УДК 517. 9

А. О. Игнатьев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЭКВИАСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

A definition of equiasymptotic stability of an integral set of a system of ordinary differential equations is given. A number of theorems are proved.

Сформульовано означення еквіасимптотичної стійкості інтегральної множини системи звичайних диференціальних рівнянь. Доведено ряд теорем.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

где $x, X \in R^n$; $t \in I = [0; \infty)$. Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений в области

$$(t, x) \in \Gamma_{H_1} = I \times B_{H_1}; \quad B_{H_1} = \{x \in R^n : \|x\| < H_1\}. \tag{2}$$

Введем ряд определений и обозначений аналогичных тем, которые использованы в работах [1 – 4].

Определение 1. *Множество M пространства t, x называется интегральным, если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ выполняется $(t, x(t)) \in M$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение уравнений* (1) *с начальными данными $x(t_0) = x_0$, а t принимает любые значения из промежутка существования решения $x(t)$.*

Отметим, что в приложениях часто встречаются системы, все особенности которых сосредоточены на асимптотически устойчивых интегральных множествах (примером таких систем служат диссипативные системы). Этим объясняется интерес к их исследованию [1, 5].

Пусть $M \subset I \times R^n$ — интегральное множество уравнений (1). Обозначим через M_s пересечение M с гиперплоскостью $t = s$, $\rho(x, M_s)$ — расстояние от точки x до множества M_s, $S(M_t, r) = \{x \in R^n : \rho(x, M_t) < r\}$.

Определение 2. *Интегральное множество M называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in I$ можно указать $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ выполняется неравенство $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \geq t_0$. M называется равномерно устойчивым, если δ зависит лишь от ε.*

Определение 3. *Интегральное множество M называется притягивающим, если для любого $t_0 \in I$ найдется $\eta = \eta(t_0)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ найдется $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 4. *Интегральное множество M называется эквипритягивающим, если для любого $t_0 \in I$ найдется $\eta = \eta(t_0)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(t, \varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ и $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 5. *Интегральное множество M называется равномерно притягивающим, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t_0 \in I$ и $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 6. *Интегральное множество M уравнений* (1) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее; эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и эквипритягивающее; равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Докажем ряд теорем, связывающих свойства интегральных множеств, определенных выше.

Теорема 1. *Если интегральное множество M системы* (1) *является эквипритягивающим, то оно устойчиво.*

Доказательство. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in I$. Из определения 4 следует, что найдутся $\eta = \eta(t_0) > 0$ и $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon) > 0$ такие, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ и $t \geq t_0 + \sigma$. Множество M является интегральным, следовательно, в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных существует такое положительное число $\xi = \xi(t_0, \varepsilon, \sigma)$, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t_0 < t < t_0 + \sigma$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \xi)$. Учитывая, что σ зависит лишь от t_0 и ε, можно сделать вывод, что $\xi = \xi(t_0, \varepsilon)$. Выбирая теперь $\delta = \min\{\xi, \eta\}$, убеждаемся в том, что при таком $\delta > 0$ все условия определения 2 выполнены, т. е. интегральное множество M устойчиво.

***Следствие* 1.** *Если интегральное множество M системы* (1) *является эквипритягивающим, то оно эквиасимптотически устойчиво.*

В дальнейшем через K будем обозначать класс функций Хана.

Теорема 2. *Пусть непрерывная функция $V(t, x)$ удовлетворяет условию*

$$V(t, x) \geq a(\rho(x, M_t)), \quad a \in K, \tag{3}$$

и при любом $t_0 \in I$ существует $\delta = \delta(t_0) > 0$ такое, что для любого $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ является монотонно невозрастающей и стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда интегральное множество M системы (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. В силу следствия 1 для доказательства эквиасимптотической устойчивости достаточно показать, что M — эквиасимптотически притягивающее множество. Возьмем произвольные $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$. Пусть $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta(t_0))$. Рассмотрим функцию $V(t, x(t, t_0, x_0))$. Она не возрастает и стремится к нулю. Следовательно, существует $T = T(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ такое, что $V(t, x(t, t_0, x_0)) < \varepsilon$ при $t \geq t_0 + T$. Из непрерывной зависимости решений уравнений (1) от начальных данных следует, что существует окрестность $Q(x_0)$ точки x_0 такая, что для любой точки y_0, принадлежащей этой окрестности, выполняется условие $V(t_0 + T, x(t_0 + T, t_0, y_0)) < \varepsilon$, а из монотонности функции V вытекает

$$V(t, x(t, t_0, y_0)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad y_0 \in Q(x_0), \quad t \geq t_0 + T(\varepsilon, t_0, x_0).$$

Множество $\{x \in R^n : \rho(x, M_{t_0}) \leq \delta(t_0)\}$ ограничено и замкнуто, следовательно, компактно. Оно покрыто семейством окрестностей $Q(x_0)$, из которого согласно теореме Гейне – Бореля можно выделить конечное подпокрытие $Q(x_0^{(1)})$, $Q(x_0^{(2)})$, … , $Q(x_0^{(k)})$. Выбирая $\eta = \delta(t_0)$, $\sigma(t_0, \varepsilon) = \max\limits_{1 \leq i \leq k} T(\varepsilon, t_0, x_0^{(i)})$, можно сделать вывод, что для любых $t_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$ существуют $\eta = \eta(t_0)$ и $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon)$ такие, что $V(t, x(t, t_0, x_0)) < \varepsilon$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ и $t \geq t_0 + \sigma$. Из неравенства (3) заключаем, что при таких x_0 и t справедливо соотношение

$a(\rho(x(t), M_t)) < \varepsilon$, т. е. интегральное множество M — эквипритягивающее, что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай, когда правые части дифференциальных уравнений (1) являются периодическими функциями времени, т. е. существует такое число $T > 0$, что

$$X(t, x) \equiv X(t + T, x). \tag{4}$$

Определение 7. *Интегральное множество M системы* (1) *назовем периодическим с периодом T (T-периодическим), если справедливо тождество $M_t \equiv M_{t+T}$.*

Теорема 3. *Пусть правые части дифференциальных уравнений* (1) *T-периодичны по времени t и удовлетворяют в области* (2) *условию Липшица по x. Тогда если T-периодическое интегральное множество M системы* (1) *является эквипритягивающим, то оно равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем вначале, что M является равномерно притягивающим. Выберем в качестве начального момента времени $t = 0$. Для него можно указать $\eta_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma_0 = \sigma_0(0, \varepsilon)$ такое, что $\rho(x(t, 0, x_0), M_t) < \varepsilon$ для всех $x_0 \in S(M_0, \eta_0)$ и $t \geq \sigma_0$. Обозначим через t_1 произвольный момент времени из интервала $[0; T)$, $y_1 \in M_{t_1}$, x_1 — произвольная точка из некоторой окрестности множества M_{t_1}. Справедлива оценка [6]

$$\| x(0, t_1, x_1) - x(0, t_1, y_1) \| \leq \| x_1 - y_1 \| \exp(LT),$$

где L — постоянная Липшица функции $X(t, x)$ в области (2). Если выбрать y_1 так, что $\| x_1 - y_1 \| < \eta_0 \exp(-LT) = \eta_1$, то будет выполнено неравенство $\| x(0, t_1, x_1) - x(0, t_1, y_1) \| < \eta_0$, т. е. существует $\eta_1 > 0$ такое, что для любых $t_1 \in [0; T)$ и $x_1 \in S(M_{t_1}, \eta_1)$ можно указать $\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_0(0, \varepsilon)$ такое, что $\rho(x(t, t_1, x_1), M_t) < \varepsilon$ для всех $t \geq \sigma_1$.

Возьмем теперь произвольный начальный момент времени $t_0 \in I$. В силу условия (4) существует такое целое число k, что $t_0 - kT \in [0; T)$ и выполняется соотношение

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - kT, t_0 - kT, x_0).$$

Из доказанного выше следует, что если $x(t_0 - kT) \in S(M_{t_0 - kT}, \eta_1)$, то $x(t - kT, t_0 - kT, x_0) \in S(M_{t-kT}, \varepsilon)$ при $t - kT > \sigma_1(\varepsilon)$. Отсюда в силу T-периодичности интегрального множества M вытекает, что $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon)$ при $t \geq t_0 + \sigma_1(\varepsilon)$. Этим доказано, что M является равномерно притягивающим.

Покажем, что M — равномерно устойчиво. Пусть $x(t, t_0, x_0)$ и $y(t, t_0, y_0)$ — траектории системы (1), причем $y_0 \in M_{t_0}$. Из равномерности притяжения множества M и определения 5 имеем, что для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для любых $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t_0 \in I$ и $t \geq t_0 + \sigma$. При $t \geq t_0$ справедлива оценка [6]

$$\| x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, y_0) \| \leq \| x_0 - y_0 \| \exp L(t - t_0).$$

Выбирая $y_0 \in M_{t_0}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\| x_0 - y_0 \| \leq \eta$, получаем, что при $t - t_0 \in [0; \sigma]$ справедливо соотношение $\| x(t, t_0, x_0) -$

$- y(t, t_0, y_0)\| \leq \eta \exp L\sigma$. Полагая $\delta(\varepsilon) = \min\{\eta, \varepsilon \exp(-L\sigma)\}$, убеждаемся, что если $\rho(x(t_0), M_{t_0}) < \delta(\varepsilon)$, то $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t > t_0$. Это и доказывает равномерную устойчивость интегрального множества M. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть правые части дифференциальных уравнений* (1) *таковы, что существует непрерывно-дифференцируемая функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая условиям:* $V(t, x) = 0$ *для любого* $x \in M_t$; $V(t, x) \geq \theta(t) a(\rho(x, M_t))$, *где* $a \in K$, $\theta(t)$ — *монотонно неубывающая непрерывная функция такая, что* $\theta(0) = 1$, $\lim\limits_{t \to \infty} \theta(t) = \infty$; $\dot{V}(t, x) \leq 0$. *Тогда интегральное множество* M *системы* (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. Обозначим через H такое положительное число, что $S(M_t, H) \subset B_{H_1}$ при $t \geq 0$. Покажем, что при любом t_0 существует такое $\delta = \delta(t_0)$, что $x(t) \in S(M_t, H)$ при любых $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$, $t \geq t_0$. Рассмотрим функцию $V(t_0, x)$. Она непрерывна и обращается в нуль на множестве M_{t_0}. Следовательно, существует такое число $\delta > 0$, что $V(t_0, x) < a(H)$ при $x \in S(M_{t_0}, \delta)$. Выбирая x_0 из множества $S(M_{t_0}, \delta)$, получаем неравенства

$$\theta(t) a(\rho(x(t), M_t)) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < a(H), \tag{5}$$

откуда в силу условия $\theta(t) \geq 1$ имеем $\rho(x(t), M_t) < H$ при $t > t_0$, что и доказывает устойчивость интегрального множества M. Покажем теперь, что M имеет свойство эквипритяжения. Пусть ε — произвольное положительное число $(\varepsilon < H)$. Из неравенств (5) имеем

$$a(\rho(x(t), M_t)) < \frac{a(H)}{\theta(t)}. \tag{6}$$

Так как $\theta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то можно указать такое $\sigma > 0$, что $\theta(t) > a(H)/a(\varepsilon)$ при $t > \sigma$. Отсюда и из неравенства (6) следует, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \geq t_0 + \sigma$. Теорема доказана. Этот результат обобщает результаты работ [5, 7] на случай устойчивости интегральных множеств.

Как и прежде, через H будем обозначать такое положительное число, что $S(M_t, H) \subset B_{H_1}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть дифференциальные уравнения* (1) *таковы, что в области* (2) *существует непрерывно-дифференцируемая функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\dot{V} \leq 0$;

2) $V(t, x) = 0$ *при* $x \in M_t$, $V(t, x) \geq a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$, *и для любого* $\xi > 0$ *из* $V(t, x) \geq \xi$ *следует*

$$\dot{V}(t, x) \leq -m_\xi(t), \tag{7}$$

причем

$$\int_0^\infty m_\xi(t)\, dt = +\infty. \tag{8}$$

Тогда интегральное множество M *системы* (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся методом работ [5, 8]. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что для любого $t_0 \in I$ существует такое положительное $\delta = \delta(t_0)$, что $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, H)$ при $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$, $t \geq t_0$. Покажем, что при $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ монотонно не возрастает и стремится к нулю при $t \to \to \infty$. Действительно, в силу первого из условий теоремы она не возрастает и стремится к неотрицательному пределу ξ. Предположим, что $\xi > 0$. Тогда при $t \geq t_0$ будет справедливо неравенство $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \xi > 0$, откуда на основании условия (7) получаем

$$0 < \xi \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} m_\xi(s)\, ds. \tag{9}$$

Неравенство (9) при достаточно больших значениях t противоречит условию (8), откуда можно сделать вывод, что $\xi = 0$. Используя теорему 2, заключаем, что интегральное множество M системы (1) эквиасимптотически устойчиво.

Следствие 2. *Если правые части уравнений* (1) *удовлетворяют в области* (2) *условию Липшица, интегральное множество M системы* (1) *является T-периодическим и справедливы тождества* (4), *то при выполнении условий теоремы* 5 *множество M равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство следует из теорем 3 и 5.

Теорема 6. *Пусть существуют функции $V(t, x)$ и $W(t, x)$, удовлетворяющие в области* (2) *следующим условиям:*

1) *для любого $t_0 \in I$ можно указать $\xi = \xi(t_0) > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in S(M_{t_0}, \xi)$ существует положительная константа $A = A(t_0, x_0)$ такая, что выполняется условие*

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq -A \quad \text{при} \quad t \geq t_0; \tag{10}$$

2) $\dot V(t, x) \leq -W(t, x)$, *причем* $W(t, x) \geq c(\rho(x, M_t))$; $c \in K$;

3) $\dot W(t, x) \leq 0$.

Тогда интегральное множество M дифференциальных уравнений (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся методом работ [5, 9]. Аналогично предыдущему можно показать, что для любого $t_0 \in I$ найдется положительное $\delta = \delta(t_0)$ такое, что $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, H)$ при $t \geq t_0$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$. Здесь H обозначает такое положительное число, что $S(M_t, H) \subset B_{H_1}$; кроме того, будем предполагать, что $\delta \leq \xi$. Покажем теперь, что функция $W(t, x(t, t_0, x_0))$ стремится к нулю при $t \to \infty$, монотонно не возрастая при $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$. Предположим противное. Тогда в силу второго и третьего условий теоремы имеем $W(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \alpha > 0$. Следовательно, $\dot V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq -\alpha$, откуда на основании условия (10) получаем

$$-A \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \alpha(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

что невозможно при достаточно больших значениях t. Полученное противоречие доказывает, что $W(t, x(t, t_0, x_0))$ стремится к нулю, монотонно не возрастая. Отсюда согласно теореме 2 заключаем, что интегральное множество M системы (1) эквиасимптотически устойчиво.

В частном случае, когда $\dot{V}(t, x) = W(t, x)$, можно сформулировать такое следствие.

Следствие 3. *Если существует функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая в области* (2) *условию* 1 *теоремы* 6 *и неравенствам*

$$\dot{V}(t, x) \leq -c(\rho(x, M_t)), \quad c \in K; \quad \ddot{V}(t, x) \geq 0,$$

то интегральное множество M *системы* (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

1. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
5. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
6. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Гостехиздат, 1955. – 207 с.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
9. *Salvadori L.* Sul problema della stabilita asintotica // Rend. Accad. naz. Lincei. – 1972. – **53**. – P. 35 – 38.

Получено 26.04.93