УДК 519.21

Г. Л. Кулініч, С. В. Кушніренко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПЕВНОГО КЛАСУ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ *

We consider a solution $u(t,x)$, $t>0$, $x\in R^2$, of the Cauchy problem for some class of integro-differential equations. A typical singularity of these equations consists in the fact that the matrix of coefficients of higher derivatives is degenerate for all x. We obtain conditions for the existence of the limit $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v(x)$. We also present the explicit form of the solution of Cauchy problem directly in terms of coefficients of the equation.

Розглядається розв'язок задачі Коші $u(t,x)$, $t>0$, $x\in R^2$, певного класу інтегро-диференціальних рівнянь. Характерною особливістю цих рівнянь є те, що матриця із коефіцієнтів при старших похідних є виродженою при всіх x. Отримано умови, при яких існує границя $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v(x)$. При цьому наведено явний вигляд розв'язку задачі Коші, який виражається безпосередньо через коефіцієнти рівняння.

1. Розглядається задача Коші для інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u_t'(t,x) = (\nabla_x u(t,x), a(x)) +$$

$$+ \frac{(\nabla_x \cdot, b(x))^2}{2} u(t,x) + \int_{R^2} [u(t,\ x+c(x,u)) - u(t,x)]\Pi(du) \tag{1}$$

в області $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $t>0$, $u(0,x)=F(x)$, де $\nabla_x \cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot}{\partial x_2}\right)$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток, $\Pi(A)$ — міра, яка визначена на борелевих множинах $A\subset R^2$, $\Pi(R^2)<\infty$; функція $F(x)$ обмежена і має неперервні обмежені похідні до другого порядку включно; $a(x)$, $b(x)$, $c(x,u)$ — векторні функції вигляду

$$a(x) = (a_1(x), a_2(x)), \qquad b(x) = (g_1(x)x_1 + g_2(x)x_2; -g_2(x)x_1 + g_1(x)x_2),$$

$$c(x,u) = (\gamma_1(x,u)x_1 + \gamma_2(x,u)x_2; -\gamma_2(x,u)x_1 + \gamma_1(x,u)x_2),$$

де $a_i(x)$, $g_i(x)$, $\gamma_i(x,u)$ — дійсні неперервні функції, які мають неперервні похідні по x_i до другого порядку включно та такі, що виконуються нерівності

$$|a(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int_{R^2} |c(x,u)|^2 \Pi(du) \le L\left(1+|x|^2\right), \tag{2}$$

$$\left|\nabla^2 a(x)\right|^2 + \left|\nabla^2 b(x)\right|^2 + \int_{R^2} \left|\nabla^2 c(x,u)\right|^2 \Pi(du) \le L\left(1+|x|^2\right), \tag{3}$$

$$\int_{R^2} \left[|c(x,u)|^k + |\nabla c(x,u)|^k\right]\Pi(du) \le L\left(1+|x|^k\right), \quad k=3,4, \tag{4}$$

для певної сталої $L>0$ і всіх $x\in R^2$, а також нерівність

$$|a(x)-a(y)|^2 + |b(x)-b(y)|^2 + \int_{R^2} |c(x,u)-c(y,u)|^2 \Pi(du) \le L_N |x-y|^2 \tag{5}$$

---

* Виконано при частковій фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект № 0107/00103).

для довільного $N > 0$ при $|x| \leq N$, $|y| \leq N$, L_N — певні сталі

$$\left(\left|\nabla c(x,u)\right|^2 = \sum_{m,i=1}^{2} \left(\frac{\partial c_m(x,u)}{\partial x_i} \right)^2, \quad \left|\nabla^2 c(x,u)\right|^2 = \sum_{m,i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 c_m(x,u)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2, \right.$$

$$\left. c(x, u) = (c_1(x,u); c_2(x,u)) \right).$$

Задача стабілізації розв'язку $u(t, x)$ рівняння (1) — це задача про існування границі $\lim_{t\to\infty} u(t, x)$. Питання стабілізації розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь уперше постало в роботі [1]. У подальшому це питання досліджувалось у багатьох роботах (див., наприклад, [2, 3]). У всіх цих роботах вимагається рівномірна еліптичність матриці, що складається із коефіцієнтів при старших похідних. Характерною особливістю рівняння (1) є те, що матриця, складена із коефіцієнтів при старших похідних, вироджена при всіх x. Формулювання результату про стабілізацію розв'язку $u(t, x)$ рівняння (1) при $c(x, u) \equiv$ $\equiv 0$ наведено в роботі [4], а доведення частинного випадку

$$\left(u_t'(t,x) = \frac{b^2}{2}\left[-(\nabla_x u(t,x), x) + (\nabla_x \cdot, x^{\perp})^2 u(t,x) \right] \right)$$

— в роботі [5]. Слід відзначити роботу [6], в якій використовується ймовірнісний підхід при доведенні стабілізації розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з виродженим еліптичним оператором і необмеженими коефіцієнтами; при цьому для початкової функції вимагається рівномірна збіжність $F(r\cos\varphi,$ $r\sin\varphi) \to \hat{F}(\varphi)$ при $r \to \infty$.

У даній роботі за допомогою ймовірнісного зображення розв'язку $u(t, x)$ задачі Коші для рівняння (1) та на підставі результатів про поведінку розв'язків відповідних стохастичних диференціальних рівнянь [7, 8] встановлено стабілізацію $u(t, x)$ (теореми 1, 3).

2. Теорема 1. *Нехай* $u(t, x)$ — *розв'язок задачі Коші рівняння* (1). *Якщо для всіх* $x \in R^2$ *виконуються умови:*

1) $\left|(a(x), x)\right| \leq L|x|^2$;

2) $\int_{R^2} \ln^2\left[(1+\gamma_1(x,u))^2 + \gamma_2^2(x,u)\right]\Pi(du) \leq L$ *для певної сталої* $L > 0$;

3) $\sup_x \left[2\frac{(a(x),x)}{|x|^2} + g_2^2(x) - g_1^2(x) + \int_{R^2} \ln\left[(1+\gamma_1(x,u))^2 + \gamma_2^2(x,u)\right]\Pi(du) \right] < 0,$

то

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = F(0).$$

Доведення. Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь без післядії [9]

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + b(\xi(t))dw(t) + \int_{R^2} c(\xi(t),u)\nu(dt,du), \tag{6}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x, u)$ — векторні функції, визначені в рівнянні (1), $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, $\nu([0, t], A)$ — пуассонівська міра з параметром $t\Pi(A)$, A — борелева множина із R^2, $\Pi(R^2) < \infty$, процес $w(t)$ і міра $\nu([0, t], A)$ задані на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), F_t — вимірні при будьякому $t \geq 0$ і A, а також незалежні між собою, $F_t \subset F$ — неспадний потік σ-алгебр, $\xi(0) = x$ $(x = (x_1; x_2))$, $|x| \neq 0$.

Відомо [9], що умови (2), (5) гарантують існування єдиного неперервного справа сильного розв'язку $\xi(t) = (\xi_1(t); \xi_2(t))$ рівняння (6), який є однорідним марковським процесом, а умови (3) – (5) гарантують, що умовне математичне сподівання

$$V(t, x) = \mathrm{M}\{F(\xi(T)) / \xi(t) = x\}, \quad 0 < t < T,$$

де функція $F(x)$ є обмеженою і має неперервні обмежені похідні до другого порядку включно, задовольняє рівняння

$$-V_t'(t,x) = (\nabla_x V(t,x), a(x)) + \frac{1}{2}(\nabla_x \cdot, b(x))^2 V(t,x) +$$

$$+ \int_{R^2} [V(t, x + c(x,u)) - V(t,x)]\, \Pi(du)$$

в області $t < T$, $x \in R^2$, $V(T, x) = F(x)$.

Далі розглянемо функцію

$$u(t, x) = V(T - t, x)$$

в області $t > 0$ $(T - t < T)$. Оскільки

$$u_t' = -V_t', \quad u_{x_i}' = V_{x_i}', \quad u_{x_i x_j}'' = V_{x_i x_j}'',$$

то $u(t, x)$ — розв'язок задачі Коші рівняння (1).

Отже,

$$u(t, x) = \mathrm{M}\{F(\xi(T - t)) / \xi(t) = x\}.$$

В останній рівності скористаємося тим, що розв'язок $\xi(t)$ рівняння (6) є однорідним марковським процесом, і отримаємо ймовірнісне зображення розв'язку $u(t, x)$ задачі Коші рівняння (1) у вигляді

$$u(t, x) = \mathrm{M}\{F(\xi(t)) / \xi(0) = x\} = \mathrm{M} F(\xi(t)), \tag{7}$$

де $\xi(t)$ — розв'язок рівняння (6).

Це зображення використаємо при доведенні теореми. Для цього в рівнянні (6) перейдемо до нового процесу $(r(t); \varphi(t))$ через рівності $\xi_1(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $\xi_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.

Згідно з [7] при $0 < t < \tau = \inf\{t : |\xi(t)| = 0\}$ справджуються рівняння

$$dr(t) = r(t)\Bigg[\left(\frac{(a, \xi(t))}{|\xi(t)|^2} + \frac{1}{2} g_2^2\right) dt +$$

$$+ g_1 dw(t) + \int_{R^2} \left(\sqrt{(1 + \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} - 1\right) \nu(dt, du)\Bigg],$$

$$d\varphi(t) = \left(\frac{(a, \xi^{\perp}(t))}{|\xi(t)|^2} - g_1 g_2\right) dt - g_2 dw(t) + \int_{R^2} c_0(\xi(t), u)\, \nu(dt, du), \tag{8}$$

де

$$c_0(x,u) = \pi\chi_{\{1+\gamma_1(x,u)<0\}} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\gamma_2(x,u)\chi_{\{1+\gamma_1(x,u)=0\}} -$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{\gamma_2(x,u)}{(1+\gamma_1(x,u))}\chi_{\{1+\gamma_1(x,u)\neq 0\}},$$

$$\xi^{\perp}(t) = (-\xi_2(t); \xi_1(t)),$$

g_i, γ_i — відповідно функції $g_i(\xi(t))$, $\gamma_i(\xi(t),u)$, $a = (a_1(\xi(t)); a_2(\xi(t)))$.

Отже [9], при $t < \tau$

$$r(t) = r(0)\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{(a,\xi(s))}{|\xi(s)|^2}+\frac{1}{2}g_2^2-\frac{1}{2}g_1^2\right]ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t g_1\,dw(s) + \int_0^t\int_{R^2}\ln\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}\,\nu(ds,du)\right\}. \tag{9}$$

Згідно з умовою 1 теореми і неперервністю функцій $g_i(x)$, $\gamma_i(x,u)$ із (9) випливає, що $\tau = \infty$ з імовірністю 1. Тому рівності (8), (9) справджуються при всіх $t \geq 0$. Рівність (9) перепишемо у вигляді

$$r(t) = r(0)\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left(2\frac{(a,\xi(s))}{|\xi(s)|^2}+g_2^2-g_1^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_{R^2}\ln[(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2]\Pi(du)\right)ds+\zeta(t)\right]\right\}, \tag{10}$$

$$\zeta(t) = 2\int_0^t g_1\,dw(s) + \int_0^t\int_{R^2}\ln[(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2]\,\tilde{\nu}(ds,du),$$

$$\tilde{\nu}([0,t],A) = \nu([0,t],A) - t\Pi(A).$$

Оскільки [8] $\zeta(t)$ — мартингал з характеристикою

$$\langle\zeta(t)\rangle = \int_0^t\left(4g_1^2(\xi(s)) + \int_{R^2}\ln^2[(1+\gamma_1(\xi(s),u))^2+\gamma_2^2(\xi(s),u)]\Pi(du)\right)ds,$$

а згідно з умовою 2 теореми та нерівністю (2) виконується нерівність $\langle\zeta(t)\rangle \leq$ $\leq Ct$ для деякої сталої C, то [10] $t^{-1}\zeta(t) \to 0$ з імовірністю 1 при $t \to \infty$. Згідно з рівністю (10) і умовою 3 теореми маємо нерівність

$$r(t) \leq r(0)\exp\left\{\frac{1}{2}t\left[-\delta+\frac{\zeta(t)}{t}\right]\right\}$$

для деякого $\delta > 0$, з якої випливає збіжність $r(t) \to 0$ з імовірністю 1 при $t \to \infty$. Отже, $\xi_1(t) \to 0$ і $\xi_2(t) \to 0$ з імовірністю 1 при $t \to \infty$. З неперервності та обмеженості функції $F(x)$ випливає, що і $\mathrm{M}F(\xi(t)) \to F(0)$ при $t \to \infty$. Враховуючи рівність (7), завершуємо доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай $u(t,x)$ — розв'язок рівняння* (1), *для коефіцієнтів якого при всіх $x \in R^2$ виконуються умови*:

1) $\Pi\left\{u : (1+\gamma_1(x,u))^2 + \gamma_2^2(x,u) \neq 1\right\} = 0$;

2) $g_1(x) = 0$;

3) $g_2(x) = g_2(|x|)$, $c(x,u) = c(|x|,u)$;

4) $a(x) = \left(-2^{-1}g_2^2(|x|)x_1 + q(|x|)x_2;\ -2^{-1}g_2^2(|x|)x_2 - q(|x|)x_1\right)$.
Тоді

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n m_n(t) + b_n l_n(t)], \tag{11}$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{F}(y)\cos ny\,dy, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{F}(y)\sin ny\,dy, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{F}(y) = F(x_1\cos y - x_2\sin y;\ x_1\sin y + x_2\cos y),$$

$$m_n(t) = \cos[(-nq(|x|)+\beta_n)t]\exp\left\{\left[-\frac{n^2g_2^2(|x|)}{2} + \alpha_n - \Pi(R^2)\right]t\right\},$$

$$l_n(t) = \sin[(-nq(|x|)+\beta_n)t]\exp\left\{\left[-\frac{n^2g_2^2(|x|)}{2} + \alpha_n - \Pi(R^2)\right]t\right\},$$

$$\alpha_n = \int_{R^2}\cos(nc_0(|x|,u))\Pi(du), \qquad \beta_n = \int_{R^2}\sin(nc_0(|x|,u))\Pi(du),$$

функція $c_0(x,u)$ *визначається у співвідношенні* (8).

Доведення. Із вигляду функції $a(x)$ і умови (2) маємо $|(a(x),x)| \le L|x|^2$ для певної сталої $L > 0$. Отже, враховуючи (9), отримуємо рівняння (8) при всіх $t \ge 0$. Враховуючи умови теореми, легко переконатися, що у даному випадку рівняння (8) набирають вигляду

$$dr(t) = 0,$$

$$d\varphi(t) = -q(r(t))\,dt - g_2(r(t))\,dw(t) + \int_{R^2}c_0(r(t),u)\nu(dt,du)$$

для всіх $t \ge 0$. Отже, $r(t) = r(0)$ з імовірністю 1 при всіх $t \ge 0$. Тому

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \beta(t),$$

де

$$\beta(t) = -\hat{q}t - \hat{g}w(t) + \int_0^t\int_{R^2}\hat{c}(u)\nu(ds,du),$$

$$\hat{q} = q(r(0)), \qquad \hat{g} = g_2(r(0)), \qquad \hat{c}(u) = c_0(r(0),u).$$

Отже, згідно з (7)

$$u(t,x) = MF(r(0)\cos(\varphi(0)+\beta(t));\ r(0)\sin(\varphi(0)+\beta(t))) =$$
$$= MF(x_1\cos\beta(t) - x_2\sin\beta(t);\ x_1\sin\beta(t) + x_2\cos\beta(t)) =$$
$$= M\hat{F}(\beta(t)),$$

де

$$\hat{F}(y) = F(x_1\cos y - x_2\sin y;\ x_1\sin y + x_2\cos y).$$

Функція $\hat{F}(y)$ є періодичною з періодом 2π і неперервно диференційовною. Тому вона розкладається в ряд Фур'є, тобто

$$\hat{F}(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos ny + b_n \sin ny],$$

де a_n і b_n визначено в (11). Отже,

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n m_n(t) + b_n l_n(t)], \tag{12}$$

де

$$m_n(t) = M \cos n\beta(t), \qquad l_n(t) = M \sin n\beta(t).$$

Згідно з узагальненою формулою Іто [9] отримуємо

$$\cos n\beta(t) = \cos n\beta(0) + \int_0^t \left[n\hat{q} \sin n\beta(s) - \frac{1}{2} n^2 \hat{g}^2 \cos n\beta(s) \right] ds +$$

$$+ n\hat{g} \int_0^t \sin n\beta(s)\, dw(s) + \int_0^t \int_{R^2} [\cos n(\beta(s) + \hat{c}(u)) - \cos n\beta(s)]\, \nu(ds, du).$$

Тому

$$m_n(t) = 1 + \int_0^t \left[n\hat{q} l_n(s) - \frac{1}{2} n^2 \hat{g}^2 m_n(s) \right] ds +$$

$$+ M \int_0^t \int_{R^2} [\cos n(\beta(s) + \hat{c}(u)) - \cos n\beta(s)]\, \Pi(du)\, ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \left[n\hat{q} l_n(s) - \frac{n^2 \hat{g}^2}{2} m_n(s) \right] ds + \int_0^t [m_n(s)(\alpha_n - \Pi(R^2)) - \beta_n l_n(s)]\, ds,$$

де

$$\alpha_n = \int_{R^2} \cos(n\hat{c}(u))\, \Pi(du), \qquad \beta_n = \int_{R^2} \sin(n\hat{c}(u))\, \Pi(du).$$

Аналогічно

$$l_n(t) = \int_0^t \left[-n\hat{q} m_n(s) - \frac{n^2 \hat{g}^2}{2} l_n(s) \right] ds + \int_0^t [l_n(s)(\alpha_n - \Pi(R^2)) - \beta_n m_n(s)]\, ds.$$

Таким чином, для знаходження функцій $m_n(t)$, $l_n(t)$ маємо систему диференціальних рівнянь

$$m_n'(t) = -\left[\frac{n^2 \hat{g}^2}{2} - \alpha_n - \Pi(R^2) \right] m_n(t) + [n\hat{q} - \beta_n] l_n(t),$$

$$l_n'(t) = [-n\hat{q} + \beta_n] m_n(t) + \left[-\frac{n^2 \hat{g}^2}{2} + \alpha_n - \Pi(R^2) \right] l_n(t).$$

Звідси

$$m_n(t) = \cos[(-n\hat{q} + \beta_n)t] \exp\left\{ \left[-\frac{n^2 \hat{g}^2}{2} + \alpha_n - \Pi(R^2) \right] t \right\},$$

$$l_n(t) = \sin[(-n\hat{q} + \beta_n)t] \exp\left\{ \left[-\frac{n^2 \hat{g}^2}{2} + \alpha_n - \Pi(R^2) \right] t \right\}.$$

Отже, для завершення доведення теореми потрібно ці вирази підставити в (12).

Теорема 3. *Нехай* $u(t, x)$ — *розв'язок рівняння* (1) *і виконуються умови теореми* 2.

1. *Якщо* $g_2(|x|) > 0$ *або* $g_2(|x|) = 0$, *а* $\int_{R^2}[\cos nc_0(|x|,u)-1]\Pi(du) < 0$ *при всіх* $n = 1, 2, \ldots$, *де* $c_0(|x|,u)$ *визначається рівністю* (8), *то*

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x) = \frac{a_0}{2},$$

де a_0 *визначено в* (11).

2. *Якщо* $g_2(|x|) = 0$, $q(|x|) = 0$ *і для деякої підпослідовності* n_k *послідовності* n:

$$\int\limits_{R^2} [\cos n_k c_0(|x|,u)-1]\Pi(du) = 0,$$

а

$$\int\limits_{R^2} [\cos nc_0(|x|,u)-1]\Pi(du) < 0 \quad \text{при} \quad n \neq n_k,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n_k} a_{n_k}.$$

Доведення. Нехай виконуються умови твердження 1 теореми. Тоді

$$|m_n(t)| + |l_n(t)| \leq \begin{cases} 2\exp\left\{-\dfrac{n^2\hat{g}^2}{2}t\right\} & \text{при} \quad \hat{g}^2(|x|) > 0, \\ 2\exp\left\{\displaystyle\int\limits_{R^2}[\cos nc_0(|x|,u)-1]\Pi(du)\right\} & \text{при} \quad \hat{g}(|x|) = 0. \end{cases}$$

Отже, в цих випадках при $t \to \infty$

$$m_n(t) \to 0, \quad l_n(t) \to 0$$

для кожного $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, кожен член ряду (12) збігається до нуля при $t \to \infty$. Оскільки функція $F(x)$ є обмеженою і має обмежені похідні до другого порядку включно, то [11]

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{n^2}L\left(1 + |x|^2\right)$$

при кожному $n = 1, 2, \ldots$, де $L > 0$ — певна стала, крім того, $|m_n(t)| \leq 1$, $|l_n(t)| \leq 1$. Тому ряд (12) є збіжним рівномірно по t і

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n m_n(t) + b_n l_n(t)] = 0. \tag{13}$$

Враховуючи рівність (12), завершуємо доведення твердження 1 теореми.

Нехай виконуються умови твердження 2 теореми. Легко бачити, що у цьому випадку

$$m_{n_k}(t) = 1, \quad l_{n_k}(t) = 0$$

для всіх n_k. Для $n \neq n_k$ виконуються умови твердження 1 теореми при $g_2(|x|) = 0$. Тому аналогічно доведенню збіжності (13) маємо

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n\neq n_k} [a_n m_n(t) + b_n l_n(t)] = 0.$$

Далі для доведення твердження 2 теореми потрібно скористатися абсолютною збіжністю ряду (12).

Зауваження. Якщо $g_2(|x|) = 0$ і $c_0(|x|, u) = \beta\pi$, то при раціональному β і $q(|x|) = 0$ існує підпослідовність n_k, для якої має місце твердження 2 теореми 3, а при ірраціональному β незалежно від $q(x)$ має місце твердження 1.

3. Висновок. Роботу присвячено дослідженню питання стабілізації дифузійних систем із виродженою в певних областях дифузією та з імпульсною пуассонівською дією, і вона є однією з перших у цьому перспективному науковому напрямку.

1. *Колмогоров А. Н., Петровский И. З., Пискунов Н. С.* Исследование уравнений диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1937. – **1**, вып. 6. – 26 с.
2. *Крейн С. Г., Хаган М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1983. – № 21. – С. 130 – 264.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
4. *Кулініч Г. Л.* Про інваріантні множини систем другого порядку стохастичних диференціальних рівнянь Іто // Допов. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 35 – 39.
5. *Кулініч Г. Л., Перегуда О. В.* Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто. – Київ: ВПЦ „Київ. ун-т", 2002. – 91 с.
6. *Friedman A., Pinsky M.* Asymptotic behaviour of solutions of linear stochastic differential systems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – № 1. – P. 1 – 22.
7. *Кулініч Г. Л.* Якісний аналіз поведінки гармонічного осцилятора під впливом випадкових збурень параметрів процесами типу „білого і дробового" шумів // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1998. – Вип. 58. – С. 81 – 91.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
10. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т.3. – 656 с.

Одержано 05.06.2003