УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

НАИЛУЧШИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В L_2 И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

We obtain the exact values of extremal characteristics of a special form which connect the best polynomial approximations of functions $f(x) \in L_2^r(r \in \mathbb{Z}_+)$ with expressions containing k-th order modules of continuity $\omega_k(f^{(r)}, t)$. By using this exact values, we generalize certain result obtained by L. V. Taikov and concerning inequalities that connect the best polynomial approximations with modules of continuity of functions belonging to L_2. For classes $\mathcal{F}(k, r, \Psi_*)$ defined by $\omega_k(f^{(r)}, t)$ and the majorant $\Psi_*(t) = t^{4k/\pi^2}$, we find exact values of different widths in the space L_2.

Одержано точні значення екстремальних характеристик спеціального вигляду, що пов'язують найкращі поліноміальні наближення функцій $f(x) \in L_2^r(r \in \mathbb{Z}_+)$ та вирази, які містять модулі неперервності k-го порядку $\omega_k(f^{(r)}, t)$. Завдяки цьому узагальнено один результат Л. В. Тайкова щодо нерівностей, які поєднують найкращі поліноміальні наближення і модулі неперервності функцій з L_2. Для класів $\mathcal{F}(k, r, \Psi_*)$, визначених за допомогою величини $\omega_k(f^{(r)}, t)$ та мажоранти $\Psi_*(t) = t^{4k/\pi^2}$, знайдено точні значення різних поперечників у просторі L_2.

1. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических вещественных функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f(x) \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx,$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, $\rho_j^2(f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} a_j^2(f) + b_j^2(f)$. Модуль непрерывности k-го порядка функции $f(x) \in L_2$ обозначим через

$$\omega_k(f, t) = \sup\left\{\left\|\Delta_h^k f(x)\right\| : |h| \le t\right\},$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x + jh)$. Под $L_2^r(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^0 = L_2)$ понимаем множество функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2.

При решении задач теории аппроксимации в L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq \chi n^{-r} \omega_k\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right), \quad t > 0,$$

где $f(x) \in L_2^r(r \in \mathbb{Z}_+, f^{(0)}(x) = f(x))$, рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ. Для компактного изложения полученных ранее результатов введем следующее обозначение:

$$\chi_{n,r,k,p,s,m}(\Psi, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\frac{n^{2r-p} E_{n-1}^2(f)}{\left(\int_0^t \omega_k^s(f^{(r)}, x)\Psi(x)\,dx\right)^m} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \mathrm{const}\right\}. \quad (2)$$

Величины вида (2) изучали Н. И. Черных [1] ($\chi_{n,r,1,1,2,1}(\Psi, \pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin nx$; $\chi_{n,0,k,0,2,1}(\Psi, \pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin(nx/2) + (\sin nx)/2$), Л. В. Тайков [2] ($\chi_{n,r,1,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/(2n)$) и [3] ($\chi_{n,r,k,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/n$), А. А. Лигун [4] ($\chi_{n,r,k,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \geq 0$, $0 < t \leq \pi/n$), В. В. Шалаев [5] ($\chi_{n,r,k,k,2/k,k}(\Psi, \pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin nx$; при $k = 1$ имеем соответствующий результат из [1]), Х. Юссеф [6] ($\chi_{n,r,1,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) = \sin(\pi x/t)$, $0 < t \leq \pi/n$). Экстремальные величины, в определенном смысле аналогичные (2), в пространстве L_2 рассматривали М. Г. Есмаганбетов [7], С. Б. Вакарчук [8], С. Н. Васильев [9], а в пространствах S^p, $1 \leq p < \infty$, — А. И. Степанец и А. С. Сердюк [10], В. Р. Войцеховский [11], А. С. Сердюк [12].

В данном сообщении рассматривается экстремальная характеристика

$$\mathcal{L}_{n,r,k}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\frac{n^{2(r+k)} t^{2k} E_{n-1}^2(f)}{\left(\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) + n^2 \int_0^t (t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau)\,d\tau\right)^k} : \right.$$

$$\left. f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \mathrm{const}\right\}, \quad t > 0, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (3)$$

содержащая, в отличие от (2), модуль непрерывности k-го порядка не только под знаком определенного интеграла. Изучение величины (3) позволило обобщить асимптотически точные при $nt = o(1)$ неравенства

$$\frac{1}{(nt)^2} \frac{1}{n^{2r}} \leq \sup\left\{\frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_1^2(f^{(r)}, t)} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \mathrm{const}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2}\right), \quad 0 < t \leq \pi/n,$$

полученные Л. В. Тайковым [2, с. 434], на модули непрерывности k-го ($k = 2, 3, \ldots$) порядка.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда для любых чисел t, удовлетворяющих условию $0 < t \leq \pi/n$, имеют место равенства*

$$\mathcal{L}_{n,r,k}(t) = 1. \tag{4}$$

***Следствие* 1.** *Для любых чисел* $0 < t \le \pi/n$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(nt)^{2k}}\frac{1}{n^{2r}} \le \sup\left\{\frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f(x) \in L_2^r,\, f(x) \ne \mathrm{const}\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2}\right)^k. \tag{5}$$

2. Всюду далее под $\Psi(t)$, $0 \le t < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $t = 0$. Для классов функций

$$F(k, r, \Psi) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{f(x) \in L_2^r : \int_0^t \omega_k^2(f^{(r)}, \tau)\, d\tau \le \Psi^2(t),\ 0 < t \le 2\pi\right\}, \tag{6}$$

$$\tilde{F}(1, r, \Psi) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{f(x) \in L_2^r : \frac{\pi}{2t}\int_0^t \omega_1^2(f^{(r)}, \tau)\sin\frac{\pi\tau}{t}\, d\tau \le \Psi^2(t),\ 0 < t \le 2\pi\right\}, \tag{7}$$

$$F^*(1, r, \Psi) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{f(x) \in L_2^r : \int_0^t \omega_1^2(f^{(r)}, \tau)\left(\sin\frac{\pi\tau}{t} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\tau}{t}\right) d\tau \le \Psi^2(t),\ 0 < t \le 2\pi\right\} \tag{8}$$

(см., например, [3, 13, 14] соответственно), определенных с помощью усредненных модулей непрерывности, были найдены точные значения колмогоровских n-поперечников в тех случаях, когда мажоранты $\Psi(t)$ удовлетворяют ряду естественных ограничений. Исходя из определений классов (6) – (8) и величины (3), рассмотрим в L_2 классы функций

$$\mathcal{F}(k, r, \Psi_*) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{f(x) \in L_2^r : \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) + \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \int_0^t (t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau)\, d\tau \le\right.$$

$$\left. \le \Psi_*^{2/k}(t),\ 0 < t \le 2\pi\right\},$$

где $\Psi_*(t) \overset{\mathrm{df}}{=} t^{4k/\pi^2}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$.

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения. Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в L_2; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\Im : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\Im^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(Q; L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$

$$d_n(Q; L_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in Q\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$\delta_n(Q; L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\{\|f - \Im f\| : f \in Q\} : \Im L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(Q; L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(Q; L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\{\|f - \Im^\perp f\| : f \in Q\} : \Im^\perp L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между перечисленными величинами (см., например, [15, 16]):

$$b_n(Q; L_2) \le d^n(Q; L_2) \le d_n(Q; L_2) = \delta_n(Q; L_2) = \pi_n(Q; L_2). \tag{9}$$

Теорема 2. *Для любых чисел* $n, k \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$p_{2n}(\mathcal{F}(k, r, \Psi_*); L_2) = p_{2n-1}(\mathcal{F}(k, r, \Psi_*); L_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}(k, r, \Psi_*)) =$$
$$= \pi^{k(4/\pi^2-1)} n^{-(r+4k/\pi^2)}, \tag{10}$$

где $E_{n-1}(\mathcal{F}(k, r, \Psi_*)) = \sup\{E_{n-1}(f)\colon f(x) \in \mathcal{F}(k, r, \Psi_*)\}$, $p_n(\cdot)$ *— любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

В работах [1 – 3, 8, 13, 14, 17] приведены примеры классов, определенных с помощью степенных функций (мажорант), на которых решены некоторые экстремальные задачи теории аппроксимации. Так, из сопоставления результатов Н. И. Черных [1] (оценка сверху) и Ю. И. Григоряна [17] (оценка снизу) для класса

$$H_2^{1/2} \overset{\text{df}}{=} \left\{ f(x) \in L_2 \colon \omega_1(f, t) \le t^{1/2} \right\}$$

получаем точные значения колмогоровских поперечников нечетного порядка

$$d_{2n-1}\left(H_2^{1/2}, L_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По мнению авторов, определенный интерес может представлять получение аналогов теорем 1 и 2 для введенных А. И. Степанцом пространств S^p, $1 \le p < \infty$, которые наследуют такую важную характеристику гильбертова пространства, как минимальное свойство частных сумм ряда Фурье (см., например, [10 – 12]).

3. ***Доказательство теоремы* 1.** Используя определение гильбертова пространства L_2 и свойства тригонометрической системы, нетрудно показать, что для произвольной функции $f(x) \in L_2$

$$\left\| \Delta_h^k f^{(r)}(x) \right\|^2 = 2^k \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} \rho_j^2(f)(1 - \cos jh)^k. \tag{11}$$

Использовав (1), запишем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2 \cos jh = \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^{2-2/k}(f) \rho_j^{2/k}(f)(1 - \cos jh). \tag{12}$$

Применив к правой части (12) неравенство Гельдера и учитывая (11) и определение модуля непрерывности k-го порядка, продолжим соотношение (12):

$$\le E_{n-1}^{2-2/k}(f) \left\{ \frac{1}{n^{2r}} \sum_{j=n}^{\infty} j^{2r} \rho_j^2(f)(1 - \cos jh)^k \right\}^{1/k} \le$$
$$\le E_{n-1}^{2-2/k}(f) \frac{\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h)}{2n^{2r/k}}. \tag{13}$$

Отметим, что формулы (12), (13) были получены в работе [5].

Проинтегрировав (12), (13) по h в пределах от 0 до τ, будем иметь

$$\tau E_{n-1}^2(f) \le \sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\frac{\sin j\tau}{j} + \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}}\int_0^{\tau}\omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)\,dh. \tag{14}$$

Произведя интегрирование обеих частей неравенства (14) по τ в пределах от 0 до t, получим

$$\frac{t^2}{2}E_{n-1}^2(f) \le \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2}\rho_j^{2-2/k}(f)\rho_j^{2/k}(f)(1-\cos jt) +$$

$$+\frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}}\int_0^t\int_0^{\tau}\omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)\,dh\,d\tau. \tag{15}$$

Для оценки сверху суммы в правой части неравенства (15) применим соображения, аналогичные (12), (13), а для более рациональной формы записи интеграла воспользуемся процедурой интегрирования по частям:

$$\frac{t^2}{2}E_{n-1}^2(f) \le \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{n^2}\left\{\frac{1}{n^{2r}}\sum_{j=n}^{\infty}j^{2r}\rho_j^2(f)(1-\cos jt)^k\right\}^{1/k} +$$

$$+\frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}}\int_0^t(t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)\,d\tau \le$$

$$\le \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2+2r/k}}\left\{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t)+n^2\int_0^t(t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)\,d\tau\right\}.$$

Отсюда имеем

$$t^{2k}E_{n-1}^2(f) \le \frac{1}{n^{2(r+k)}}\left\{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t)+n^2\int_0^t(t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)\,d\tau\right\}^k. \tag{16}$$

Из (16) и определения (3) величины $\mathcal{L}_{n,r,k}(t)$ следует оценка сверху

$$\mathcal{L}_{n,r,k}(t) \le 1. \tag{17}$$

Для получения оценки снизу

$$\mathcal{L}_{n,r,k}(t) \ge 1 \tag{18}$$

достаточно рассмотреть в L_2^r функцию $f_0(x)=\cos nx$, воспользоваться определением (3) величины $\mathcal{L}_{n,r,k}(t)$, а также легко проверяемыми соотношениями

$$E_{n-1}(f_0) = 1,$$

$$\omega_k(f_0^{(r)},t) = 2^{k/2}n^r(1-\cos nt)^{k/2}, \quad 0<t\le\pi/n, \tag{19}$$

$$\omega_k^{2/k}(f_0^{(r)},t) + n^2\int_0^t(t-\tau)\omega_k^{2/k}(f_0^{(r)},\tau)\,d\tau = t^2n^{2(r+k)/k}.$$

Сопоставив оценки сверху (17) и снизу (18), получим требуемое равенство (4).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство следствия* 1.** Для произвольной функции $f(x)\in L_2^r$ ($f(x)\ne\mathrm{const}$) на основании неравенства (16) имеем

$$t^{2k}E_{n-1}^2(f) \le \frac{1}{n^{2(r+k)}}\omega_k^2(f^{(r)},t)\left(1+\frac{(nt)^2}{2}\right)^k.$$

Отсюда следует

$$\frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} \le \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^k. \tag{20}$$

Для рассмотренной выше функции $f_0(x)$, $0<t\le\pi/n$, из (19) получаем

$$\omega_k^2(f_0^{(r)},t) = 2^{2k}n^{2r}\sin^{2k}\left(\frac{nt}{2}\right) \le n^{2r}(nt)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\frac{E_{n-1}^2(f_0)}{\omega_k^2(f_0^{(r)},t)} \ge \frac{1}{(nt)^{2k}}\frac{1}{n^{2r}}. \tag{21}$$

Двойное неравенство (5), обобщающее соответствующий результат Л. В. Тайкова [2] для модуля непрерывности $\omega_1(f^{(r)},t)$, следует из (20), (21), что и завершает доказательство следствия 1.

4. ***Доказательство теоремы 2.*** Полагая в (16) $t=\pi/n$, для произвольной функции $f(x)\in\mathcal{F}(k,r,\Psi_*)$ имеем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\pi^k n^r}\left\{\omega_k^{2/k}\left(f^{(r)},\pi/n\right)+n^2\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-\tau\right)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)\,d\tau\right\}^{k/2} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^k n^r}\Psi_*\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi^{k(4/\pi^2-1)}\,n^{-(r+4k/\pi^2)}. \tag{22}$$

Из (9) и (22) получаем оценки сверху

$$p_{2n}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*);L_2) \le p_{2n-1}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*);L_2) \le d_{2n-1}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*);L_2) \le$$

$$\le E_{n-1}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*)) \le \pi^{k(4/\pi^2-1)}\,n^{-(r+4k/\pi^2)}. \tag{23}$$

Для получения оценок снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{T}_n$ шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_n : \|T_n\|\le\pi^{k(4/\pi^2-1)}\,n^{-(r+4k/\pi^2)}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $\mathcal{F}(k,r,\Psi_*)$. Для этого нам понадобится неравенство [3]

$$\omega_k^2\left(T_n^{(r)},t\right) \le 2^k n^{2r}(1-\cos nt)_*^k\|T_n\|^2, \tag{24}$$

где $(1-\cos nt)_* \overset{\mathrm{df}}{=} \{1-\cos nt,$ если $0\le t\le\pi/n;\ 2,$ если $t\ge\pi/n\}$.

Пусть $0<t\le\pi/n$. Используя определение класса $\mathcal{F}(k,r,\Psi_*)$, для произвольного полинома $T_n(x)\in\mathbb{B}_{2n+1}$ в силу (24) имеем

$$\omega_k^{2/k}\left(T_n^{(r)},t\right)+\left(\frac{\pi}{t}\right)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\,\omega_k^{2/k}\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau \le$$

$$\le 2n^{2r/k}\|T_n\|^{2/k}\left\{1-\cos nt+\left(\frac{\pi}{t}\right)^2\int\limits_0^t(t-\tau)(1-\cos n\tau)\,d\tau\right\} \le$$

$$\le \left\{1+2(1-\cos nt)\left(\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{(nt)^2}\right)\right\}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{8/\pi^2}. \tag{25}$$

Рассмотрим случай, когда $\pi/n \le t \le 2\pi$. На основании аналогичных соображений

$$\omega_k^{2/k}\left(T_n^{(r)}, t\right) + \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \int_0^t (t-\tau)\,\omega_k^{2/k}\left(T_n^{(r)}, \tau\right) d\tau \le$$

$$\le 2n^{2r/k}\|T_n\|^{2/k}\left\{2 + \left(\frac{\pi}{t}\right)^2\left[\int_0^{\pi/n}(t-\tau)(1-\cos n\tau)\,d\tau + 2\int_{\pi/n}^{t}(t-\tau)\,d\tau\right]\right\} \le$$

$$\le \left\{2\left(1+\frac{2}{\pi^2}\right) - \frac{2\pi}{nt} + \frac{\pi^2-4}{(nt)^2}\right\}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{8/\pi^2}. \tag{26}$$

Покажем, что правые части неравенств (25) и (26) не превышают функцию $\Psi_*^{2/k}(t) = t^{8/\pi^2}$. Полагая всюду далее $u \overset{\mathrm{df}}{=} tn/\pi$, приходим к необходимости доказательства неравенств

$$u^{8/\pi^2} \ge \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{\pi^2}(1-\cos\pi u)\left(1-\dfrac{1}{u^2}\right) & \text{при} \quad 0 < u \le 1, \\ 2\left(1+\dfrac{2}{\pi^2}\right) - \dfrac{2}{u} + \dfrac{1}{u^2}\left(1-\dfrac{4}{\pi^2}\right) & \text{при} \quad 1 \le u < \infty. \end{cases} \tag{27}$$

Пусть $0 < u \le 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(u) = \frac{1}{u^2}\left\{u^{2+8/\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}(u^2-1)(1-\cos\pi u) - u^2\right\} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\tilde\Phi(u)}{u^2}.$$

Нам достаточно убедиться в справедливости соотношения $\tilde\Phi(u) \ge 0$. Поскольку $\tilde\Phi(u)$ непрерывна, для удобства все необходимые рассуждения проведем для $u \in [0, 1]$. Воспользовавшись разложением функции $\cos\pi u$ в ряд Маклорена при $u \to 0$, получим

$$\tilde\Phi(u) = u^{2+8/\pi^2}\left(1 - O\left(u^{2-8/\pi^2}\right)\right),$$

т. е. $\tilde\Phi(u) > 0$ в достаточно малой окрестности нуля. Покажем, что функция $\tilde\Phi(u)$ является знакопостоянной при $0 < u < 1$. Для этого воспользуемся методом рассуждений от противного, а именно, предположим, что на интервале $(0, 1)$ есть хотя бы одна точка, в которой $\tilde\Phi(u)$ обращается в нуль. Поскольку $\tilde\Phi(0) = \tilde\Phi(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля первая производная

$$\tilde\Phi^{(1)}(u) = \left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{(1+8/\pi^2)} - \left(2+\frac{4}{\pi^2}\right)u + \frac{2}{\pi}(1-u^2)\sin\pi u + \frac{4u}{\pi^2}\cos\pi u$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0, 1)$ не менее чем в двух различных точках. Учитывая, что $\tilde\Phi^{(1)}(0) = \tilde\Phi^{(1)}(1) = 0$, в силу аналогичных соображений заключаем, что и вторая производная

$$\tilde\Phi^{(2)}(u) = \left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{8/\pi^2} - \frac{8u}{\pi}\sin\pi u + 2\left(1-u^2+\frac{2}{\pi^2}\right)\cos\pi u - 2 - \frac{4}{\pi^2}$$

должна иметь на $(0, 1)$ не менее трех различных нулей. Поскольку $\tilde\Phi^{(2)}(0) = 0$, в силу изложенных здесь соображений третья производная

$$\tilde\Phi^{(3)}(u) = \frac{8}{\pi^2}\left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{8/\pi^2-1} - \varphi(u), \qquad 0 < u \le 1, \tag{28}$$

где

$$\varphi(u) \overset{\text{df}}{=} 12u\cos\pi u + 2\left[\pi(1-u^2)+\frac{6}{\pi}\right]\sin\pi u,$$

также должна иметь на интервале (0, 1) не менее трех различных нулей. Далее, так как

$$\varphi^{(1)}(u) = (2\pi^2+24-2\pi^2u^2)\cos\pi u - 4(1+3\pi)u\sin\pi u, \tag{29}$$

при возрастании u от 0 до $1/2$ функция (29), как разность двух функций, одна из которых монотонно убывает к нулю, а другая монотонно возрастает от нулевого значения, будет менять свой знак с плюса на минус в некоторой точке $\eta\in(0, 1/2)$. При $1/2\le u\le 1$ из (29) следует, что $\varphi^{(1)}(u)<0$. Таким образом, при $0<u\le\eta$ функция $\varphi(u)$ монотонно возрастает, а при $\eta<u\le 1$ монотонно убывает. Поскольку на полусегменте $0<u\le 1$ функция

$$\frac{8}{\pi^2}\left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{8/\pi^2-1}$$

является монотонно убывающей и выпуклой вниз, из (28) и геометрических соображений следует, что $\tilde{\Phi}^{(3)}(u)$ может иметь на интервале (0, 1) не более двух различных нулей. Из полученного противоречия следует, что $\tilde{\Phi}(u)$, а значит, и $\Phi(u)$ при $0<u\le 1$ являются неотрицательными функциями, что и доказывает первое неравенство из (27).

Рассмотрим далее на множестве $1\le u<\infty$ вспомогательную функцию

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{u^2}\left\{u^{2+8/\pi^2}+2u-2\left(1+\frac{2}{\pi^2}\right)u^2+\frac{4}{\pi^2}-1\right\} \overset{\text{df}}{=} \frac{\tilde{\Phi}_1(u)}{u^2}.$$

Выполнение соотношения $\Phi_1(u)\ge 0$, а значит и $\tilde{\Phi}_1(u)\ge 0$, равносильно справедливости второго неравенства из (27). Учитывая, что

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)}(u) = \left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{1+8/\pi^2} - 4\left(1+\frac{2}{\pi^2}\right)u + 2,$$

$$\tilde{\Phi}_1^{(2)}(u) = \left(2+\frac{8}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{8}{\pi^2}\right)u^{8/\pi^2} - 4\left(1+\frac{2}{\pi^2}\right),$$

$\tilde{\Phi}_1^{(1)}(1)=0$ и $\tilde{\Phi}_1^{(2)}(u)>0$ при $1<u<\infty$, имеем $\tilde{\Phi}_1^{(1)}(u)\ge 0$. Отсюда и из равенства $\tilde{\Phi}_1(1)=0$ следует неотрицательность функции $\tilde{\Phi}_1(u)$ на полусегменте $[1,\infty)$.

Из доказанного включения $\mathbb{B}_{2n+1}\subset\mathcal{F}(k,r,\Psi_*)$, соотношения (9) и определения бернштейновского поперечника получаем оценки снизу

$$p_{2n}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*);L_2) \ge b_{2n}(\mathcal{F}(k,r,\Psi_*);L_2) \ge b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1},L_2) \ge$$
$$\ge \pi^{k(4/\pi^2-1)}\, n^{-(r+4k/\pi^2)}. \tag{30}$$

Сопоставляя неравенства (23) и (30), получаем равенство (10).

Теорема 2 доказана.

1. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513–522.
2. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433–438.
3. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Там же. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217–223.

4. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785–792.
5. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 125–129.
6. *Юссеф Х.* О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. научн. тр. – Калинин, 1988. – С. 100–114.
7. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816–820.
8. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Там же. – 2001. – **70**, № 3. – С. 334–345.
9. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2002. – **385**, № 1. – С. 11–14.
10. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106–124.
11. *Войцехівський В. Р.* Поперечники деяких класів з простору S^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 17–26.
12. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності // Там же. – С. 229–248.
13. *Айнуллоев Н.* Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. – 1984. – **27**, № 8. – С. 415–418.
14. *Юссеф Х.* Поперечники классов функций в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ // Применение функц. анализа в теории приближений: Сб. научн. тр. – Тверь: Твер. ун-т, 1990. – С. 167–175.
15. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
16. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 290 p.
17. *Григорян Ю. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 637–646.

Получено 05.06.2003,
после доработки — 02.12.2003