УДК 517.57

О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДОДАТНИХ РЯДІВ

We investigate the rate of convergence of series of the form

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1,$$

where $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, $\beta = \{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, and $\tau(x)$ is a nonnegative function nondecreasing on $[0; +\infty)$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1,$$

where the sequence $\lambda = (\lambda_n)$ is the same as above, $f(x)$ is a function decreasing on $[0; +\infty)$ and such that $f(0) = 1$, and a function $\ln f(x)$ is convex on $[0; +\infty)$.

Досліджується швидкість збіжності рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1,$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, $\beta = \{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, а $\tau(x)$ — невід'ємна неспадна на $[0; +\infty)$ функція;

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

Тут послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така ж, як і вище, а $f(x)$ — додатна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$, а функція $\ln f(x)$ — опукла на $[0; +\infty)$.

1. Вступ. Нехай $T(\lambda, \beta, \tau)$ — клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1,$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, $\beta = \{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau(x)$ — невід'ємна неспадна на $[0; +\infty)$ функція; $D(\lambda) = T(\lambda, 0, 0)$ — клас цілих рядів Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами; $E(\lambda, f)$ — клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n), \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1,$$

де послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, як і вище, а $f(x)$ — додатна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$, а функція $\ln f(x)$ — опукла на $[0; +\infty)$. Легко побачити, що у цьому випадку і функція $\ln F(x)$ є опуклою при $x \geq 0$. Це ж стосується і функцій, що належать до двох інших означених класів.

Нехай P означає один із уведених вище класів додатних рядів, $F \in P$ і $x \geq 0$, а $S_n(x)$ — часткова сума відповідного ряду (наприклад, для ряду Діріхле $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{x\lambda_k}$). Визначимо

$$\sigma_n(F) = \sup\left\{\frac{1}{S_n(x)} - \frac{1}{F(x)} : x \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

У випадку, коли h — додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція така, що $h(0)=0$, а $n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1$ — лічильна функція послідовності $\lambda=(\lambda_n)$, в [1] доведено, що умова

$$\int_0^{+\infty}\frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt\le+\infty \tag{1}$$

забезпечує справедливість співвідношення

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{h(\ln(n+1))}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty \tag{2}$$

для кожної функції $F\in D(\lambda)$. Зазначимо, що це твердження у випадку $h(x)=x$ отримано в [2], а у випадку $x=O(h(x))$, $x\to+\infty$, — в [3, 4]. При цьому у всіх розглянутих в [2–4] випадках встановлено і необхідність умови (1) з відповідною функцією h (наприклад, в [3, 4] з h такою, що $x=O(h(x))$) для того, щоб для кожної функції $F\in D(\lambda)$ виконувалось співвідношення (2).

У цій статті ми поширимо цитовані твердження на класи $T(\lambda,\beta,\tau)$ і $E(\lambda,f)$. Метод доведення подібний до застосованого в [1] і є відмінним від підходу, що використовувався в [2, 3].

Статтю побудовано таким чином. Спочатку розглянуто асимптотичні оцінки додатних інтегралів загального вигляду. Потім з отриманих тверджень одержано наслідки для класу $E(\lambda,f)$. Окремо розглянуто клас $T(\lambda,\beta,\tau)$. Хоча, як випливатиме з наведених у статті доведень, насправді всі міркування є правильними для додатних інтегралів загальнішого вигляду, ніж розглянуті у статті, і клас таких інтегралів вже міститиме ряди з класу $T(\lambda,\beta,\tau)$. Для того щоб не перевантажувати статтю громіздкими викладками, ми це не будемо розглядати. Наприкінці статті ми обговорюємо остаточність отриманих тверджень.

2. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів. Нехай ν — зліченно-адитивна міра на $\mathbb{R}_+$, f — додатна зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що $f(0)=1$, а функція $\ln f(x)$ — опукла на $[0;+\infty)$.

Через $I(\nu,f)$ позначимо клас функцій F, зображених для всіх $x\ge0$ у вигляді інтеграла

$$F(x)=\int_0^{+\infty}g(t)f(xt)\nu(dt),$$

де g — додатна на $[0;+\infty)$ функція. Нехай для $r\ge0$

$$\sigma(r,F)=\sup\left\{\frac{1}{S(r,x)}-\frac{1}{F(x)}:x\in\mathbb{R}_+\right\},\qquad S(r,x)=\int_0^r g(t)f(tx)\nu(dt).$$

Доведемо спочатку наступне твердження.

Лема. *Нехай $F\in I(\nu,f)$, $r\ge1$, а R таке, що $\ln f(R)=2(\ln F(r))'$. Тоді*

$$\sigma(R,F)\le\frac{2}{F(r)}.$$

Доведення. Нехай $p(t)=\ln F(t)$, $p_1(t)=\ln f(t)$. Оскільки $p_1(0)=0$, то з опуклості отримуємо, що $p'(t)$ — неспадна функція, і тому $p_1(t)=\int_0^t p'(u)du\le tp'(t)$, $t\ge0$, а також для $t>0$ і $x\ge1$

$$\frac{p_1(xt)}{xt}\ge\frac{p_1(t)}{t},$$

звідки маємо $p_1(xt) \le xp_1(t)$, $t \ge 0$, $x \ge 1$. Отже, якщо $p_1(t) \ge 2p'(x)$, то $tp'(xt) \ge 2p'(x)$. Тому для $x \ge 1$

$$\int\limits_{\{t:\ p_1(t)\ge 2p'(x)\}} g(t)f(tx)\nu(dt) \le \int\limits_{\{t:\ tp_1'(tx)\ge 2p'(x)\}} g(t)f(tx)\nu(dt) \le$$

$$\le \frac{1}{2p'(x)} \int\limits_{\{t:\ tp_1'(tx)\ge 2p'(x)\}} g(t)f(tx)\nu(dt) \le \frac{1}{2p'(x)} F'(x) = \frac{1}{2} F(x).$$

Нехай R таке, що $p_1(R) = 2p'(r)$. Тоді

$$S(R, r) = F(r) - \int\limits_{\{t:\ p_1(t)\ge 2p'(r)\}} g(t)f(tr)\nu(dt) \le \frac{1}{2} F(r).$$

Звідси для $x \ge r$ маємо

$$A(R, x) = \frac{1}{S(R, x)} - \frac{1}{F(x)} \le \frac{1}{S(R, r)} \le \frac{2}{F(r)}.$$

Зауважимо тепер, що для функції $\psi(x) = p_1(tx) - \alpha p(x)$ при $x < r$, $\alpha \le 2$ і t таких, що $p_1(t) \ge 2p'(r)$, виконується $\psi'(x) = tp_1'(tx) - \alpha p'(x) \ge (2-\alpha)p'(r)$. Тому, ψ є неспадною і для кожного фіксованого t такого, що $p_1(t) \ge 2p'(r)$, при $x < r$ отримуємо $\psi(x) \le \psi(r)$. Отже, для $x < r$ маємо

$$\frac{F(x) - S(R, x)}{F^{\alpha}(x)} = \int\limits_{p_1(t)\ge 2p'(r)} g(t)\exp\{p_1(tx) - \alpha p(x)\}\nu(dt) \le$$

$$\le \int\limits_{p_1(t)\ge 2p'(r)} g(t)\exp\{p_1(tx) - \alpha p(x)\}\nu(dt) = \frac{F(r) - S(R, r)}{F^{\alpha}(r)}.$$

Для оцінки $A(R, x)$ при $x < r$ отримуємо

$$A(R, x) = \frac{F(x) - S(R, x)}{F^2(x)}\left(1 - \frac{F(x) - S(R, x)}{F(x)}\right)^{-1} \le$$

$$\le \frac{F(r) - S(R, r)}{F^2(r)}\left(1 - \frac{F(r) - S(R, r)}{F(r)}\right)^{-1} = A(R, r) \le \frac{1}{F(r)}.$$

Отже, $\sigma(R, F) = \sup\{A(R, x) \colon x \in \mathbb{R}_+\} \le 2/F(r)$.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай h — додатна неспадна на $[0; +\infty)$ функція. Якщо $F \in I(\nu, f)$ і*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dh(\ln \nu_0(t))}{t} < +\infty, \qquad \nu_0(t) = \nu\{x \ge 0 \colon \ln f(x) \le t\}, \tag{3}$$

то

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{h(\ln \nu_0(r))} \ln \frac{1}{\sigma(r, F)} = +\infty.$$

Доведення. Нехай $p(r) = \ln F(r)$, $p_1(r) = \ln f(r)$, $R \ge 1$ таке, що $p_1(R) = 2p'(r)$. З огляду на лему досить довести, що

$$h(\ln \nu_0(R)) = o(\ln F(r))$$

принаймні при $r = r_j \to +\infty$. Умова (3) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{h(\ln \nu_0(t))}{t^2} dt < +\infty.$$

Із збіжності останнього інтеграла випливає [1, с. 224], що існує додатна неперервна зростаюча функція ψ така, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \quad h(\ln \nu_0(t)) = o(\psi^{-1}(t)), \quad t \to +\infty, \tag{4}$$

де ψ^{-1} — обернена функція до ψ. Далі, як і в [1], застосовуємо лему 6.15 [5, с. 359], згідно з якою множина $G = \{ r > 0 : p'(r) > \psi_1(p(r)) \}$ має скінченну міру, як тільки $\int^{+\infty} dt / \psi_1(t) < +\infty$. Виберемо $\psi_1(t) = \psi(t)/2$. Тоді при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри $p_1(R) = \ln f(R) = 2p'(r) \le \psi(p(r))$. І остаточно, якщо пригадати, що $R \le \ln f(R)$, $R \ge 0$, звідси і з (4) при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри отримуємо

$$h(\ln \nu_0(R)) \le h(\ln \nu_0(p_1(R))) = o\left(\psi^{-1}(p_1(R))\right) = o\left(\psi^{-1}(\psi(\ln F(r)))\right) = o(\ln F(r)).$$

Теорему доведено.

Зауваження. Насправді за умови (3) ми довели дещо сильніше співвідношення

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{1}{h(\ln \nu_0(\ln f(r)))} \ln \frac{1}{\sigma(r, F)} = +\infty.$$

Наслідок 1. *Якщо $F \in E(\lambda, f)$, h — додатна і неспадна на $[0; +\infty)$ функція і*

$$\int^{+\infty} \frac{dh(\ln n_f(t))}{t} < +\infty, \quad n_f(t) = \sum_{\ln f(\lambda_n) \le t} 1,$$

то виконується співвідношення (2).

Доведення. Досить застосувати теорему, зауваживши, що

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(xt) dn(t),$$

для деякої функції $a(x)$ такої, що $a(\lambda_n) = a_n$, а також, що $\nu_0(t) = n_f(t)$ — лічильна функція послідовності $(\ln f(\lambda_n))$, якщо міру ν вибрати так, щоб $\nu_0(t) = n(t)$.

При $f(x) = e^x$ з наслідку 1 отримуємо теорему [1]. Інший наслідок з теореми 1 отримаємо при $h(x) = x$.

Наслідок 2. *Якщо $F \in E(\lambda, f)$ і*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} < +\infty, \tag{5}$$

то співвідношення (2) *виконується з* $h(x) = x$.

Доведення. Вище вже відзначалось, що умова

$$\int^{+\infty} \frac{d \ln n_f(t)}{t} < +\infty, \quad n_f(t) = \sum_{\alpha_n \le t} 1, \quad \alpha_n = \ln f(\lambda_n),$$

є рівносильною умові $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n\alpha_n) < +\infty$. Залишилось скористатися наслідком 1.

Теорема 2. *Нехай $F \in I(\nu, f)$ і умова* (3) *виконується з* $h(x) = x$. *Тоді співвідношення*

$$\ln F(x) \le \big(1 + o(1)\big) \ln \mu(x), \tag{6}$$

де $\mu(x) = \sup\{g(t)f(tx)\colon t \in \operatorname{supp} \nu\}$, *справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної міри.*

Доведення. Зберігаємо позначення з доведення леми і теореми 1. З нерівності (3) випливає, що для $x \ge 1$

$$F(x) \le 2 \int\limits_{\{t\colon p_1(t) \le 2p'(x)\}} g(t) f(tx) \nu(dt) \le 2\mu(x) \nu\{t\colon p_1(t) \le 2p'(x)\},$$

звідки за лемою 6.15 [5] при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри знову маємо

$$\ln F(x) \le \ln 2 + \ln \mu(x) + \ln \nu_0(\psi(p(x))), \tag{7}$$

де ψ — додатна неперервна зростаюча функція така, що одночасно виконуються умови (4) з $h(x) = x$. Застосування другого співвідношення з (4) завершує доведення теореми 2.

З теореми 2 безпосередньо випливає теорема з [6].

Наслідок 3. *Якщо* $F \in E(\lambda, f)$ *і виконується умова* (5), *то співвідношення* (6), *де* $\mu(x) = \sup\{a_n f(\lambda_n x)\colon n \ge 0\}$, *справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної міри.*

Доведення. Рівносильність умов (5) і (3) з $h(x) = x$ та мірою ν такою, що $\nu_0(t) = n_f(t)$, встановлено у доведенні наслідку 2.

Відзначимо також, що при $f(x) = e^x$ з наслідку 3 отримуємо теорему 1 з [7], встановлену в класі $D(\lambda)$.

3. Швидкість збіжності рядів із класу $T(\lambda, \beta, \tau)$. Твердження, подібні до отриманих вище, можна одержати і для складніших об'єктів, ніж ті, що зображаються інтегралами з класу $I(\nu, f)$. Зокрема, в [8, 9] доведено, що якщо $F \in T(\lambda, \beta, \tau)$ і виконується умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty,$$

то співвідношення (6) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E такої, що $\int_E dx < +\infty$ у випадку, коли $\tau'(x) \ge 1$, $x \ge x_0$, та $\int_E d\tau(x) < +\infty$ у випадку, коли $\tau'(x) \le 1$, $x \ge x_0$, де $\mu(x) = \sup\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}\colon n \ge 0\}$. При цьому від кожної з послідовностей λ, β окремо вимагаємо лише, щоб $\{\lambda_n\colon n \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{\beta_n\colon n \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$. Далі у цьому пункті також вимагаємо лише, щоб виконувались ці дві умови.

Дотримуючись схеми доведення леми і теореми 1, переконуємось, що правильною є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* h — *додатна неспадна на* $[0; +\infty)$ *функція і* $\tau'(x) \ge 1$, $x \ge x_0$. *Якщо* $F \in T(\lambda, \beta, \tau)$ *і*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dh(\ln n_+(t))}{t} < +\infty, \qquad n_+(t) = \sum_{\lambda_n + \beta_n \le t} 1, \tag{8}$$

то виконується співвідношення (2).

Як і вище, з теореми 3 отримуємо, що співвідношення (2) виконується з $h(x) = x$, як тільки виконується умова (7).

Доведення. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $\tau'(x) \ge 1$, $x \ge 0$. З умови (8) випливає, що послідовність $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$ не може мати скінченних точок скупчення. Позначимо $p(x) = \ln F(x)$, $N = n_+(2p'(r)) - 1$, $r > 0$. Тоді

$$\sum_{\alpha_n > 2p'(x)} a_n e^{x\lambda_n + \beta_n \tau(x)} \le \sum_{\alpha_n > 2p'(x)} \frac{\lambda_n + \tau'(x)\beta_n}{\alpha_n} a_n e^{x\lambda_n + \beta_n \tau(x)} \le \frac{1}{2} F(x).$$

Звідси, зокрема, маємо $S_N(r) = \sum_{\alpha_n \le 2p'(r)} a_n e^{r\lambda_n + \beta_n \tau(r)} \ge F(r)/2$, а також для $x \ge r$

$$A_N(x) = \frac{1}{S_N(x)} - \frac{1}{F(x)} \le \frac{1}{S_N(r)} \le \frac{2}{F(r)}. \tag{9}$$

Враховуючи, що функція $\psi_n(x) = x\alpha_n + \tau(x)\beta_n - \eta p(x)$ для всіх n таких, що $\alpha_n \ge 2p'(r)$, та для $\eta \le 2$ є неспадною на інтервалі $(0; r)$, при $x < r$ послідовно отримуємо

$$\frac{F(x) - S_N(x)}{F^{\eta}(x)} = \sum_{\alpha_n > 2p'(r)} a_n e^{\psi_n(x)} \le \sum_{\alpha_n > 2p'(r)} a_n e^{\psi_n(r)} = \frac{F(r) - S_N(r)}{F^{\eta}(r)}.$$

Тому, як і при доведенні леми, при $x < r$

$$A_N(x) = \frac{F(x) - S_N(x)}{F^2(x)} \left(1 - \frac{F(x) - S_N(x)}{F(x)}\right)^{-1} \le$$

$$\le \frac{F(r) - S_N(r)}{F^2(r)} \left(1 - \frac{F(r) - S_N(r)}{F(r)}\right)^{-1} = A_N(r) \le \frac{1}{F(r)}. \tag{10}$$

Завершує доведення теореми 3 практично дослівне повторення міркувань з доведення теореми 1. Застосовуючи нерівності (9) і (10), для всіх $r \ge 1$ маємо $\sigma_N(F) \ge 2/F(r)$. Тому досить довести, що $h(\ln(N+1)) = o(\ln F(r))$ хоча б вздовж деякої послідовності $r = r_j \to +\infty$. Послідовно застосовуючи лему 6.15 [5] та друге співвідношення з (4) (з $n_+(t)$ замість $\nu_0(t)$), при $r \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри одержуємо

$$h(\ln(N+1)) = h(\ln n_+(2p'(r))) \le h(\ln n_+(\psi(p(r)))) = o(\ln F(r)).$$

Теорему 3 доведено.

З теореми 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай h — додатна неспадна на $[0; +\infty)$ функція і $0 < \tau'(x) \le 1$ $(x \ge x_0)$, $F \in T(\lambda, \beta, \tau)$. Якщо виконується умова* (8), *то правильною є рівність* (2).

Доведення. Застосовуємо твердження теореми 3 до функції $F_1(x) = F(\tau^{-1}(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\{\tau^{-1}(x)\lambda_n + x\beta_n\}$, де τ^{-1} — обернена функція до функції τ. Зрозуміло, що $F_1 \in T(\beta, \lambda, \tau^{-1})$.

Неважко зрозуміти, що попередні міркування є правильними для функцій F, що зображаються для всіх $x \ge 0$ інтегралами вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(t) f(tx + \beta(t)\tau(x)) \nu(dt),$$

де $\beta(t)$ — додатна функція, $\tau(x)$ така, що $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_0)$, а f — додатна диференційовна і така, що $\ln f(x)$ – опукла. З огляду на подібність міркувань залишимо їх поза розглядом. Відзначимо лише, що в умовах, достатніх для справедливості співвідношення з теореми 1 та співвідношення (6) з теореми 2, за функцію $\nu_0(t)$ слід взяти

$$\nu_0(x) = \nu\{t : \ln f(t + \beta(t)) \le x\}.$$

4. Необхідність умов у класі $T(\lambda, \beta, \tau)$. Доведемо спочатку необхідність умови (8) для справедливості співвідношення (2) з $x = O(h(x))$, $x \to +\infty$. Для цього скористаємось конструкцією з [8].

Теорема 4. *Нехай h — неспадна додатна функція така, що $x = O(h(x))$, $x \to +\infty$. Припустимо, що невід'ємні послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ — неспадні, $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$, $n \to +\infty$, і $0 \le \tau'(x) \le 1$, $x \ge x_0$. Якщо умова* (8) *не виконується, то існує функція $F \in T(\lambda, \beta, \tau)$ така, що для неї не виконується* (2).

Доведення. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $0 \le \tau'(x) \le 1$, $x \ge 0$, $h(0) = 0$ та $\lambda_0 = \beta_0 = 0$. Нехай $\delta_0 = 0$, $c_n = h(\ln(n+1)) - (\ln n)$, $\delta_n = c_n/(\lambda_n + \beta_n)$, $n \ge 1$. Означимо $\kappa_0 = 1$, $\kappa_{n+1} = \min\{\kappa_n + \delta_n; \tau^{-1}(\tau(\kappa_n) + \delta_n)\}$. Зауважимо, що $\tau^{-1}(\tau(\kappa_n) + \delta_n) - \kappa_n = \delta_n/\tau'(\tau^{-1}(\tau(\kappa_n) + \theta_n\delta_n)) \le \delta_n$, де $0 < \theta_n < 1$, тому $\kappa_{n+1} = \kappa_n + \delta_n$.

Крім того, з того, що умова (8) не виконується, випливає $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n = +\infty$, звідки

$$\kappa_n \uparrow +\infty, \quad n \uparrow +\infty. \tag{11}$$

Нехай тепер $\Delta_s = (\lambda_s - \lambda_{s-1})\kappa_s + \tau(\kappa_s)(\beta_s - \beta_{s-1})$, $s \ge 1$, та $\ln a_n = -\sum_{s=1}^{n} \Delta_s$, $n \ge 1$. Оскільки

$$0 \le (\kappa_{k+1} - \kappa_k)\lambda_k + (\tau(\kappa_{k+1}) - \tau(\kappa_k))\beta_k \le \delta_k(\lambda_k + \beta_k) = h(\ln(k+1)) - h(\ln k),$$

то з рівності

$$l_n = \ln a_n + \kappa_{n+1}\lambda_n + \beta_n\tau(\kappa_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n}[(\kappa_{k+1} - \kappa_k)\lambda_k + (\tau(\kappa_{k+1}) - \tau(\kappa_k))\beta_k]$$

випливає, що $0 \le l_n \le h(\ln(n+1))$, $n \ge 1$. Тому з (11) випливає, що $-\ln|a_n|/(\lambda_n + \beta_n) \to +\infty$, $n \to +\infty$, а за умови $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$, $n \to +\infty$, безпосередньо отримуємо, що функція $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n)$ належить до класу $T(\lambda, \beta, \tau)$.

Перевірка того, що $\mu(x, F) = \max\{a_k \exp(x\lambda_k + \tau(x)\beta_k) : k \ge 0\} = a_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n)$ при $x = \kappa_{n+1}$, здійснюється дослівним повторенням міркувань з [8]. Справді, нехай $l_k(x) = x\lambda_k + \tau(x)\beta_k$. При $k < n$ і $x = \kappa_{n+1}$ отримуємо

$$\ln a_k + l_k(x) - \ln a_n - l_n(x) = \sum_{s=k+1}^{n} \Delta_s + \kappa_{n+1}(\lambda_k - \lambda_n) + \tau(\kappa_{n+1})(\beta_k - \beta_n) =$$

$$= \sum_{s=k+1}^{n} [(\lambda_s - \lambda_{s-1})(\kappa_s - \kappa_{n+1}) + (\beta_s - \beta_{s-1})(\tau(\kappa_s) - \tau(\kappa_{n+1}))] \le 0,$$

а також при $k > n$ і $x = \kappa_{n+1}$

$$\ln a_k + l_k(x) - \ln a_n - l_n(x) = -\sum_{s=n+1}^{k} \Delta_s + \kappa_{n+1}(\lambda_k - \lambda_n) + \tau(\kappa_{n+1})(\beta_k - \beta_n) =$$

$$= -\sum_{s=n+1}^{k} [(\lambda_s - \lambda_{s-1})(\kappa_s - \kappa_{n+1}) + (\beta_s - \beta_{s-1})(\tau(\kappa_s) - \tau(\kappa_{n+1}))] \le 0.$$

Тому

$$\ln \mu(\kappa_{n+1}, F) = \ln a_n + l_n(\kappa_{n+1}) \le h(\ln(n+1)), \quad n \ge 1. \tag{12}$$

Для кожного $n \ge 1$ тепер маємо

$$\sigma_n(F) \geq \frac{1}{S_n(\kappa_{n+1})} - \frac{1}{F(\kappa_{n+1})} \geq \frac{1}{S_n(\kappa_{n+1})} - \frac{1}{S_{n+1}(\kappa_{n+1})} =$$
$$= \frac{\mu(\kappa_{n+1}, F)}{S_n(\kappa_{n+1})S_{n+1}(\kappa_{n+1})} \geq \frac{1}{(n+1)(n+2)\mu(\kappa_{n+1}, F)}.$$

Застосування нерівності (12) і умови $x = O(h(x))$, $x \to +\infty$, завершує доведення.

З теорем 3 і 4 у випадку, коли $x = O(h(x))$, $x \to +\infty$, отримуємо наступний критерій.

***Наслідок* 5.** *Нехай h — додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція така, що $x = O(h(x))$, $x \to +\infty$, а неспадні послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ такі, що $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$, $n \to +\infty$. Для того щоб для кожної функції $F \in T(\lambda, \beta, \tau)$ виконувалось співвідношення* (2), *необхідно і досить, щоб справджувалась умова* (8).

Зазначимо, що в інтерпретації для класу $D(\lambda)$ теорема 4 збігається з теоремою 2 [3], а наслідок 5 — з теоремою 3 [3].

5. Необхідність умов у класі $I(\nu, f)$. Нехай спочатку $h(x) = x$, $f_0(x) = e^x$. Доведемо наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай ν — зліченно-адитивна міра на $\mathbb{R}_+$, для якої*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} = +\infty, \qquad \ln \nu_0(t) = O(t), \qquad t \to +\infty, \tag{13}$$

а також

$$(\exists \Delta > 0)(\exists K > 0): \nu_0(x+\Delta)/\nu_0(x) \geq 1 + (\nu_0^K(x) - 1)^{-1}, \qquad x \geq x_0, \tag{14}$$

де $\nu_0(t) = \nu\{x \geq 0 : x \leq t\}$. Існує функція $F \in I(\nu, f_0)$ така, що

$$\ln \frac{1}{\sigma(r, F)} = O(\ln \nu_0(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Доведення. Нехай

$$V(t) = \int_1^t \frac{\nu_0(x)}{x} dx, \qquad \psi(y) = -y \int_1^y t^{-2} \ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right) \Big/ \ln(t+1)\right) dt.$$

Як зазначалось вище, перша з умов (13) рівносильна умові $\int^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t) dt = +\infty$. Оскільки $V(t) \geq \nu_0(t/e)$ для $t \geq e$, то

$$\int_1^{+\infty} t^{-2} \ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right) \Big/ \ln(t+1)\right) dt = +\infty.$$

Враховуючи, що за умовою (13) $\ln \nu_0(t) = O(t) = O(|\psi(t)|)$, $t \to +\infty$, неважко переконатись, що для всіх $x \geq 0$

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \exp(\psi(t) + tx) \nu(dt) < +\infty,$$

тобто $F \in I(\nu, f_0)$.

Позаяк

$$V\left(\frac{y+1}{2}\right) \leq \nu_0\left(\frac{y+1}{2}\right) \ln \frac{y+1}{2} \leq \nu_0\left(\frac{y+1}{2}\right) \ln(y+1), \tag{15}$$

а також

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} = -B\frac{\left[\nu_0\left(\frac{y+1}{2}\right)\ln(y+1) - V\left(\frac{y+1}{2}\right)\right]}{y(y+1)\ln(y+1)V\left(\frac{y+1}{2}\right)} \le 0,$$

функція $\psi_0(y,x)=\psi(y)+yx$ є вгнутою функцією від y для кожного фіксованого $x\ge 0$. Єдину точку максимуму функції $\psi_0(y,x)$ для кожного фіксованого $x\ge 0$ можна визначити з рівняння

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y} = -B\int_1^y t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt - \frac{B}{y}\ln\left(V\left(\frac{y+1}{2}\right)\Big/\ln(y+1)\right) + x = 0. \quad (16)$$

Зазначимо тепер, що для всіх досить великих y існує єдине $x^*=x(y)$, що є розв'язком рівняння (16) при $x=x^*$, та $t=y$ є точкою максимуму функції $\psi_0(t,x^*)$. Крім того, з (16) і (15) для досить великих y випливає

$$\ln\mu_*(x^*)=\sup\left\{\psi_0(t,x^*)\colon t\ge 1\right\}=\psi(y)+yx^*=\ln\left(V\left(\frac{y+1}{2}\right)\Big/\ln(y+1)\right)\le\ln\nu_0(y), \quad (17)$$

а також з умови (14) випливає нерівність

$$\ln\frac{\nu_0(y+\Delta)-\nu_0(y)}{\nu_0(y+\Delta)} \ge -K\ln\nu_0(y). \quad (18)$$

Тепер для $y\ge 1$

$$\sigma(y,F) \ge \frac{1}{S(y,x^*)} - \frac{1}{F(x^*)} \ge \frac{1}{S(y,x^*)} - \frac{1}{S(y+\Delta,x^*)} \ge \frac{\int_y^{y+\Delta}\exp\left(\psi_0(t,x^*)\right)\nu(dt)}{\mu^2(x^*)\nu_0(y)\nu_0(y+\Delta)}. \quad (19)$$

За нерівністю (15) при $y\ge 1+\Delta$ маємо

$$(y+\Delta)\int_1^{y+\Delta} t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt - y\int_1^y t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt =$$

$$= y\int_y^{y+\Delta} t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt + \Delta\int_1^{y+\Delta} t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt \le$$

$$\le y\int_y^{y+\Delta} t^{-2}\ln\nu_0\left(\frac{t+1}{2}\right)dt + \Delta\int_1^{y+\Delta} t^{-2}\ln\nu_0\left(\frac{t+1}{2}\right)dt \le$$

$$\le \left(\frac{\Delta}{y+\Delta}+\Delta\right)\ln\nu_0\left(\frac{y+1+\Delta}{2}\right) \le C(\Delta)\ln\nu_0(y),$$

де $C(\Delta)=\Delta/(2\Delta+1)+\Delta$. Тому при $y\ge 1+\Delta$

$$\int_y^{y+\Delta}\exp\{\psi(y)+yx^*\}\nu(dt) \ge$$

$$\ge \exp\left\{-(y+\Delta)\int_1^{y+\Delta} t^{-2}\ln\left(V\left(\frac{t+1}{2}\right)\Big/\ln(t+1)\right)dt + yx^*\right\}(\nu_0(y+\Delta)-\nu_0(y)) \ge$$

$$\ge \mu_*(x^*)(\nu_0(y+\Delta)-\nu_0(y))\exp(-C(\Delta)\ln\nu_0(y)).$$

Звідси, використовуючи (17)–(19), при $y\to+\infty$ отримуємо

$$\ln \frac{1}{\sigma(y,F)} \leq \ln \mu_*(x^*) + (1 + C(\Delta)) \ln \nu_0(y) - \ln \frac{\nu_0(y+\Delta) - \nu_0(y)}{\nu_0(y+\Delta)} \leq$$
$$\leq (2 + K + C(\Delta)) \ln \nu_0(y).$$

Теорему 5 доведено.

Зауваження. Умови (13) і (14) є технічними і здається правдоподібним, що їх можна позбутись. Зокрема, як видно з доведення, умову (13) можна замінити слабкішою умовою $\ln \nu_0(t) = o(|\psi(t)|)$, $t \to +\infty$, або навіть, при більш акуратному оцінюванні, умовою $\ln \nu_0(t) = O(|\psi(t)|)$, $t \to +\infty$. У випадку, коли остання умова не виконується, може виявитись, що $\int_0^{+\infty} \exp\{\psi(y)\}\nu(dy) = +\infty$.

З теорем 1 і 5 отримаємо наступне твердження. Нехай $I(\nu) = \bigcup_f I(\nu, f)$, де об'єднання береться за всіма функціями f такими, як у формулюванні теореми 1.

Наслідок 6. *Нехай зліченно-адитивна міра* ν *така, що* $\ln \nu_0(t) = O(t)$, $t \to +\infty$, *і виконується умова* (14). *Для того щоб для кожної функції* $F \in I(\nu)$ *виконувалось співвідношення*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln \nu_0(r)} \ln \frac{1}{\sigma(r, F)} = +\infty,$$

необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} < +\infty, \tag{20}$$

де $\nu_0(t) = \{x \geq 0 : x \leq t\}$.

Доведення. Необхідність умови (20) отримуємо з теореми 5, вибираючи $f(x) = e^x$. Навпаки, якщо $F \in I(\nu)$, то існує функція f така, як у формулюванні теореми 1, що $F \in I(\nu, f)$, але $\ln f(t) \geq ct$, $t \geq 0$, для деякого $c > 0$, звідки

$$\nu\{t \geq 0 : \ln f(t) \leq x\} \leq \nu\{t \geq 0 : t \leq x/c\} = \nu_0(x/c).$$

Тому з умови (20) випливає справедливість умови (3) теореми 1. Застосування останньої завершує доведення.

1. *Скасків О. Б.* До теореми Шеремети про швидкість збіжності додатних рядів Діріхле // Мат. студії. – 1999. – **12**, № 2. – С. 222 – 224.
2. *Sheremeta M. N.* On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series // Anal. math. – 1991. – **17**, № 1. – P. 47 – 57.
3. *Орищин О. Г., Скасків О. Б.* Про швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 2. – С. 167 – 174.
4. *Орищин О. Г., Скасків О. Б.* Швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле // Допов. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 41 – 44.
5. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. – London: Acad. Press, 1989. – Vol. 2. – XXI + 591p.
6. *Скасків О. Б., Трусевич О. М.* Співвідношення типу Бореля для узагальнень ряду експонент // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1580 – 1584.
7. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 1. – С. 41 – 47.
8. *Скасків О. Б., Трусевич О. М.* Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора – Діріхле // Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 79 – 82.
9. *Скасків О. Б., Трусевич О. М.* Теореми типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 60 – 63.

Одержано 11.07.2003