УДК 517

А. Л. Григорян (Ереван. фил. Тернопол. акад. нар. хоз-ва, Армения)

ОЦЕНКА ОСТАТКА НАИЛУЧШЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

We establish lower and upper bounds of the value

$$C_m^q(W^r, x) = \sup_{f \in W^r} |f(x) - T_m(x, f)|$$

where

$$T_m(x, f) = \frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) D_m(x - x_l), \quad q \in \mathbb{N}, \quad q > 2m, \qquad x_l = \frac{2\pi l}{q}, \quad l = 0, 1, \ldots, q-1,$$

and $D_m(t)$ is the Dirichlet kernel, for the class W^r of 2π-periodic functions, whose r-th derivative satisfies the condition $\left|f^r(x)\right| \le 1$.

Встановлено оцінки зверху і знизу величини

$$C_m^q(W^r, x) = \sup_{f \in W^r} |f(x) - T_m(x, f)|,$$

де

$$T_m(x, f) = \frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) D_m(x - x_l), \quad q \in \mathbb{N}, \quad q > 2m, \qquad x_l = \frac{2\pi l}{q}, \quad l = 0, 1, \ldots, q-1,$$

$D_m(t)$ — ядро Діріхле, для класу W^r 2π-періодичних функцій, що мають r-ту похідну, яка задовольняє умову $\left|f^r(x)\right| \le 1$.

1. Введение. Пусть $m, q \in \mathbb{N}$, $q > 2m$, $x_l = \dfrac{2\pi l}{q}$, $l = 0, 1, \ldots, q-1$. Для 2π-периодической функции $f(x)$ полиномом наилучшего квадратического приближения по системе точек x_l называется тригонометрический полином $T_m(x, f)$ степени не выше m, минимизирующий сумму

$$\sum_{l=0}^{q-1} \left(f(x_l) - T_m(x_l)\right)^2$$

в классе всех тригонометрических полиномов $T_m(x)$ степени не выше m. Известно [1], что

$$T_m(x,f) = \frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) D_m(x - x_l),$$

где $D_m(t)$ — ядро Дирихле.

Аппроксимативные свойства полиномов наилучшего квадратического приближения для функций разных классов исследовали М. Д. Калашников [1], Г. П. Губанов [2] и другие авторы.

Рассмотрим класс W^r 2π-периодических функций, имеющих r-ю производную, удовлетворяющую неравенству $\left|f^{(r)}(x)\right| \le 1$. Обозначим

$$C_m^q(W^r, x) = \sup_{f \in W^r} |f(x) - T_m(x, f)|. \tag{1}$$

С. М. Никольский [3] в случае, когда $q = 2m + 1$, доказал асимптотическую формулу

$$C_m^{2m+1}(W^r, x) = m^{-r} K_r M_m(x) + O(m^{-r}),$$

где

$$M_m(x) = \frac{2}{2m+1} \sum_{l=0}^{2m} |D_m(x - x_l)|,$$

$m^{-r} K_r$ представляет собой верхнюю грань

$$m^{-r} K_r = \sup_{f \in W^r} E_m(f)$$

отклонений $E_m(f)$ функций $f(x)$ от их наилучших тригонометрических полиномов m-го порядка.

Как известно [4, с. 66],

$$K_0 = 1, \quad K_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad K_3 = \frac{\pi^3}{24}, \dots,$$

причем K_r возрастают по четным индексам и убывают по нечетным:

$$1 = K_0 < K_2 < K_4 < \dots < \frac{4}{\pi} < \dots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2}.$$

В указанных выше работах приведенный результат С. М. Никольского распространен на случаи, когда q делится на $2m+1$. Для произвольного $q > 2m$ (не обязательно делящегося на $2m+1$) вопрос оставался неизученным.

Обозначим

$$C_m^q = C_m^q(W^r, 0), \qquad \overline{C}_m^q = \sup_{f \in W^r} \max_x |f(x) - T_m(x, f)|,$$

$$L_{2m-1}(q) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} |D_{m-1}(x_l)|, \qquad \alpha\left(\frac{m}{q}; r\right) = \left(\frac{q}{2m} \sin \frac{\pi m}{q}\right)^{-r},$$

$$L'_m(q) = \frac{1}{q} \sum_{l=[q/m]}^{q-[q/m]} \frac{\cos\left(\pi m \dfrac{l+1/2}{q}\right)}{\sin\left(\pi \dfrac{l+1/2}{q}\right)}.$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для всех* $q > 2m$ *справедливы оценки*

$$m^{-r} K_r \alpha\left(\frac{m}{q}; r\right) \overline{L}_m(q) + O(m^{-r}) \le C_m^q \le$$

$$\le m^{-r} K_r L_{2m-1}(q) + O(m^{-r}),$$

где

$$\overline{L}_m(q) = \begin{cases} L_{2m-1}(q) & \text{при } r \equiv 0 \pmod 2, \\ L'_{2m-1}(q) & \text{при } r \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Теорема 1′. *Для всех* $q > 2m$ *справедливы оценки*

$$m^{-r} K_r \alpha\left(\frac{m}{q}; r\right) \overline{L}_m(q) + O\left(m^{-r}\right) \leq \overline{C}_m^q \leq$$

$$\leq m^{-r} K_r \tilde{L}_m(q) + O\left(m^{-r}\right),$$

где

$$\tilde{L}_m(q) = \max_x \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} |D_m(x - x_l)|.$$

2. Доказательство теорем 1 и 1′. Рассмотрим в q-мерном комплексном евклидовом пространстве ортогональную систему векторов

$$\bar{h}_k = \left\{e^{ix_l k}\right\}_{l=0}^{q-1}, \quad k \in \overline{-\left[\frac{q-1}{2}\right], \left[\frac{q}{2}\right]}.$$

Тогда если задан вектор

$$\bar{f} = \{f(x_l)\}_{l=0}^{q-1}, \quad f(x) \in W^r,$$

то

$$\bar{f} = \sum_{k=-[(q-1)/2]}^{[q/2]} c_k \bar{h}_k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) e^{-ix_l k}.$$

Ясно, что

$$f(0) = \sum_{k=-[(q-1)/2]}^{[q/2]} c_k, \quad T_m(0; f) = \sum_{k=-m}^{m} c_k.$$

Следовательно,

$$|f(0) - T_m(0; f)| = \left| \sum_{k=-[(q-1)/2]}^{-(m+1)} c_k + \sum_{k=m+1}^{[q/2]} c_k \right|. \tag{2}$$

Применяя r раз преобразование Абеля, для c_k получаем выражение

$$c_k = \frac{1}{q(1 - e^{ix_k})^r} \sum_{l=0}^{q-1} \Delta_{2\pi/q}^r f(x_l) e^{-ix_l k}, \quad k \neq 0. \tag{3}$$

Из (1) – (3) имеем

$$C_m^q = \sup_{f \in W^r} \frac{2}{q} \left| \sum_{l=0}^{q-1} \Delta_{2\pi/q}^r f(x_l) B_m(l) \right| + O\left(m^{-r}\right), \tag{4}$$

где

$$B_m(l) = \sum_{k=m}^{[q/2]} \frac{\cos\left(kx_l + \frac{\pi kr}{q} + \frac{r\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{x_k}{2}\right)^r}.$$

Установим оценки снизу. Пусть сначала $r \equiv 0 \pmod 2$. Обозначим

$$b_k = \left(2\sin\frac{\pi k}{q}\right)^{-r}, \quad \Delta(k) = b_k - b_{k+1},$$

$$\Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1), \quad F_k(x) = \sum_{j=0}^{k} D_j(x).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, имеем

$$B_m(l) = -b_m D_{m-1}(x_l) + b_{[q/2]} D_{[q/2]}(x_l) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{[q/2]-2} \Delta^2(k) F_k(x_l) - \Delta(m) F_{m-1}(x_l) + \Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right] - 1\right) F_{[q/2]-1}(x_l) \equiv$$

$$\equiv -b_m D_{m-1}(x_l) + H(l). \tag{5}$$

Поскольку $F_k(x) \geq 0$ и

$$\sum_{l=0}^{q-1} F_k(x_l) = \frac{(k+1)q}{2},$$

то

$$\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{k=m}^{[q/2]-2} \Delta^2(k) F_k(x_l) = \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{[q/2]-2} (k+1)\Delta^2(k) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\Delta(m) - \left(\left[\frac{q}{2}\right] - 1\right)\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right] - 1\right) + b_m - b_{[q/2]-1}\right). \tag{6}$$

Кроме того,

$$\Delta(k) = O\left(k^{-1} b_k\right), \quad D_{[q/2]}(x_l) = O(1).$$

Таким образом, из (5) и (6) следует

$$\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1} |H(l)| = O(B_m). \tag{7}$$

Из (4), (5) и (7) получаем

$$C_m^q = \sup_{f \in W^r} \frac{2b_m}{q} \left| \sum_{l=0}^{q-1} \Delta_{2\pi/q}^r f(x_l) D_{m-1}(x_l) \right| + O(m^{-r}). \tag{8}$$

Пусть

$$A = \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{q}{4}\right] - 1, \left[\frac{3q}{4} + 2\right], \ldots, q - 1\right\}$$

и

$$B = \{[0; q-1] \cap (Z \setminus A)\}$$

— множества целых точек. Рассмотрим

$$\varphi(x_l) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sin\left((2m-1)\dfrac{\pi l}{q}\right), & l \in A, \\ \dfrac{-\sum_{j\in A}\varphi(x_j)}{|B|}, & l \in B, \end{cases}$$

где $|B|$ — число элементов B. Нетрудно заметить, что

$$\sum_{l=0}^{q-1}\varphi(x_l) = 0.$$

Возьмем

$$f_1(x_l) = -\sum_{k=0}^{l-1}\varphi(x_k) + c_1, \quad l = 1, 2, \ldots, q-1,$$

и $c_1 = f_1(0)$ выберем так, чтобы

$$\sum_{l=0}^{q-1} f_1(x_l) = 0, \qquad f_1(x_{l+q}) = f_1(x_l).$$

Продолжая процесс, можно построить функцию $f_r(x_l)$ так, что

$$\Delta^r_{2\pi/q} f_r(x_l) = \varphi(x_l), \qquad f_r(x_{l+q}) = f_r(x_l).$$

Согласно работе Ю. Н. Субботина [5], для последовательности $\{f_r(x_l)\}$, $l \in$ $\in Z$, найдется функция $f_0(x)$ такая, что $f_0(l) = f_r(x_l)$ и $\sup_x \left|f_0^{(r)}(x)\right| \le A_r$, где

$$A_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)(p-1)}}{(2p-1)^{r+1}}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{A_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r f_0\left(\frac{xq}{2\pi}\right), \quad x \in [0; 2\pi], \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

Ясно, что $f(x) \in W^r$ и

$$\Delta^r_{2\pi/q} f(x_l) = \frac{1}{A_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \varphi(x_l).$$

Замечая, что

$$|\varphi(x_l)| \le 1 \quad \text{и} \quad D_{m-1}(x_l) = O(1) \quad \text{при} \quad l \in B,$$

из (8) имеем

$$C_m^q \ge \frac{2b_m}{qA_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\left(\sum_{l=0}^{q-1}|D_{m-1}(x_l)| - 4\sum_{l\in B}|D_{m-1}(x_l)|\right) + O(m^{-r}) =$$

$$= \frac{2b_m}{qA_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\sum_{l=0}^{q-1}|D_{m-1}(x_l)| + O(m^{-r}). \qquad (9)$$

Отсюда следует оценка снизу для C_m^q при $r \equiv 0 \pmod 2$. Пусть теперь $r \equiv$ $\equiv 1 \pmod 2$. Обозначим

$$\varphi_1(x_l) = \operatorname{sign} \sum_{k=m}^{[q/2]} \frac{\sin\left((2l+r)\dfrac{\pi k}{q}\right)}{\left(2\sin\left(\dfrac{\pi k}{q}\right)\right)^r}, \quad l = 0, 1, \ldots, q-1, \quad \varphi_1(x_{l+q}) = \varphi_1(x_l).$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{l=0}^{q-1} \varphi_1(x_l) = 0.$$

Следовательно, как и при $r \equiv 0 \pmod 2$, можно построить функцию $f(x)$ такую, что

$$\Delta^r_{2\pi/q} f(x_l) = \frac{\varphi_1(x_l)}{A_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \quad l = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Следовательно, из (4) имеем

$$C_m^q \geq \frac{2}{q}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \frac{1}{A_r} \sum_{l=0}^{q-1} |A_m(l)| + O(m^{-r}), \tag{10}$$

где

$$A_m(l) = \sum_{k=m}^{[q/2]} b_k \sin\left((2l+1)\frac{\pi k}{q}\right).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получаем

$$A_m(l) = \frac{b_m \cos\left((2m-1)\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)}{2\sin\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} - \frac{b_{[q/2]}\cos\left(\left(\left[\frac{q}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)(2l+1)\frac{\pi}{q}\right)}{2\sin\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} +$$

$$+ \frac{\Delta(m)\sin\left((2l+1)\frac{\pi m}{q}\right)}{4\sin^2\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} - \frac{\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)\sin\left(\left[\frac{q}{2}\right]\frac{(2l+1)\pi}{q}\right)}{4\sin^2\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} -$$

$$- \sum_{k=m}^{[q/2]-2} \frac{\Delta^2(k)\sin\left((k+1)(2l+1)\frac{\pi}{q}\right)}{4\sin^2\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} \equiv$$

$$\equiv \frac{b_m \cos\left((2m-1)\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)}{2\sin\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} + Q_m(l). \tag{11}$$

Замечая, что

$$\frac{\cos\left(\left(\left[\frac{q}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)(2l+1)\frac{\pi}{q}\right)}{2\sin\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 2, \\ \dfrac{(-1)^2}{2}, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\sum_{l=[q/(2m-1)]+2}^{q-[q/(2m-1)]-3} \frac{\left|\sin\left((k+1)(2l+1)\frac{\pi}{q}\right)\right|}{\sin^2\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} = O(mq),$$

имеем

$$\frac{1}{q}\sum_{l=[q/(2m-1)]+2}^{q-[q/(2m-1)]-3} |Q_m(l)| = O(b_m). \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{q}\left(\sum_{l=0}^{[q/(2m-1)]+1} |A_m(l)| + \sum_{l=q-[q/(2m-1)]-2}^{q-1} |A_m(l)|\right) \le$$

$$\le \frac{2}{q}\left(\left[\frac{q}{2m-1}\right]+2\right)\sum_{k=m}^{[q/2]} b_k = O(b_m). \tag{13}$$

Применяя (11) – (13), из (10) получаем

$$C_m^q \ge \frac{b_m}{qA_r}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \sum_{l=[q/(2m-1)]}^{q-[q/(2m-1)]} \frac{\left|\cos\left((2m-1)\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)\right|}{\sin\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)} + O(m^{-r}), \tag{14}$$

откуда следует требуемая оценка снизу для нечетных r.

Докажем оценку сверху. Если $t_m(x)$ — тригонометрический полином m-го порядка, то

$$T_m(x, t_m(x)) = t_m(x).$$

Поэтому если $t_m^*(x, f)$ — тригонометрический полином, для которого

$$E_m(f) = \min_{t_m}\max_x |f(x) - t_m(x)| = \max_x \left|f(x) - t_m^*(x)\right|,$$

то

$$|f(x) - T_m(x, f)| \le \left|f(x) - t_m^*(x, f)\right| + \left|T_m\left(x, f - t^*\right)\right| \le$$

$$\le E_m(f)\left(1 + \frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1} |D_m(x - x_l)|\right). \tag{15}$$

Отсюда следует оценка сверху.

Теорема 1 доказана. Справедливость теоремы 1′ следует из оценок (9), (14) и (15).

Следствие. *Имеет место формула (см. также* [4, *с.* 107])

$$K_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos\left((2n+1)t + \frac{r\pi}{2}\right)}{(2n+1)^r}\right| dt, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Действительно, так как

$$\overline{L}_m(q) = L_{q-2m+1}(q) + O(1)$$

и $\alpha\left(\frac{m}{q}, r\right) \to 1$ при $\frac{m}{q} \to \frac{1}{2}$, из теоремы 1 получаем

$$\varlimsup_{\substack{m \to \infty \\ m/q \to 1/2}} \frac{C_m^r}{m^{-r} \ln m} = K_r \varlimsup_{\substack{m \to \infty \\ m/q \to 1/2}} \frac{L_{q-2m+1}(q)}{\ln m}.$$

Следовательно, для получения формулы (16) достаточно применить теоремы 2 из работ [6, 7].

1. *Калашников М. Д.* О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек // Докл. АН СССР. – 1955. – **105**, № 4. – С. 634–636.
2. *Губанов Г. П.* Приближение функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 12. – С. 22–29.
3. *Никольский С. М.* Интерполяционные тригонометрические полиномы с равноотстоящими узлами интерполяции // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976.
5. *Субботин Ю. Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 24 – 42.
6. *Григорян А. Л.* Дискретные константы Лебега // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 6. – С. 857 – 866.
7. *Григорян А. Л.* Наилучшее квадратическое приближение дифференцируемых функций многочленами // Изв. НАН Армении. – 2000. – **35**, № 5. – С. 25 – 33.

Получено 11.07.2002