УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ, КОЛМОГОРОВСЬКІ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact in order estimates of the best approximations and the Kolmogorov and trigonometric widths of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of multivariable periodic functions in the space L_q for some values of parameters p and q.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, колмогоровських та тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких значень параметрів p та q.

1. Вступ. Спочатку наведемо необхідні позначення, означення та відомі твердження.

Нехай $L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ таких, що

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q := \left((2\pi)^{-d}\int_{\pi_d}|f(x)|^q dx\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d}|f(x)| < \infty.$$

Скрізь нижче будемо вважати, що функції $f \in L_q(\pi_d)$ належать простору

$$L_q^0(\pi_d) := \left\{f \in L_q(\pi_d):\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}, \quad 1 \le q \le \infty\right\}.$$

Наведемо означення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, введеного в роботі [1].

Для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1,\ldots,k_d):\ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\right\},$$

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} f(t)e^{-i(k,t)}\,dt$$

—коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Нехай функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$, за допомогою якої визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^{l} \Omega(t), \; m_j \in \mathbb{N}, \; j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0, \; j = \overline{1, d}$.

Також будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі – Стечкіна [2]. Для функції однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0, \; \tau \in [0; 1]$, це означає наступне: $\varphi(\tau)$ задовольняє умову (S) ((S_l)), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ ($\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$) майже зростає (спадає) при деякому $\alpha > 0$ ($0 < \gamma < l$), тобто існує $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), яке не залежить від τ_1, τ_2 і таке, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}} \quad \left(\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}\right), \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Отже, нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$; $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1 - 4$, (S) і (S_l). Тоді за означенням

$$B_{p,\theta}^{\Omega} := \left\{ f \in L_p^0(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \asymp \left\{ \sum_s \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \, \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\Omega}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

Під знаком $\asymp$ будемо розуміти рівність відповідних величин з точністю до функції, що обмежена зверху і знизу додатними числами, які, взагалі кажучи, залежать від усіх параметрів, крім s (або M чи n, коли мова йтиме про порядкові співвідношення, які містять M та n).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ клас $B_{p,\theta}^{\Omega}$ збігається з класом H_p^{Ω}, розглянутим у роботі [3], а при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, — з класом $B_{p,\theta}^{r}$ [4].

Метою даної роботи є встановлення точних за порядком оцінок найкращих наближень класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ тригонометричними поліномами з „номерами" гармонік із „ступінчастих гіперболічних хрестів", колмогоровських та тригонометричних поперечників класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ у просторі L_q при деяких співвідношеннях між параметрами p, q та θ. Наведемо означення згаданих вище апроксимативних характеристик.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, величина

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_q := \sup_{f \in B_{p,\theta}^{\Omega}} \inf_{t \in T_{Q_n}} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q,$$

де

$$T_{Q_n} = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in Q_n} a_k e^{i(k,x)} = \sum_{(s,1) < n} \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)} \right\}$$

($Q_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s)$ — „ступінчастий гіперболічний хрест”), є найкращим наближенням класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в метриці простору L_q тригонометричними поліномами із множини T_{Q_n}.

Якщо ж за наближуючі агрегати брати частинні суми ряду Фур'є з „номерами” гармонік із Q_n, то величину

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q := \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\| f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot) \right\|_q,$$

де

$$S_{Q_n}(f,x) = \sum_{k \in Q_n} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} = \sum_{(s,1)<n} \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

називають наближенням функції $f(x)$ частинними сумами ряду Фур'є з „номерами” гармонік із „ступінчастих гіперболічних хрестів”.

Відомо, що при $1 < q < \infty$ величини $E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ та $\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ однакові за порядком (див., наприклад, [1]), тобто

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q.$$

Точні за порядком оцінки, одержані для апроксимативних характеристик $E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ і $\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, використовуються при встановленні оцінок зверху для колмогоровських поперечників

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{L_M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{h \in L_M} \| f(\cdot) - h(\cdot) \|_q, \tag{1}$$

де L_M — підпростір в L_q розмірності M. Нагадаємо, що величина колмогоровського поперечника введена А. М. Колмогоровим в роботі [5], а згодом почала інтенсивно досліджуватись на різних функціональних класах багатьма математиками. З детальнішою інформацією, що стосується дослідження колмогоровських поперечників тих або інших класів функцій, можна ознайомитись у роботах [6 – 13].

Поряд із знаходженням точних за порядком оцінок для колмогоровських поперечників $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ встановлюються оцінки для тригонометричних поперечників

$$d^T_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) := \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q. \tag{2}$$

Нагадаємо, що поняття тригонометричного поперечника увів Р. С. Ісмагілов [14]. Дослідженню величин тригонометричних поперечників присвячено роботи [15 – 19].

Зазначимо, що величини (1) і (2) пов'язані нерівністю

$$d^T_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ge d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q), \tag{3}$$

яка випливає з означення цих величин і використовується в даній роботі при встановленні оцінок знизу для тригонометричних поперечників.

2. Найкращі наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q. Для викладення подальших міркувань наведемо наступне твердження.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [20, с. 52 – 56]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_1, C_2 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_1 \| f \|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f;\cdot)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_2 \| f \|_p .$$

Останні нерівності можна записати у вигляді порядкової рівності

$$\| f \|_p \asymp \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f;\cdot)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p .$$

Теорема A є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда – Пелі (див. [21], гл. 15, теорема 2).

Тепер перейдемо до формулювання та доведення отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді має місце порядкова рівність*

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Оцінки зверху, внаслідок нерівності $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$, $q < p$, зводяться до оцінок зверху величин $E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p$, які встановлено в теоремі 5 [1], тому

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \le E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Для одержання оцінки знизу при $2 \le \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$g_{\omega,\theta}(x) = C_3 \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} e^{i 2^{s_j - 1} x_j}, \qquad C_3 > 0.$$

Зважаючи на те, що

$$\sum_{(s,1)=n} 1 \asymp n^{d-1}, \tag{4}$$

маємо

$$\| g_{\omega,\theta} \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{(s,1)=n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \| \delta_s(g_{\omega,\theta},\cdot) \|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n}) \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} \left\| \prod_{j=1}^{d} e^{i 2^{s_j-1} x_j} \right\|_p \right)^{1/\theta} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{-(d-1)/\theta} n^{(d-1)/\theta} = 1,$$

тому $g_{\omega,\theta} \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при деякому $C_3 > 0$. Далі, беручи до уваги, що $S_{Q_n}(g_{\omega,\theta}, x) = 0$, а також враховуючи теорему A (Літтлвуда – Пелі) і співвідношення (4), одержуємо

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\| f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)\right\|_q \geq$$

$$\geq \left\| g_{\omega,\theta}(\cdot) - S_{Q_n}(g_{\omega,\theta},\cdot)\right\|_q = \left\| g_{\omega,\theta}\right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{(s,1)=n} \left|\delta_s(g_{\omega,\theta},\cdot)\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

При $\theta = \infty$ функція

$$g_{\omega,\infty}(x) = C_4 \omega(2^{-n}) \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} e^{i2^{s_j-1}x_j}, \quad C_4 > 0,$$

належить до класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$, тому що

$$\left\| g_{\omega,\infty}\right\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{(s,1)=n} \frac{\left\|\delta_s(g_{\omega,\theta},\cdot)\right\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} << \sup_{(s,1)=n} \left\| \prod_{j=1}^{d} e^{i2^{s_j-1}x_j}\right\|_p = 1.$$

Враховуючи те, що $S_{Q_n}(g_{\omega,\infty}, x) = 0$, а також використовуючи теорему А (Літтлвуда – Пелі) і порядкову рівність (4), одержуємо

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \geq \left\| g_{\omega,\infty}(\cdot) - S_{Q_n}(g_{\omega,\infty},\cdot)\right\|_q = \left\| g_{\omega,\infty}\right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{(s,1)=n} \left|\delta_s(g_{\omega,\infty},\cdot)\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \asymp \omega(2^{-n}) \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{1/2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)/2}.$$

Для одержання оцінки знизу при $1 \leq \theta < 2$ розглянемо функцію

$$g_{\omega}(x) = C_5 \omega(2^{-n}) e^{i(k^*,x)}, \quad C_5 > 0,$$

де $k^* \in \rho(s)$ при $s : (s, 1) = n$. Оскільки

$$\| g_{\omega}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{(s,1)=n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(g_{\omega},\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} << \left\| e^{i(k^*,\cdot)}\right\|_p = 1,$$

то $g_{\omega} \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при деякому $C_5 > 0$. Зважаючи на те, що $S_{Q_n}(g_{\omega}, x) = 0$, та враховуючи (4) і теорему А (Літтлвуда – Пелі), одержуємо

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \geq \left\| g_{\omega}(\cdot) - S_{Q_n}(g_{\omega},\cdot)\right\|_q = \| g_{\omega}\|_q >>$$

$$>> \omega(2^{-n}) \left\| e^{i(k^*,\cdot)}\right\|_q = \omega(2^{-n}).$$

Отже, оцінки знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що при $1 < p \leq q < \infty$ точні за порядком оцінки величин $E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ і $\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ встановлено в [1], тому теорема 1 доповнює результати роботи [1] по найкращому наближенню класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами з „номерами" гармонік із „ступінчасто-гіперболічних хрестів" та результати роботи [22] по наближенню класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ „ступінчасто-гіперболічними" сумами Фур'є.

Зауваження. **1.** При виконанні умов теореми 1 для $\theta = \infty$ має місце порядкова рівність

$$E_{Q_n}(H^{\Omega}_p)_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(H^{\Omega}_p)_q \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}.$$

2. Нехай $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha = r_1 > 0$ і умову (S_l), то виконується співвідношення

$$E_{Q_n}(B^r_{p,\theta})_q \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-r_1 n} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+},$$

встановлене в роботі [23].

3. Оцінки тригонометричних та колмогоровських поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у випадку $1 < q \leq p < \infty$. Спочатку наведемо деякі нові додаткові позначення та допоміжні твердження.

Для натурального n покладемо

$$\overline{S}_n = \{s : (s,1) = n,\ s_j \text{ — парні числа},\ j = \overline{1,d}\},$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s\in\overline{S}_n} \rho^+(s), \qquad \rho^+(s) = \{k : k = (k_1,\ldots,k_d),\ k_j \in Z_+,\ 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}\}$$

і нехай

$$T(\overline{Q}_n) = \left\{t : t(x) = \sum_{k\in\overline{Q}_n} a_k e^{i(k,x)}\right\}$$

позначає множину поліномів з номерами гармонік з $\overline{Q}_n$. Зазначимо, що для кількості елементів множини $\overline{Q}_n$ виконується порядкова рівність $|\overline{Q}_n| \asymp n^{d-1}$.

При наведених вище позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 1 [24]. *Нехай $M \leq 1/4\,|\overline{Q}_n|$. Тоді для довільного підпростору $\Psi \subset L_1(\pi_d)$ розмірності не більше M знайдеться функція $g \in T(\overline{Q}_n)$ така, що*

$$\left\|\overline{\delta}_s(g,\cdot)\right\|_\infty \leq \left|\overline{S}_n\right|^{-1/2}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

$$\overline{\delta}_s(g,x) = \sum_{k\in\overline{\rho}(s)} \hat{g}(k)e^{i(k,x)},$$

$$\|g\|_2 \geq c(d) > 0,$$

і для довільного $\psi \in \Psi$ $(g,\psi) = 0$.

Для $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ розглянемо наступні норми функцій $f \in L^0_q(\pi_d)$:

$$\|f\|_{B^0_{q,\theta}} = \begin{cases} \left(\sum_s \|A_s(f,\cdot)\|_q^\theta\right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_s \|A_s(f,\cdot)\|_q, & \theta = \infty, \end{cases}$$

де

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x) = f(x) * \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

а $V_m(t)$ —ядро Валле Пуссена порядку $2m-1$ вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos kt.$$

Якщо ж $1 < q < \infty$, то норму функції f в просторі $B^0_{q,\theta}$ можна записати у вигляді

$$\|f\|_{B^0_{q,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_q^\theta\right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_q, & \theta = \infty, \end{cases}$$

оскільки $\|A_s(f,\cdot)\|_q \asymp \|\delta_s(f,\cdot)\|_q$ при $1 < q < \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q \le 2 \le p < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$d_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведення. Оцінка зверху внаслідок порядкової нерівності $d_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_q) \ll \ll \mathscr{E}_{Q_n}(B^\Omega_{p,\theta})_q$ при $M \asymp |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$ випливає з відповідної оцінки наближення класу $B^\Omega_{p,\theta}$ сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ (див. теореми 5 [1] і 1).

Перейдемо до доведення оцінки знизу. Покажемо, що для класів H^Ω_p, якщо $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l), при $M \asymp \asymp 2^n n^{d-1}$ має місце оцінка

$$d_M(H^\Omega_p \cap T(\overline{Q}_n), L_q) \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)/2}.$$

Нехай задано M. Знайдемо парне число n таке, що

$$|\overline{Q}_{n-2}| < 4M \le |\overline{Q}_n|. \tag{5}$$

Внаслідок леми 1 знайдеться функція $g \in T(\overline{Q}_n)$ така, що

$$\|\overline{\delta}_s(g,\cdot)\|_p \le \|\overline{\delta}_s(g,\cdot)\|_\infty \le |\overline{S}_n|^{-1/2}, \quad s \in \overline{S}_n, \tag{6}$$

$$\|g(\cdot)\|_2 \ge c(d) > 0, \tag{7}$$

$$(g, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \Psi. \tag{8}$$

Покладемо

$$f_1(x) = C_6 \omega(2^{-n}) |\overline{S}_n|^{1/2} g(x), \qquad C_6 > 0.$$

Тоді $f_1 \in H^\Omega_p$ з деякою сталою $C_6 > 0$, що не залежить від n, оскільки, враховуючи, що $f_1 \in T(\overline{Q}_n)$, та (6), одержуємо

$$\|f_1\|_{H_p^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f_1,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} = \sup_{s\in\overline{S}_n} \frac{\|\overline{\delta}_s(f_1,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} <<$$

$$<< \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{1/2} \sup_{s\in\overline{S}_n} \frac{\|\overline{\delta}_s(g,\cdot)\|_\infty}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \le 1.$$

Оцінимо $\|f_1(\cdot)-\psi(\cdot)\|_{B^0_{1,1}}$ з урахуванням того, що $\psi\in\Psi$. Розглянемо $\delta = (f_1-\psi, g)$. З одного боку, внаслідок (7) і (8) маємо

$$\delta = (f_1,g)-(\psi,g) = (f_1,g) >> \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{1/2}\|g(\cdot)\|_2^2 \ge \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{1/2}c^2(d). \tag{9}$$

З іншого боку, з урахуванням (6)

$$\delta = \sum_{s\in\overline{S}_n}\left(\overline{\delta}_s(f_1-\psi,x),\overline{\delta}_s(g,x)\right) = \sum_{s\in\overline{S}_n}\left(\left(\sum_{\|s'-s\|_\infty\le 1} A_{s'}(f_1-\psi,x)\right),\overline{\delta}_s(g,x)\right) \le$$

$$\le \sup_{s\in\overline{S}_n}\|\overline{\delta}_s(g,\cdot)\|_\infty \sum_s \|A_s(f_1-\psi,\cdot)\|_1 \le |\overline{S}_n|^{-1/2}\|f_1(\cdot)-\psi(\cdot)\|_{B^0_{1,1}}. \tag{10}$$

З (9) і (10) одержуємо

$$\|f_1(\cdot)-\psi(\cdot)\|_{B^0_{1,1}} \ge \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|c^2(d) >> \omega(2^{-n})n^{d-1}.$$

З останнього співвідношення випливає, що для M та n, які задовольняють умову (5), має місце співвідношення

$$d_M(H_p^\Omega\cap T(\overline{Q}_n), B^0_{1,1}) >> \omega(2^{-n})n^{d-1}. \tag{11}$$

Для того щоб за допомогою (11) одержати оцінку знизу для величини $d_M(H_p^\Omega\cap T(\overline{Q}_n), L_q)$, встановимо зв'язок між нормами у просторах L_q, $1<q\le 2$, та $B^0_{1,1}$ для $f\in T(\overline{Q}_n)$.

З одного боку, для $f\in T(\overline{Q}_n)$

$$\|f\|_q >> \left(\sum_{s\in\overline{S}_n}\|\overline{\delta}_s(f,\cdot)\|_q^2\right)^{1/2} \asymp \|f\|_{B^0_{q,2}}, \tag{12}$$

а з іншого —

$$\|f\|_{B^0_{1,1}} = \sum_{s\in\overline{S}_n}\|A_s(f,\cdot)\|_1 \le \left(\sum_{s\in\overline{S}_n}\|A_s(f,\cdot)\|_1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s\in\overline{S}_n}1\right)^{1/2} <<$$

$$<< n^{(d-1)/2}\left(\sum_{s\in\overline{S}_n}\|A_s(f,\cdot)\|_q^2\right)^{1/2} = n^{(d-1)/2}\|f\|_{B^0_{q,2}}. \tag{13}$$

З (12) і (13) робимо висновок, що

$$\|f\|_q >> n^{-(d-1)/2}\|f\|_{B^0_{1,1}}. \tag{14}$$

З (11), враховуючи (14), одержуємо

$$d_M(H_p^\Omega\cap T(\overline{Q}_n), L_q) >> d_M(H_p^\Omega\cap T(\overline{Q}_n), B^0_{1,1})n^{-(d-1)/2} >> \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}. \tag{15}$$

Покажемо, що коли $f_2 \in H_p^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n)$, то для довільного $1 < p < \infty$ функція

$$g_1(x) = C_7 n^{-(d-1)/\theta} f_2(x), \quad C_7 > 0,$$

належить до класу $B_{p,\theta}^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n)$. Дійсно, враховуючи те, що $|\overline{S}_n| \asymp n^{d-1}$, знаходимо

$$\|g_1\|_{B_{p,\theta}^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n)} \asymp n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \left\| \overline{\delta}_s(f_2, \cdot) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \, \omega^{\theta}(2^{-(s,1)}) \right)^{1/\theta} = n^{-(d-1)/\theta} \left| \overline{S}_n \right|^{1/\theta} << 1.$$

Тому для випадку $1 \le \theta < \infty$, враховуючи (15), отримуємо

$$d_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \ge d_M(B_{p,\theta}^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) >>$$

$$>> d_M(H_p^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) n^{-(d-1)/\theta} >> \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то згідно з (15) одержуємо

$$d_M(B_{p,\infty}^{\Omega}, L_q) \ge d_M(H_p^{\Omega} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) >> \omega(2^{-n}) n^{(d-1)/2}.$$

Отже, оцінку знизу встановлено.

Теорему 2 доведено.

Теорема 2′. *При виконанні умов теореми 2 має місце порядкова рівність*

$$d_M^T(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Оцінка зверху в теоремі 2′ для тригонометричного поперечника $d_M^T(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$ реалізується при розгляді наближення класу $B_{p,\theta}^{\Omega}$ „ступінчасто-гіперболічними" сумами Фур'є (див. теореми 5 [1] і 1)

$$S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1) < n} \delta_s(f, x)$$

при $M \asymp |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$ внаслідок порядкової нерівності

$$d_M^T(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) << \mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_q.$$

Оцінка знизу випливає з нерівності (3) і теореми 2.

***Зауваження* 3.** Нехай $1 < q \le 2 \le p < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha = r_1 > 0$ і умову (S_l), то має місце порядкова рівність

$$d_M(B_{p,\theta}^{r}, L_q) \asymp d_M^T(B_{p,\theta}^{r}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1} (\log^{d-1} M)^{1/2-1/\theta},$$

яку для колмогоровського поперечника встановлено в роботі [25].

Теорема 3. *Нехай* $2 \le q \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$d_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з відповідної оцінки наближення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ „ступінчасто-гіперболічними" сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, x)$ при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ згідно з теоремами 5 [1] і 1.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Розглянемо спочатку випадок $1 \le \theta < 2$.

Нехай $T(Q_n)$ позначає множину функцій, які мають номери гармонік з множини

$$Q_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s).$$

За даним M підберемо n таким чином, щоб $|Q_n| \asymp M$ і $|Q_n| > 2M$. Нехай задано M функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_M(x)$, які будемо вважати ортонормованими. Розглянемо відхилення від функції $e^{i(k,x)}$, $k \in Q_n$, її суми Фур'є порядку M за системою $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, M}$, у просторі $L_2(\pi_d)$. Поклавши $\beta_k^j = (\varphi_j(x), e^{i(k,x)})$, внаслідок ортонормованості систем $\{e^{i(k,x)}\}_{k\in Q_n}$ і $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^M$ будемо мати

$$\sum_{k\in Q_n} \left|\beta_k^j\right|^2 \le 1,$$

а тому

$$\sum_{k\in Q_n} \sum_{j=1}^{M} \left|\beta_k^j\right|^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k\in Q_n} \left|\beta_k^j\right|^2 \le M.$$

З цієї нерівності робимо висновок, що існує вектор $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0)$, $k^0 \in Q_n$, такий, що

$$\sum_{j=1}^{M} \left|\beta_k^j\right|^2 \le \frac{1}{2}.$$

Тому

$$\left\| e^{i(k^0,\cdot)} - \sum_{j=1}^{M} \beta_{k^0}^j \varphi_j(\cdot) \right\|_2^2 \ge \left\| e^{i(k^0,\cdot)} \right\|_2^2 - \sum_{j=1}^{M} \left|\beta_{k^0}^j\right|^2 \ge \frac{1}{2}.$$

Далі розглянемо функцію

$$g_2(x) = \omega(2^{-(s^0,1)})\, e^{i(k^0,x)},$$

де вектор $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_d^0) \in \mathbb{N}^d$ вибрано за вектором $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in \mathbb{Z}^d$ з нерівності $2^{s_j^0 - 1} \le \left|k_j^0\right| < 2^{s_j^0}$, $j = \overline{1, d}$. Легко бачити, що $g_2 \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, тому що

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(g, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= \omega^{-1}(2^{-(s^0,1)})\, \omega(2^{-(s^0,1)}) \left\| e^{i(k^0,\cdot)} \right\|_p = 1,$$

і

$$\inf_{c_j}\left\| g_2(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j\varphi_j(\cdot)\right\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega(2^{-(s^0,1)}) \asymp \omega(2^{-n}). \tag{16}$$

Оскільки система функцій $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{M}$ вибиралась довільно, то з (16) випливає потрібна оцінка знизу у випадку $1 \leq \theta < 2$.

Оцінка знизу у випадку $2 \leq \theta \leq \infty$ випливає з теореми 2 при $q = 2$. Дійсно, оскільки при $2 \leq q < \infty$ $\|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_2$, то

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \geq d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Отже, оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

Теорема 3′. *При виконанні умов теореми* 3 *має місце порядкова рівність*

$$d^T_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

У теоремі 3′, як і в теоремі 2′, оцінка зверху реалізується „ступінчасто-гіперболічними" сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, x)$ (див. теореми 5 [1] і 1) при $M \asymp 2^n n^{d-1}$, а оцінка знизу випливає з теореми 3 внаслідок нерівності (3).

Зазначимо, що в [1] при $1 < p \leq q < \infty$ одержано точні за порядком оцінки величин $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, а в [26] встановлено точні порядкові оцінки для величин $d^T_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ при $1 < p < 2 \leq q < p/(p-1)$. Тому теореми 2, 3 та 2′, 3′ доповнюють відповідно результати робіт [1] і [26] щодо колмогоровських і тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Зауваження. **4.** При виконанні умов теорем 2, 2′, 3 і 3′ для $\theta = \infty$ має місце співвідношення

$$d_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^T_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}.$$

5. Нехай $2 \leq q \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha = r_1 > 0$ і умову (S_l), то має місце порядкова рівність

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{d-1}M)^{r_1}(\log^{d-1}M)^{(1/2-1/\theta)_+},$$

яку для колмогоровського поперечника встановлено в роботі [25].

1. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107 – 111.
6. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений // Успехи мат. журн. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
7. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.

8. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247 – 250.
9. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Там же. – № 5. – С. 982 – 985.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
11. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
12. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663 – 675.
13. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**. – Ч.І. – 427 с., Ч.ІІ. – 468 с.
14. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
15. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
16. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
17. *Майоров В. Е.* Тригонометрические n-поперечники класса W_1^r в пространстве L_q // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. – М.: ЦЭМИ, 1976. – С. 199 – 208.
18. *Makovoz Y.* On trigonometric n-widths and their generalizations // J. Approxim. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361 – 366.
19. *Романюк А. С.* Тригонометрические поперечники классов $B_{p,\theta}^r$ функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1089 – 1097.
20. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
21. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с., Т.2. – 537 с.
22. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1551 – 1559.
23. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Там же. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
24. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **189**. – С. 138 – 168.
25. *Романюк А. С.* О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Исследования по теории приближения функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 86 – 92.
26. *Стасюк С. А.* Тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 700 – 705.

Одержано 13.11.2003