимо построить решение уравнения в δ-окрестности произвольной точки (s_1, y_1), принадлежащей границе $\partial\nu_{sy}$, а затем обосновать подстановку $(s_1, y_1) = (t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau))$ в качестве начальных данных в обе части уравнения (2). Рассмотрим это подробнее.

При фиксированном τ процесс $(t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau, s, y))$, $t\in[s, +\infty)$, непрерывен с вероятностью 1. Пусть E — произвольное открытое подмножество в $[s_1, +\infty)$, а G — произвольное замкнутое подмножество $\partial\nu_{s_1y_1}$. В силу непрерывности вероятность попадания процесса $(t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau))$ во множество G, когда $t\in E$, совпадает с вероятностью попадания его в это же множество, когда $t\subset\Lambda\bigcap E$, где Λ — произвольное всюду плотное множество из $[s, +\infty)$. Выберем конечное множество точек $(s, y)_q$ так, чтобы их λ-окрестности E_q^λ, $q = 1, 2, \ldots, N$, образовывали покрытие множества $\partial\nu_{sy}$, и построим последовательность простых функций

$$G_\lambda = \sum_{q=1}^{N}\left(s_q, y_q\right)\chi_{E_q^\lambda}\left(t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau, s, y)\right),$$

принимающих значения в $\partial\nu_{sy}$. Нетрудно видеть, что для любой непрерывной и ограниченной функции $g(t, x)$ с вероятностью 1

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} g(G_\lambda) = g\left(t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau; s, y)\right).$$

Пусть $\hat{\xi}(t, s_q, y_q)$, $t\ge s_q$ — решение уравнения (2) с коэффициентами $B(t, x_1, \ldots, x_k)$, $C(t, x_1, \ldots, x_k)$, являющимися продолжением на все пространство R_+^{n+1} функций $(b\circ\varphi)(\cdot)$, $(c\circ\varphi)(\cdot)$, $\varphi = \varphi_{s_qy_q}$, определенных в области $\nu_{s_qy_q}$ и $\hat{\xi}(s_q, s_qy_q) = y_q$. С помощью стандартных методов СДУ убеждаемся в справедливости подстановки $(s_qy_q) = G_\lambda$ в обе части уравнения, которому удовлетворяет функция $\hat{\xi}(t, s_q, y_q)$. Затем, учитывая непрерывность рассматриваемых функций, с помощью теоремы Лебега в обычном интеграле и оценке моментов второго порядка в интеграле Ито убеждаемся в справедливости предельного перехода по вероятности в уравнении при $\lambda\downarrow 0$. Обозначим $\tau^{(1)} = \tau$, а $\tau^{(2)}$ — момент первого достижения процессом $(r, \xi(r; t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau; s, y)))$ внешности области $\nu_{t\wedge\tau\xi(t\wedge\tau)}$. Заметим, что в качестве параметра у момента $\tau^{(2)}$ служит точка $(t\wedge\tau, \xi(t\wedge\tau; s, y))$, поэтому сначала необходимо показать, что $\tau = \tau_{sy}$ является борелевской функцией от (s, y). Отсюда будет следовать, что $\tau^{(2)}$ является борелевской функцией от (s, y). Действительно, τ_{sy} может быть представлена как предел с вероятностью 1 случайных величин

$$\tau_{sy}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} t_i\chi_{M\setminus\nu_{sy}}\left(t_i; \xi(t_i; s, y)\right)\prod_{j=1}^{i-1}\chi_{\nu_{sy}}\left(t_j; \xi(t_j; s, y)\right)$$

и поэтому является поточечным пределом при почти всех ω борелевских функций от (s, y). Следовательно, с вероятностью 1 τ_{sy} — борелевская функция от (s, y).

Возможность остановки решения СДУ с помощью марковского момента хорошо известна и подробно описана в [4]. Таким образом, решение уравнения (2) построено на интервале времени $[t\wedge\tau^{(1)}, t\wedge\tau^{(2)}]$. С помощью индукции, аналогично предыдущему, решение может быть продолжено вплоть до момента $t \wedge \tau^N$ для любого целого N.

Покажем, что почти для всех $\omega \in \Omega$ и любого $t \geq s$ существует конечный номер $N = N(\omega)$, для которого $t \wedge \tau_N = t$. Предположим противное. Согласно определению положим $B = \{\omega : N(\omega) = +\infty\}$. Тогда $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\omega : t \wedge \wedge \tau_j < t\}$. Отсюда вытекает, что множество B — $\mathfrak{F}_t$-измеримо. Заметим, что при любом неслучайном m

$$\sum_{j=0}^{m-1} (t \wedge \tau_{j+1} - t \wedge \tau_j) \leq t - s.$$

Чтобы показать, что $P(B) = 0$, воспользуемся метрикой объемлющего евклидового пространства. Применяя оценку второго момента для стохастического интеграла с неупреждающими моментами остановки в качестве пределов интегрирования, получаем

$$\delta^2 m P(B) = M\chi_B(\omega) \sum_{i=0}^{m-1} |\xi(t \wedge \tau_{i+1}) - \xi(t \wedge \tau_i)|^2 \leq k_1(t - s),$$

где $k_1 > 0$, не зависит от m. В силу произвольности числа $m > 0$ это невозможно, если $P(B) > 0$. Таким образом, с помощью индукции с вероятностью 1 строится решение на любом интервале времени $[s, t]$.

Для доказательства единственности решения СДУ достаточно доказать локальную единственность. Пусть $\eta(t \wedge \hat{\tau}, s, y)$ — другое решение, определенное в δ-окрестности точки y, $\hat{\tau}$ — момент первого выхода процесса $(t, \eta(t; s, y))$ из V_{sy}, $\tau_* = \min(\tau, \hat{\tau})$. Тогда

$$M|\eta(t \wedge \tau_*; s, y) - \xi(t \wedge \tau_*; s, y)|^2 \leq$$

$$\leq kM \int_s^t |\eta(r \wedge \tau; s, y) - \xi(r \wedge \tau; s, y)|^2 dr,$$

где $k > 0$ — некоторая постоянная. С помощью леммы Гронуолла отсюда немедленно вытекает, что с вероятностью 1 $\eta(t \wedge \tau_*) = \xi(t \wedge \tau_*)$ при любом $t \geq s$.

Замечания. **1.** Условия теоремы могут быть интерпретированы и с другой точки зрения. Полагая заданными коэффициенты уравнения (2), условия *i)* и *ii)*, записанное в виде (4), определяют многообразие, которое является носителем распределения процесса $\xi(\cdot)$.

2. В работе [1] условие ограниченности типа *i)* отсутствует, поэтому решение существует локально вплоть до некоторого момента остановки.

1. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.–М.: Наука, 1986.– 445 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.–Киев: Выща шк., 1989.– 295 с.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.–М.: Наука, 1976.– 338 с.
4. *Дынкин Е. В.* Марковские процессы.–М.: Физматгиз, 1963.– 859 с.

Получено 21.03.94