УДК 517.95

С. П. Лавренюк (Краків. політехніка, Польща; Львів. нац. ун-т),
Н. П. Процах (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ВАРІАЦІЙНІ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ НЕРІВНОСТІ

In a bounded domain of the space $\mathbb{R}^{n+2}$, we consider variational ultraparabolic inequalities with an initial condition. We obtain conditions for the existence and uniqueness of the solution of such problem. As a special case, we establish the solvability of mixed problems for some classes of nonlinear ultraparabolic equations with nonclassical and classical boundary conditions.

В обмеженій області простору $\mathbb{R}^{n+2}$ розглянуто варіаційні ультрапараболічні нерівності з початковою умовою. Одержано умови існування та єдиності розв'язку такої задачі. Як частковий випадок отримано розв'язність мішаних задач для деяких класів нелінійних ультрапараболічних рівнянь з некласичними та класичними крайовими умовами.

Варіаційні нерівності виникають при розв'язуванні багатьох задач механіки та фізики. Дослідженню задач для нелінійних параболічних нерівностей присвячено, наприклад, праці [1 – 4]. Крім того, в [2] методом півгруп досліджено задачу для нерівності з початковою умовою, яка містить деякі ультрапараболічні нерівності.

Задачі для ультрапараболічних рівнянь досліджено в [5 – 19]. Задачу Коші для лінійних ультрапараболічних рівнянь, окремі з яких є узагальненням рівняння Колмогорова, та деякі властивості розв'язків цих рівнянь розглянуто у працях [5 – 11]. Зокрема, побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, одержано інтегральні зображення розв'язків. Розв'язність мішаних задач для деяких лінійних ультрапараболічних рівнянь доведено у статтях [12 – 14]. Менш досліджені нелінійні ультрапараболічні рівняння [15 – 19]. Так, у праці [15] знайдено апріорні оцінки розв'язків для нелінійного ультрапараболічного рівняння з виродженням, у [16] за допомогою методу регуляризації та нерухомої точки отримано однозначну розв'язність мішаної задачі в обмеженій області, в [17] досліджено розв'язність задач в обмежених областях загальної форми, у [18, 19] за допомогою методу Гальоркіна одержано розв'язність мішаної задачі для сильно нелінійного ультрапараболічного рівняння в узагальнених просторах Соболєва.

У цій праці в обмеженій області простору $\mathbb{R}^{n+2}$ розглянуто варіаційні ультрапараболічні нерівності з початковою умовою. За допомогою методу Гальоркіна одержано умови існування та єдиності розв'язку таких задач. Як частковий випадок отримано розв'язність мішаних задач для деяких класів нелінійних ультрапараболічних рівнянь з некласичними та класичними крайовими умовами. Одну з мішаних задач для таких класів рівнянь досліджено в [18, 19].

Метою роботи є дослідження існування та єдиності розв'язку ультрапараболічної нерівності з початковою умовою в обмеженій області.

Формулювання задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею Γ, $\Gamma \in C^1$, $\hat{\Omega} = \Omega \times (0, y_0)$, $Q_T = \hat{\Omega} \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $0 < y_0 < \infty$, $\hat{\Omega}_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\Pi_T = (0, y_0) \times (0, T)$, $W_0(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_1(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$, $W(\Omega)$ — замкнений підпростір такий, що $W_0(\Omega) \subset W(\Omega) \subset W_1(\Omega)$, простір $U(\Omega)$ є підпростором $H^1(\Omega)$ таким, що $W(\Omega)$ є щільним в $U(\Omega)$: $W(\Omega) \subset U(\Omega)$, K — опукла замкнена підмножина в $W(\Omega)$, яка містить нульовий елемент, простори $V_0(Q_T) = L^2(\Pi_T; W^{1,p}(\Omega))$,

$$V_1(Q_T) = \left\{ v\colon v \in L^2(\Pi_T; W^{1,p}(\Omega)),\ v_y, v_t \in L^2(Q_T),\ v(x, y_0, t) = 0 \right\}$$

з нормою

$$\|v; V_1(Q_T)\| = \|v; L^2(Q_T)\| + \|\nabla_x v; L^p(Q_T)\| + \|v_y; L^2(Q_T)\| + \|v_t; L^2(Q_T)\|.$$

Тут $H^l(O) = W^{l,2}(O)$, а $\|v; W^{k,m}(O)\| = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v; L^m(O)\|$, $k, m, l \in \mathbb{N}$, $O \in \{\Omega, Q_T\}$.

Означення. *Функцію $u \in V_1(Q_T)$, $u \in K$ для майже всіх $(y, t) \in \Pi_T$, назвемо розв'язком варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i}) -$$
$$- f(x,y,t)(v-u)\Bigg]dx\,dy\,dt \ge 0, \tag{1}$$

якщо вона задовольняє цю нерівність для всіх $v \in V_0(Q_T)$, $v \in K$ для майже всіх $(y, t) \in \Pi_T$, для всіх $\tau \in (0, T)$ та початкову умову $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів нерівності (1) виконуються такі умови:

A) $a_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_i(x) \ge a_0 > 0$ для всіх $x \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$;

L) λ, $\lambda_y \in L^\infty(Q_T)$, $\lambda(x, y, t) \ge 0$, $\lambda \not\equiv 0$, для майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$;

M) m — найменше натуральне число, таке, що виконується умова:

якщо $u \in L^2((0, y_0); H^m(\Omega))$, то $(|\nabla u|^{p-2}u_{x_ix_i})^2 \in L^1(\hat{\Omega})$, $i \in \overline{1, n}$.

Існування та єдиність розв'язку. Нехай β — оператор штрафу, пов'язаний з K: $\beta(\omega) = J(\omega - P_K(\omega))$, де J — оператор двоїстості між $U^*(\Omega)$ і $U(\Omega)$, а P_K — оператор проектування на K. Оператор β — монотонний, обмежений, семінеперервний [2, с. 384], $K = \{u : u \in U(\Omega),\ \beta(u) = 0\}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A), L) *і* M), $p > 2$, f_y, f_t, $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in L^2((0, y_0); H^m(\Omega))$, $u_{0_y} \in L^2(\hat{\Omega})$, $\int_0^T\int_\Omega \frac{(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}dx\,dt < +\infty$, $\lambda_t \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in K$.

Тоді існує розв'язок нерівності (1).

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x) : k \ge 1\}$ — база простору $H^m(\Omega) \cap W(\Omega)$,

$$\varphi^{k,s}(x,y) = \varphi^k(x)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y,$$
$$u^{\varepsilon,j}(x,y,t) = \sum_{k,s=1}^{j} c_{ks}^j(t)\varphi^{k,s}(x,y), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $c_{ks}^j(t)$ — розв'язок задачі

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}\Bigg[u_t^{\varepsilon,j}\varphi^{k,s} - \lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,j}\varphi^{k,s} + \sum_{k,s=1}^{n} a_i(x)\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}u_{x_i}^{\varepsilon,j}\varphi_{x_i}^{k,s} - f(x,y,t)\varphi^{k,s}\Bigg]dx\,dy +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{y_0}\langle\beta(u^{\varepsilon,j}), \varphi^{k,s}\rangle dy = 0, \tag{3}$$

$$c_{ks}^j(0) = u_{0,k,s}^j \quad k, s = \overline{1, j}, \tag{4}$$

$$u_0^j(x,y) = \sum_{k,s=1}^{j} u_{0,k,s}^j \varphi^{k,s}(x,y), \qquad \lim_{j\to\infty} \left\| u_0 - u_{0,k,s}^j \right\|_{W_0(\hat\Omega)} = 0.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток між $U(\Omega)$ і $U^*(\Omega)$.

Домноживши (3) на $c_{ks}^j(t)$, підсумувавши по s та k і проінтегрувавши по t на проміжку $[0,\tau]$, $\tau \le T$, отримаємо

$$\int_{Q_\tau} \left[u_t^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} - \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p - f(x,y,t) u^{\varepsilon,j} \right] dx\,dy\,dt \; +$$

$$+ \; \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_\tau} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle \, dy\,dt = 0.$$

Оцінимо кожний доданок останньої рівності:

$$\mathcal{J}_1 = \int_{Q_\tau} u_t^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} \, dx\,dy\,dt = \frac{1}{2} \int_{\hat\Omega_\tau} (u^{\varepsilon,j})^2 \, dx\,dy - \frac{1}{2} \int_{\hat\Omega_0} (u_0^{\varepsilon,j})^2 \, dx\,dy,$$

$$\mathcal{J}_2 = -\int_{Q_\tau} \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} \, dx\,dy\,dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x,0,t) (u^{\varepsilon,j}(x,0,t))^2 \, dx\,dt \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \lambda_y(x,y,t) (u^{\varepsilon,j})^2 \, dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_3 = \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx\,dy\,dt \ge a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_4 = \int_{Q_\tau} f(x,y,t) u^{\varepsilon,j} \, dx\,dy\,dt \le \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \left[|f(x,y,t)|^2 + \left| u^{\varepsilon,j} \right|^2 \right] dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_5 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_\tau} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle \, dy\,dt \ge 0.$$

Звідси одержимо нерівність

$$\int_{\hat\Omega_\tau} (u^{\varepsilon,j})^2 dx\,dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x,0,t) (u^{\varepsilon,j})^2 dx\,dt + 2a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx\,dy\,dt \; +$$

$$+ \; \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Pi_\tau} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle \, dy\,dt \le \int_{Q_T} \left[|f|^2 + (-\lambda_y + 1)(u^{\varepsilon,j})^2 \right] dx\,dy\,dt + \int_{\hat\Omega_0} (u_0^j)^2 dx\,dy.$$

Застосувавши лему Гронуолла – Беллмана, одержимо оцінку

$$\int_{\hat\Omega_\tau} (u^{\varepsilon,j})^2 dx\,dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x,0,t) (u^{\varepsilon,j})^2 dx\,dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx\,dy\,dt \; +$$

$$+ \; \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_\tau} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle \, dy\,dt \le M_1 \left[\int_{Q_T} |f|^2 dx\,dy\,dt + \int_{\hat\Omega_0} (u_0)^2 dx\,dy \right], \tag{5}$$

в якій стала M_1 не залежить від j.

Нехай $\omega_s = \left(\dfrac{(2s-1)\pi}{2y_0} \right)^2$. Тоді $\left(\cos \dfrac{(2s-1)\pi}{2y_0} y \right)_{yy} = -\,\omega_s \cos \dfrac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$. Домножимо (3) на $c_{ks}^j(t)\omega_s$, підсумуємо по s і k, проінтегруємо по t від 0 до τ

та замінимо значення $\sum_{s,k=1}^{j} c_{ks}^{j}(t)\omega_s \varphi^{k,s}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u_{yy}^{\varepsilon,j}$. В результаті отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-u_t^{\varepsilon,j}u_{yy}^{\varepsilon,j}+\lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,j}u_{yy}^{\varepsilon,j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}u_{x_i}^{\varepsilon,j}u_{x_iyy}^{\varepsilon,j}+f(x,y,t)u_{yy}^{\varepsilon,j}\right]dx\,dy\,dt\,-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_\tau}\langle\beta(u^{\varepsilon,j}),u_{yy}^{\varepsilon,j}\rangle dy\,dt\;=\;0.$$

Перетворимо та оцінимо кожний із доданків останньої рівності окремо:

$$\mathcal{J}_6=-\int\limits_{Q_\tau}u_t^{\varepsilon,j}u_{yy}^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_\tau}u_{ty}^{\varepsilon,j}u_y^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u_y^{\varepsilon,j})^2dx\,dy-\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_{0y}^{j})^2dx\,dy,$$

$$\mathcal{J}_7=\int\limits_{Q_\tau}\lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,j}u_{yy}^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,y_0,t)(u_y^{\varepsilon,j})^2dx\,dt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\lambda_y(x,y,t)(u_y^{\varepsilon,j})^2dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_8=-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}u_{x_i}^{\varepsilon,j}u_{x_iyy}^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(p-1)\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}(u_{x_iy}^{\varepsilon,j})^2\,dx\,dy\,dt\;\ge$$

$$\ge\;a_0(p-1)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}(u_{x_iy}^{\varepsilon,j})^2dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_9=-\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)u_{yy}^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f(x,y_0,t)u_y^{\varepsilon,j}(x,y_0,t)\,dx\,dt\;+\;\int\limits_{Q_\tau}f_y(x,y,t)u_y^{\varepsilon,j}\,dx\,dy\,dt\;\le$$

$$\le\;\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left[\frac{2(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}+\frac{\lambda(x,y_0,t)}{2}(u_y^{\varepsilon,j}(x,y_0,t))^2\right]dx\,dt\;+\;\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\left|f_y\right|^2+(u_y^{\varepsilon,j})^2\right]dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{J}_{10}=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_\tau}\langle\beta(u^{\varepsilon,j}),u_{yy}^{\varepsilon,j}\rangle dy\,dt\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_\tau}\langle(\beta(u^{\varepsilon,j}))_y,u_y^{\varepsilon,j}\rangle dy\,dt\;\ge\;0,$$

оскільки з семінеперервності оператора β і з того, що $\beta(0)=0$, випливає

$$\left(\beta(u^{\varepsilon,j}(x,y+h,t))-\beta(u^{\varepsilon,j}(x,y,t))\right)\left(u^{\varepsilon,j}(x,y+h,t)-u^{\varepsilon,j}(x,y,t)\right)\;\ge\;0.$$

Врахувавши оцінки $\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_{10}$ та застосувавши лему Гронуолла – Беллмана, отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u_y^{\varepsilon,j})^2dx\,dy\;+\;\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,y_0,t)(u_y^{\varepsilon,j})^2dx\,dt\;+\;\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}(u_{x_iy}^{\varepsilon,j})^2dx\,dy\,dt\;\le$$

$$\le\;M_2\left[\int\limits_{Q_T}|f|^2dx\,dy\,dt+\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_{0y})^2dx\,dy+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\frac{(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}dx\,dt\right],\qquad(6)$$

в якій стала M_2 не залежить від j.

Розглянемо (3) при $t = 0$, домножимо на $c^j_{kst}(t)$ та підсумуємо по k, s від 1 до j:

$$\int\limits_{\hat\Omega_0} \left[(u_t^{\varepsilon,j})^2 - \lambda(x,y,0) u_y^{\varepsilon,j} u_t^{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^{p-2} u_{x_i}^{\varepsilon,j} u_{x_i t}^{\varepsilon,j} - f(x,y,t) u_t^{\varepsilon,j} \right] dx\, dy \; +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^{y_0} \langle \beta(u_0^j), u_t^{\varepsilon,j} \rangle dy = 0.$$

Оскільки $u_0 \in H^m(\Omega)$, $u_{0y} \in L^2(\hat\Omega)$, $u_0 \in K$ для всіх $y \in [0, y_0]$, то для достатньо великих j функція $u_0^j \in K$ для всіх $y \in [0, y_0]$, тобто $\beta(u^{\varepsilon,j}(x,y,0)) = 0$. Тому після перетворень попередньої формули отримаємо оцінки

$$\int\limits_{\hat\Omega_0} (u_t^{\varepsilon,j})^2 dx\, dy \le M \int\limits_{\hat\Omega_0} \Bigg[(\lambda(x,y,0) u_{0y}^j)^2 \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left((a_i(x) \left| u_{0x_i}^j \right|^{p-2} u_{0x_i}^j)_{x_i} \right)^2 + |f(x,y,0)|^2 \Bigg] dx\, dy \le M_3. \tag{7}$$

Продиференціюємо (3) по t, домножимо на $c^j_{kst}(t)$, підсумуємо по s і k та проінтегруємо по t від 0 до τ. Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^{\varepsilon,j} u_t^{\varepsilon,j} - \left(\lambda_t(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} + \lambda(x,y,t) u_{yt}^{\varepsilon,j} \right) u_t^{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)(p-1) \; \times$$

$$\times \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^{p-2} (u_{x_i t}^{\varepsilon,j})^2 - f_t(x,y,t) u_t^{\varepsilon,j} \Bigg] dx dy dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_\tau} \langle (\beta(u^{\varepsilon,j}))_t, u_t^{\varepsilon,j} \rangle dy dt = 0.$$

Застосувавши (7), оцінимо кожний доданок останньої рівності:

$$\mathcal{J}_{11} = \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^{\varepsilon,j} u_t^{\varepsilon,j} dx dy dt \ge \frac{1}{2} \int\limits_{\hat\Omega_\tau} (u_t^{\varepsilon,j})^2 dx\, dy - \frac{1}{2} M_3,$$

$$\mathcal{J}_{12} = - \int\limits_{Q_\tau} \left[\lambda_t(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} + \lambda(x,y,t) u_{yt}^{\varepsilon,j} \right] u_t^{\varepsilon,j} dx\, dy\, dt \ge$$

$$\ge -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|\lambda_t|^2 (u_y^{\varepsilon,j})^2 + (u_t^{\varepsilon,j})^2 \right] dx\, dy\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \lambda(x,0,t) (u_t^{\varepsilon,j})^2 dx dt \; +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \frac{\lambda_y}{2} (u_t^{\varepsilon,j})^2 dx dy dt,$$

$$\mathcal{J}_{13} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x)(p-1) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^{p-2} (u_{x_i t}^{\varepsilon,j})^2 dx dy dt \ge$$

$$\ge a_0(p-1) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^{p-2} (u_{x_i t}^{\varepsilon,j})^2 dx dy dt,$$

$$\mathcal{J}_{14} = \int\limits_{Q_\tau} f_t(x,y,t) u_t^{\varepsilon,j} dx dy dt \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|f_t(x,y,t)|^2 + \left| u_t^{\varepsilon,j} \right|^2 \right] dx dy dt,$$

$$\mathcal{J}_{15} = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_\tau} \langle (\beta(u^{\varepsilon,j}))_t, u_t^{\varepsilon,j} \rangle dx dy dt \ge 0.$$

Врахувавши оцінки інтегралів $\mathcal{J}_{11}-\mathcal{J}_{15}$ та застосувавши лему Гроноулла – Беллмана і оцінку (6), отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u_t^{\varepsilon,j})^2dx\,dy+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u_t^{\varepsilon,j})^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^{\varepsilon,j}\right|^{p-2}(u_{x_it}^{\varepsilon,j})^2dxdydt\le$$
$$\le M_4\left[\int\limits_{Q_T}\left[\left|f_y\right|^2+\left|f_t\right|^2\right]dxdydt+\int\limits_{\hat{\Omega}}(u_{0,y})^2dx\,dy\right],\tag{8}$$

в якій стала M_4 не залежить від j. З оцінок (5), (6), (8) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^{\varepsilon,j}:j\ge1\}$ (за якою збережемо те саме позначення):

$$u^{\varepsilon,j}\to u^\varepsilon\ \text{*-слабко в}\ L^\infty((0,T);L^2(\hat{\Omega})),\qquad u_{x_i}^{\varepsilon,j}\to u_{x_i}^\varepsilon\ \text{*-слабко в}\ L^p(Q_T),$$
$$u_y^{\varepsilon,j}\to u_y^\varepsilon\ \text{*-слабко в}\ L^\infty((0,T);L^2(\hat{\Omega})),\quad u_t^{\varepsilon,j}\to u_t^\varepsilon\ \text{*-слабко в}\ L^\infty((0,T);L^2(\hat{\Omega})).\tag{9}$$

Оскільки $u^{\varepsilon,j}\to u^\varepsilon$, $u_y^{\varepsilon,j}\to u_y^\varepsilon$ слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\hat{\Omega}))$, то $u^{\varepsilon,j}\to u^\varepsilon$ слабко в $W^{1,2}((0,y_0);L^2([0,T]\times\Omega))$. Тоді $u^\varepsilon\in C(0,y_0;L^2([0,T]\times\Omega))$, вираз $u^\varepsilon(x,y_0,t)$ має зміст і

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{Q_T}u_y^{\varepsilon,j}\upsilon\,dxdydt=\int\limits_{Q_T}u_y^\varepsilon\upsilon\,dxdydt$$

для довільних $\upsilon\in V_1(Q_T)$. Зінтегрувавши цю рівність частинами та використавши одержані збіжності, знайдемо $u^\varepsilon(x,y_0,t)=0$.

Аналогічно доводимо, що $u^\varepsilon\in C((0,T);L^2(\hat{\Omega}))$ і $u^\varepsilon(x,y,0)=u_0(x,y)$.

Оскільки оператор β є обмеженим, то

$$\left\|\beta(u^{\varepsilon,j});\ L^2(\Pi_\tau;U^*(\Omega))\right\|\le M_5\left\|u^{\varepsilon,j};\ L^2(\Pi_\tau;U(\Omega))\right\|\le M_6\left(1+\left\|u^{\varepsilon,j};V_0(Q_T)\right\|\right),$$

де M_6 не залежить від ε і j.

Позначимо через A_0 оператор, визначений рівністю

$$\langle A_0u,\upsilon\rangle_{V_0}=\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\upsilon_{x_i}dxdydt\quad\forall\,u,\,\upsilon\in V_0(Q_T).$$

Тоді $A_0(u)\in V_0^*(Q_T)$ і $\left\|A_0(u^{\varepsilon,j});V_0^*(Q_T)\right\|\le M_7$.

Нехай оператор $\mathcal{B}$ визначається рівністю

$$\langle\mathcal{B}(u),\upsilon\rangle_{U_0}=\int\limits_{\Pi_T}\langle\beta(u),\upsilon\rangle dydt\qquad\forall\,u,\,\upsilon\in U_0(Q_T),$$

де $U_0(Q_T)=\{u:u\in L^2(Q_T);\ u_{x_i}\in L^p(Q_T),\ i=\overline{1,n}\}$. Зауважимо, що

$$\left\|\mathcal{B}(u^{\varepsilon,j});V_0^*(Q_T)\right\|\le M_8,$$

тому що оскільки $V_0(Q_T)\subset U_0(Q_T)$, то $U_0^*(Q_T)\subset V_0^*(Q_T)$. Оператор $A=$ $=A_0+\mathcal{B}/\varepsilon$, який діє з $V_0(Q_T)\to V_0^*(Q_T)$, є монотонним, семінеперервним і

$$\left\|A(u^{\varepsilon,j});V_0^*(Q_T)\right\|\le M_8,$$

де M_8 не залежить від j, але залежить від ε. Тому $A(u^{\varepsilon,j})\to\chi^\varepsilon$ слабко в $V_0^*(Q_T)$.

З (3) можна отримати рівність

$$\int_Q \left[u_t^{\varepsilon,j} v^{j_0} - \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} v^{j_0} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^{p-2} u_{x_i}^{\varepsilon,j} v_{x_i}^{j_0} - f(x,y,t) v^{j_0} \right] dx\,dy\,dt \; + $$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_T} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), v^{j_0} \rangle dy dt = 0, \quad j \geq j_0,$$

яка виконується для всіх $v^{j_0} = \sum_{s,k=1}^{j_0} z_{kj_0}(t) \varphi^{s,k}(x,y)$, $z_{kj_0} \in C([0,T])$. Сукупність таких функцій v^{j_0} є щільною в просторі $V_0(Q_T)$. Перейшовши у попередній тотожності до границі за вибраною вище послідовністю, отримаємо

$$\int_{Q_T} \left[u_t^{\varepsilon} v - \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon} v - f(x,y,t) v \right] dx dy dt + \langle \chi^{\varepsilon}, v \rangle_{V_0} = 0 \quad \forall v \in V_0(Q_T). \tag{10}$$

Розглянемо послідовність $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$, де

$$0 \leq X_j = \langle A(u^{\varepsilon,j}) - A(v),\, u^{\varepsilon,j} - v \rangle_{V_0} =$$

$$= \langle A(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle_{V_0} - \langle A(u^{\varepsilon,j}), v \rangle_{V_0} - \langle A(v),\, u^{\varepsilon,j} - v \rangle_{V_0} =$$

$$= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx dy dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_T} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle dy dt \; -$$

$$- \langle A(u^{\varepsilon,j}), v \rangle_{V_0} - \langle A(v),\, u^{\varepsilon,j} - v \rangle_{V_0}.$$

Згідно з (3)

$$\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^{\varepsilon,j} \right|^p dx dy dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_\tau} \langle \beta(u^{\varepsilon,j}), u^{\varepsilon,j} \rangle dy dt =$$

$$= \int_{Q_\tau} \left[f(x,y,t) u^{\varepsilon,j} - u_t^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} + \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,j} u^{\varepsilon,j} \right] dx dy dt. \tag{11}$$

Можемо вважати, що $u^{\varepsilon,j} \to u^{\varepsilon}$ слабко в $H^1(Q_T)$. Тому, підставивши (11) у X_j та використавши формулу (10), в якій покладемо $v = u^{\varepsilon}$, матимемо

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} \sup X_j = \int_{Q_\tau} \left[f(x,y,t) u^{\varepsilon} - u_t^{\varepsilon} u^{\varepsilon} + \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \right] dx dy dt \; -$$

$$- \langle \chi^{\varepsilon}, v \rangle_{V_0} - \langle A(v),\, u^{\varepsilon} - v \rangle_{V_0} = \langle -A(v) + \chi^{\varepsilon},\, u^{\varepsilon} - v \rangle_{V_0}.$$

Виберемо $v = u^{\varepsilon} - \kappa w$, $w \in V_0(Q_T)$, $\kappa > 0$. З семінеперервності A випливатиме, що $A(u^{\varepsilon}) = \chi^{\varepsilon}$ майже скрізь в Q_T.

Для u^{ε} маємо оцінки

$$\left\| u^{\varepsilon}; H^1(Q_T) \cap V_0(Q_T) \right\| \leq M_9, \qquad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi_T} \langle \beta(u^{\varepsilon}), u^{\varepsilon} \rangle dy dt \leq M_9,$$

$$\left\| A_0(u^{\varepsilon}); V_0^*(Q_T) \right\| \leq M_9.$$

Отже, існує така підпослідовність u^k, $k = 1/\varepsilon_k$:

$$u^k \to u \text{ слабко в } H^1(Q_T) \cap V_0(Q_T), \qquad A_0(u^k) \to \chi_0 \text{ слабко в } V_0^*(Q_T),$$

$$\mathcal{B}(u^k) \to 0 \text{ слабко в } V_0^*(Q_T), \qquad u^k \to u \text{ слабко в } L^2(Q_T).$$

З (3) випливає

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau} (u^\varepsilon)^2 dxdy + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^\varepsilon)^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^\varepsilon\right|^p dxdydt +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_\tau} \left\langle \beta(u^\varepsilon), u^\varepsilon \right\rangle dydt \le M_{10} \left[\int\limits_{Q_\tau} |f|^2 dxdydt + \int\limits_{\hat{\Omega}_0} (u_0)^2 dxdy \right],$$

тобто $\int_{\Pi_\tau} \left\langle \beta(u^\varepsilon), u^\varepsilon \right\rangle dydt \le M_{10}\varepsilon$. Виконавши всі перетворення такі ж, як і для функції $u^{\varepsilon,j}$, одержимо збіжності (9), в яких замість $u^{\varepsilon,j}$ стоїть u^ε, а замість u^ε — u. Звідси випливає, що при $\varepsilon \to 0$ $\beta(u^\varepsilon) \to \beta(u)$ і $\beta(u) = 0$, тобто $u \in \in K$.

Також маємо $u^\varepsilon(x, y, 0) = u_0(x, y)$. Отже, $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

Крім того, з (4) випливає, що

$$\left\langle \mathcal{B}(u^k), u^k \right\rangle_{U_0} = \int\limits_{\Pi_T} \left\langle \beta(u^k), u^k \right\rangle dydt \to 0.$$

Оскільки $\mathcal{B}$ — монотонний і семінеперервний, то $\mathcal{B}(u) = 0$, а отже, $u \in K$ майже для всіх $(y, t) \in \Pi_T$.

Справді, з $\left\langle \mathcal{B}(u), v \right\rangle_{U_0} = 0$ випливає $\left\langle \mathcal{B}(u), \varphi z \right\rangle_{U_0} = 0$, $\varphi \in W(\Omega)$, $z \in \in L^2(\Pi_T)$, а

$$\left\langle \mathcal{B}(u), \varphi z \right\rangle_{U_0} = \int\limits_{\Pi_T} \left\langle \mathcal{B}(u), \varphi \right\rangle z\, dydt = 0 \quad \forall z \in L^2(\Pi_T).$$

Тому $\left\langle \beta(u), \varphi \right\rangle_{U_0} = 0$ майже для всіх $(y, t) \in \Pi_T$ і $\varphi \in W(\Omega)$. Отже, $\beta(u) = 0$ і $u \in K$ майже для всіх $(y, t) \in \Pi_T$.

Доведемо, що u — розв'язок варіаційної нерівності. Виберемо $v \in K$, $v \in \in V_0(Q_T)$. Тоді $\beta(v) = \beta(u) = 0$. Підставивши в (10) замість v $v - u^\varepsilon$, будемо мати

$$\int\limits_{Q_T} \left[u_t^\varepsilon(v - u^\varepsilon) - \lambda(x,y,t) u_y^\varepsilon(v - u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^\varepsilon \right|^{p-2} u_{x_i}^\varepsilon (v_{x_i} - u_{x_i}^\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - f(x,y,t)(v - u^\varepsilon) \right] dx\,dy\,dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_T} \left\langle \beta(u^\varepsilon) - \beta(v), (v - u^\varepsilon) \right\rangle dydt = 0.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_T} \left\langle (\beta(u^\varepsilon) - \beta(v))(v - u^\varepsilon) \right\rangle dydt \le 0,$$

то з останньої рівності випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_T} \left[u_t^\varepsilon(v - u^\varepsilon) - \lambda(x,y,t) u_y^\varepsilon(v - u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left| u_{x_i}^\varepsilon \right|^{p-2} u_{x_i}^\varepsilon (v_{x_i} - u_{x_i}^\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - f(x,y,t)(v - u^\varepsilon) \right] dx\,dy\,dt \ge 0 \quad \forall v \in V_0(Q_T), \quad v \in K. \tag{12}$$

Нехай в (12) $v = u$:

$$\int\limits_{Q_T}\left[u_t^{\varepsilon}(u-u^{\varepsilon})-\lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon}(u-u^{\varepsilon})+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{x_i}^{\varepsilon}\right|^{p-2}u_{x_i}^{\varepsilon}(u_{x_i}-u_{x_i}^{\varepsilon})-f(x,y,t)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,(u-u^{\varepsilon})\right]dxdydt\;\geq\;\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left(\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}-\left|u_{x_i}^{\varepsilon}\right|^{p-2}u_{x_i}^{\varepsilon}\right)(u_{x_i}-u_{x_i}^{\varepsilon})\,dxdydt\;\geq$$

$$\geq\;a_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}-u_{x_i}^{\varepsilon}\right|^{p}dxdydt\qquad\forall\,v\in V_0(Q_T),\quad v\in K. \tag{13}$$

Звідси $u_{x_i}^{\varepsilon}\to u_{x_i}$ в $L^p(Q_T)$.

Перейшовши до границі при $\varepsilon\to 0$, одержимо

$$\int\limits_{Q_T}\left[u_t(v-u)-\lambda(x,y,t)u_y(v-u)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i})\,-\right.$$

$$\left.-\;f(x,y,t)(v-u)\right]dxdydt\;\geq\;0\qquad\forall\,v\in V_0(Q_T),\quad v\in K$$

майже для всіх $(y,t)\in\Pi_T$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* A), L), $p>2$. *Тоді нерівність* (1) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай існують 2 розв'язки варіаційної нерівності (1): u_1 і u_2. Тоді кожна з цих функцій задовольнятиме нерівність (1):

$$\int\limits_{Q_\tau}\left\{u_{kt}(w-u_k)-\lambda(x,y,t)u_{ky}(w-u_k)\;+\;\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{kx_i}\right|^{p-2}u_{kx_i}(w_{x_i}-u_{kx_i})\,-\right.$$

$$\left.-\;f(x,y,t)(w-u_k)\right\}dxdydt\;\geq\;0,\qquad k=1,2,\quad w\in V_0(Q_T).$$

Додавши нерівності, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{1t}(w-u_1)\;+\;u_{2t}(w-u_2)\;-\;\lambda(x,y,t)u_{1y}(w-u_1)\;-\;\lambda(x,y,t)u_{2y}(w-u_2)\;+\right.$$

$$+\;\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{1x_i}\right|^{p-2}u_{1x_i}(w_{x_i}-u_{1x_i})\;+\;\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{2x_i}\right|^{p-2}u_{2x_i}(w_{x_i}-u_{2x_i})\;-$$

$$\left.-\;f(x,y,t)(2w-u_1-u_2)\right]dxdydt\;\geq\;0.$$

Виберемо $w=(u^1+u^2)/2$. Тоді

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[u_tu-\lambda(x,y,t)u_yu\;+\;\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left(\left|u_{1x_i}\right|^{p-2}u_{1x_i}-\left|u_{2x_i}\right|^{p-2}u_{2x_i}\right)u_{x_i}\right]dxdydt\;\leq\;0,$$

де $u=u_1-u_2$. Звідси

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}u^2dxdt\;+\;\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,0,t)u^2dxdt\;\leq\;0,$$

що можливо тільки при $u_1=u_2$.

Теорему доведено.

Позначимо

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2} u_{x_i}\nu_i, \qquad S = \Gamma \times (0, T) \times (0, y_0),$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — зовнішня нормаль до S.

Нехай K — конус. Тоді нерівність (1) еквівалентна системі

$$\int_{Q_T}\left[u_t v - \lambda(x,y,t)u_y v - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} v - f(x,y,t)v\right]dxdydt + \\ + \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v\, d\Gamma\, dy\, dt \ge 0,$$

$$\int_{Q_T}\left[u_t u - \lambda(x,y,t)u_y u - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} u - f(x,y,t)u\right]dxdydt + \\ + \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_A} u\, d\Gamma\, dy\, dt = 0. \qquad (14)$$

Якщо $C_0^\infty(\Omega) \subset K$, то система (14) еквівалентна системі

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v\, d\Gamma\, dy\, dt \ge 0, \qquad \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_A} u\, d\Gamma\, dy\, dt = 0 \qquad (15)$$

та рівнянню

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x, y, t). \qquad (16)$$

Наведемо приклади вибору просторів $W(\Omega)$ і множини K.

***Приклад* 1.** Виберемо $W(\Omega) = W_1(\Omega)$, $K = \{v \in W_1(\Omega),\ v \ge 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

При так вибраному K виконується вкладення $C_0^\infty(\Omega) \subset K$, а отже, виконуються і (15), (16). Тобто $u \ge 0$ і $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \ge 0$ на S, $u\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0$ на S.

Отже, функція u є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x, y, t),$$

$$u \ge 0 \text{ на } S,\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \ge 0 \text{ на } S,\ u\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ на } S,$$

$$u(x, y_0, t) = 0, \qquad u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

***Приклад* 2.** Нехай $K = W(\Omega) = W_1(\Omega)$. Знову $C_0^\infty(\Omega) \subset K$, і, отже, u задовольняє рівняння (16) і систему (15). Вибравши в (15) функцію $v \in K$ таку, щоб $v = \pm\psi$, де $\psi \ge 0$ на Γ, отримаємо умову $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_S = 0$. Отже, функція u є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x, y, t),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_S = 0, \qquad u(x, y_0, t) = 0, \qquad u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

***Приклад* 3.** Нехай $K = W_0(\Omega) = W(\Omega)$. Оскільки $C_0^\infty(\Omega) \subset K$, то u задовольняє рівняння (16). Виберемо в (15) $v = \pm\psi$. Звідси випливає умова $u|_S = 0$. Отже, функція u є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x,y,t),$$

$$u|_S = 0, \quad u(x,y_0,t) = 0, \quad u(x,y,0) = u_0(x,y).$$

***Приклад* 4.** Нехай $K = \{v \in W_1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0\}$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$. Тоді з (15) маємо

$$\int_{S_{2,T}} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v\, d\Gamma\, dy\, dt \geq 0, \quad \text{де} \quad S_{2,T} = \Gamma_2 \times (0,y_0) \times (0,T).$$

Виберемо в (14) $v = \pm\psi$, $\psi \in K$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_T$, $\psi \in V_1(Q_T)$. Тоді

$$\int_{S_{2,T}} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \psi\, d\Gamma\, dy\, dt = 0.$$

Тобто

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{S_{2,T}} = 0, \quad u|_{S_{1,T}} = 0,$$

і функція u є розв'язком задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x,y,t),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{S_{2,T}} = 0, \quad u|_{S_{1,T}} = 0, \quad u(x,y_0,t) = 0, \quad u(x,y,0) = u_0(x,y).$$

***Приклад* 5.** Нехай $W(\Omega) = W_0(\Omega)$, $K = \{v \in W_0(\Omega),\ v \geq 0 \text{ в } \Omega\}$, функція $f \equiv 0$. Позначимо $\Psi = \{(x,y,t) \in Q_T : u(x,y,t) = 0\}$. Тоді система (14) набере вигляду

$$\int_{Q_T \setminus \Psi}\left[u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}\right] v\, dx\, dy\, dt \geq 0, \tag{17}$$

$$\int_{Q_T \setminus \Psi}\left[u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}\right] u\, dx\, dy\, dt = 0. \tag{18}$$

Позначимо

$$A_1 u = u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}.$$

Тоді з (17) випливає, що $A_1(u) \geq 0$ в $Q_T \setminus \Psi$, а з (18) одержимо, що $A_1(u) = 0$ в $Q_T \setminus \Psi$, тобто маємо умови існування та єдиності невід'ємного узагальненого розв'язку задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = 0,$$

$$u|_S = 0, \quad u(x,y_0,t) = 0, \quad u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad u_0(x,y) \geq 0.$$

За теоремою 5.1 [2, с. 384] оператор штрафу завжди існує і його можна вибрати у вигляді $\beta(u) = J(u - P_K u)$, де J — оператор двоїстості між $U^*(\Omega)$ і $U(\Omega)$, а P_K — оператор проектування на K.

Покажемо, яким може бути оператор штрафу у прикладах $1-5$.

***Приклад* 6.** Нехай у прикладі 1

$$P_K v = v^+ = \begin{cases} v, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) \ge 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) < 0, \end{cases} \quad x \in \Gamma,$$

а

$$v - P_K v = -v^- = -\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) \ge 0, \\ -v, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) < 0, \end{cases} \quad x \in \Gamma,$$

$\langle \beta(u),\, v \rangle = -\int_\Gamma \left| u^- \right|^{p-2} u^- v\, d\Gamma$, $u,\, v \in W_1(\Omega)$. За лемою 1.32 [20] $\left\| v;\, L^p(\Gamma) \right\| \le$ $\le C \left\| v;\, W^{1,p}(\Omega) \right\|$. Оскільки

$$\int\limits_\Gamma \left| u^- \right|^{p-2} u^- v\, d\Gamma \le C \int\limits_\Gamma \left[\left| u^- \right|^p + |v|^p \right] d\Gamma \le C \int\limits_\Omega \left[\left| u^-_{x_i} \right|^p + \left| u^- \right|^p + |v|^p + \left| v_{x_i} \right|^p \right] dx < \infty,$$

то форма $v \to -\int_\Gamma \left| u^- \right|^{p-2} u^- v\, d\Gamma$ є неперервною на $W_1(\Omega)$ і, отже, визначає функціонал $\beta(u) \in W_1'(\Omega)$.

Визначений таким чином функціонал β є монотонним, обмеженим, семінеперервним і $\beta(u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u^- = 0$, тобто $u \in K$.

У прикладах 2, 3, оскільки $\beta(u) = 0$ для довільних $u \in K$, $\beta(u) \equiv 0$.

У прикладі 4 позначимо

$$P_K u = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad x \notin \Gamma_1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \in \Gamma_1, \end{cases} \qquad u_1 = u - P_K u = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \notin \Gamma_1, \\ u, & \text{якщо} \quad x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

і виберемо $\langle \beta(u),\, v \rangle = \int_\Gamma |u_1|^{p-2} u_1 v\, d\Gamma$. Так само, як у прикладі 1, знаходимо, що $\beta(u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u_1 = 0$, тобто $u \in K$.

У прикладі 5, оскільки $W_0(\Omega)$ щільно і неперервно вкладений в $L^p(\Omega)$, згідно із зауваженням [2, с. 387] множину K можна замінити на $K_1 = \{ v \in$ $\in L^p(\Omega)\colon\ v \ge 0$ в $\Omega \}$, а тоді оператор штрафу можна вибирати відносно K_1.

Позначимо $J(v) = |v|^{p-2} v$, $\beta(v) = J(v - P_K v)$, де

$$P_K v = v^+ = \begin{cases} v, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) \ge 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) < 0, \end{cases} \quad x \in \Omega.$$

Тоді

$$v^- = v - P_K v = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) \ge 0, \\ -v, & \text{якщо} \quad v(x,\cdot,\cdot) < 0, \end{cases} \quad \text{а} \quad \beta(v) = -\left| v^- \right|^{p-2} v^-.$$

Зауважимо, що $\beta(u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u^- = 0$, тобто $u \in K$.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
3. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.

4. *Алиханова Р. И., Атакишиева Р. Х.* Однозначная разрешимость некоторого класса вариационных параболических неравенств // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. – 1981. – № 5. – С. 41 – 46.
5. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Структура та оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівец. ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 111. – С. 41 – 50.
6. *Возняк О. Г.* Про властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій // Там же. – 2002. – Вип. 134. – С. 17 – 21.
7. *Малицька Г. П.* Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з змінною дифузією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 56 – 60.
8. *Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д., Тичинська Л. М.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць / Відп. ред. С. Д. Івасишен. – Чернівці, 1990. – С. 48 – 61.
9. *Івасишен С. Д., Ейдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$ Параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН. – 1998. – **360**, № 3. – С. 303 – 305.
10. *Івасишен С. Д., Ейдельман С. Д.* О задаче Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 4. – С. 527 – 536.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D.* On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2000. – **117**. – P. 111 – 125.
12. *Орлова С. А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 6. – С. 211 – 215.
13. *Терсенов С. А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложениях // Мат. сб. – 1987. – **133**(175), № 4(8). – С. 539 – 555.
14. *Терсенов С. А.* О предельных значениях решений ультрапараболических уравнений на многообразиях вырождения // Докл. АН СССР. – 1988. – **299**, № 5. – С. 1070 – 1075.
15. *Халмурадов Ч. Г.* Об априорных оценках решений начально-краевой задачи для нелинейного вырождающегося ультрапараболического уравнения // Применения методов функцион. анализа к неклассическим уравнениям мат. физики. – Новосибирск, 1989. – С. 176 – 182.
16. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary-value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Different. Equat. – 1998. – **23**, № 5, 6. – P. 847 – 868.
17. *Suvorov S. G.* Nonlinear ultraparabolic equations in general domains // Nonlinear Boundary-Value Problems. – 1997. – № 7. – P. 180 – 188.
18. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісник Чернівец. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 97 – 103.
19. *Protsakh N. P.* Mixed problem for nonlinear ultraparabolic equation // Int. Conf. Function. Anal. and its Appl. Dedicated to the 110th anniversary of Stephan Banach: Book of Abstracts (May 28 – 31, 2002, Lviv, Ukraine). – P. 164 – 165.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Одержано 28.07.2003