

ДИФУЗІЙНА СИСТЕМА ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА: СИМЕТРІЇ ЛІ, ТОЧНІ ТА ЧИСЛОВІ РОЗВ'ЯЗКИ

A complete description of Lie symmetries is obtained for the diffusive Lotka–Volterra system. The results are used for finding exact solutions of the Lotka–Volterra system, which are further used for solving the nonlinear boundary-value problem with zero Neumann conditions. The analytic results are compared with the relevant numerical calculations using the finite element method. The obtained exact solutions are concluded to play an important role in solving Neumann boundary-value problems for the Lotka–Volterra system.

Наведено вичерпний опис симетрій Лі нелінійної дифузійної системи Лотки–Вольєрра. Результати застосовано для побудови точних розв'язків системи Лотки–Вольєрра, які в свою чергу використано для розв'язання відповідних нелінійних крайових задач з нульовими умовами Ноймана. Аналітичні результати порівняно з числовими обчисленнями з використанням методу скінченних елементів, на підставі чого зроблено висновок про важливу роль знайдених точних розв'язків при розв'язанні крайових задач Ноймана для системи Лотки–Вольєрра.

1. Вступ. У 20-х роках минулого століття А. Лотка [1] і В. Вольєрра [2] незалежно запропонували систему двох звичайних диференціальних рівнянь із квадратичними нелінійностями як математичну модель конкретних процесів. Перший з них вважав, що ця модель буде описувати експериментально зафіксовану періодичну зміну концентрацій двох хімічних речовин, які реагують, другий — що такі рівняння моделюють процес боротьби між двома популяціями тварин, одна з яких репрезентує хижаків, а інша — їхніх жертв. Хоча незабаром виявилось, що запропонована система рівнянь, названа системою Лотки–Вольєрра, недостатньо точно описує згадані процеси і має суттєві недоліки (див. детальніше [3], п. 3.1), різноманітні її узагальнення стали базовими моделями для опису широкого кола біологічних процесів; їхньому дослідженню присвячено величезну кількість робіт.

У цій статті ми розглядатимемо дифузійну систему Лотки–Вольєрра (ДСЛВ) вигляду

$$U_t = d_1 U_{xx} + U(a_1 + b_1 U + c_1 V), \quad (1)$$

$$V_t = d_2 V_{xx} + V(a_2 + b_2 U + c_2 V),$$

де d_k , a_k , b_k , c_k — довільні сталі, $k = 1, 2$; $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$ — шукані концентрації популяцій, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $U_t = \frac{dU}{dt}$, $V_t = \frac{dV}{dt}$, $U_{xx} = \frac{d^2 U}{dx^2}$, $V_{xx} = \frac{d^2 V}{dx^2}$.

Відомо, що цієї ДСЛВ моделюються три основні типи взаємодії двох біологічних видів:

i) випадок „хижак U — жертва V ”, коли

$$a_1 \leq 0, \quad b_1 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad b_2 \leq 0, \quad c_2 \leq 0;$$

ii) випадок змагання видів, коли

$$a_k \geq 0, \quad b_k \leq 0, \quad c_k \leq 0, \quad k = 1, 2;$$

iii) випадок симбіозу видів, коли

$$a_k \leq 0, \quad b_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \quad k = 1, 2.$$

Незважаючи на певну умовність такого поділу, він широко застосовується [3]. Зауважимо, що скрізь нижче ми вважатимемо $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, тобто обидва рівняння в (1) є рівняннями лінійної дифузії з нелінійними реактивними членами.

Починаючи з піонерських робіт [4, 5] умови існування, єдиності та стійкості розв'язків системи (1) при відповідних початкових і граничних умовах досліджувалися багатьма авторами (див. обширну бібліографію в [6]). Проте, наскільки нам відомо, практично немає робіт, в яких було б побудовано відповідні точні розв'язки. Серед таких робіт можна відзначити лише роботи [7, 8], в яких розглянуто деякий граничний випадок системи (1), що виникає при $a_1 = a_2 = b_1 = c_2 = 0$.

Робота побудована таким чином. У другому пункті класичний метод Лі (див., наприклад, [9]) застосовано для опису всеможливих симетрій Лі та знаходження точних розв'язків ДСЛВ (1). Зокрема, встановлено, що в залежності від значень коефіцієнтів a_k , b_k , c_k , d_k система (1) суттєво змінює свої симетрійні властивості. Серед побудованих розв'язків на особливу увагу заслуговують солітоноподібні розв'язки, які було отримано при певних обмеженнях на коефіцієнти системи (1).

У третьому пункті побудовані в п. 2 розв'язки застосовано для знаходження точних розв'язків відповідної нелінійної крайової задачі з нульовими граничними умовами Ноймана. Нагадаємо, що такі умови є типовими для опису біологічних процесів [3]. Отримані точні розв'язки порівнюються з відповідними наближеними розв'язками, які було одержано з допомогою числової методики, що базується на методах скінченних елементів та скінченних різниць [10], при різноманітних збуреннях початкових умов. Основний висновок цього пункту такий: побудовані точні розв'язки відіграють важливу роль для ДСЛВ (1), оскільки вказані вище числові розв'язки починаючи з певного моменту часу t з великою точністю збігаються з відповідними точними розв'язками незалежно від форми локальних збурень початкових умов.

2. Симетрії Лі та точні розв'язки ДСЛВ (1). Очевидно, що ДСЛВ (1) при довільно вибраних коефіцієнтах інваріантна відносно тривіальної алгебри Лі, породженої операторами зсувів за незалежними змінними

$$P_t = \partial_t, \quad P_x = \partial_x. \quad (2)$$

Виявляється, що існує низка випадків, коли ця нелінійна система допускає більш широку (нетривіальну) симетрію Лі.

Теорема 1. *ДСЛВ (1) при всеможливих значеннях коефіцієнтів допускає лише такі нетривіальні симетрії Лі, які наведені в таблиці. Якщо ДСЛВ (1) з деякими іншими коефіцієнтами допускає нетривіальну алгебру Лі, то локальною підстановкою вигляду*

$$\begin{aligned} U &\rightarrow c_{11} \exp(c_{10}t)U + c_{12}, \\ V &\rightarrow c_{21} + c_{22} \exp(c_{20}t)V, \end{aligned} \quad (3)$$

де c_{ki} — довільні сталі, $k = 1, 2$, $i = 0, 1, 2$, вона зводиться до однієї з поданих у таблиці.

Зауваження 1. У випадках 2–7, коли ДСЛВ (1) допускає оператор інваріантності $V\partial_V$ підстановкою $V \rightarrow \exp(\beta t)V$, її можна звести до еквівалентної, але з додатковим лінійним членом βV у другому рівнянні. У випадку 7 відповідну ДСЛВ можна симетризувати підстановкою $U \rightarrow U \pm V$ і тоді вона набирає вигляду

$$U_t = d_1 U_{xx} + b_1 U(U \pm V), V_t = d_1 V_{xx} + b_1 V(U \pm V).$$

Симетрії Лі ДСЛВ вигляду (1)

Порядковий номер	Вигляд нелінійностей	Обмеження	Оператори розширення тривіальної алгебри (2)
1	$U(b_1 U + c_1 V)$ $V(b_2 U + c_2 V)$		$D = 2tP_t + xP_x -$ $-2(U\partial_U + V\partial_V)$
2	$b_1 U^2$ $b_2 VU$		$D, V\partial_V$
3	$b_1 U^2$ 0		$D, V\partial_V$ $X^\infty = P(t, x)\partial_V$
4	$U(a_1 + b_1 U)$ $b_2 VU$		$V\partial_V$
5	$U(a_1 + b_1 U)$ 0		$V\partial_V$ X^∞
6	$U(a_1 + b_1 U)$ $V(a_1 + b_1 U)$	$d_1 = d_2$	$V\partial_V, U\partial_V$
7	$b_1 U^2$ $b_1 VU$	$d_1 = d_2$	$D, V\partial_V, U\partial_V$ $R = b_1 t U\partial_V + \partial_V$

Примітка. Функція $P(t, x)$ є довільним розв'язком лінійного рівняння дифузії $P_t = d_1 P_{xx}$, отже, оператором X^∞ породжується нескінченновимірна абелева алгебра Лі, яка є характерною для лінійних диференціальних рівнянь.

Доведення теореми ґрунтується на розв'язанні перевизначеної системи визначальних рівнянь, отриманої в роботі [11] для системи реакції-дифузії з нелінійностями найзагальнішого вигляду $F(U, V)$ і $G(U, V)$. Розв'язавши цю систему у випадку

$$F = U(a_1 + b_1 U + c_1 V), G = V(a_2 + b_2 U + c_2 V),$$

отримуємо набори симетрій Лі та відповідних нелінійностей, які наведено в таблиці. Підстановки вигляду (3) використовувалися для зменшення кількості випадків шляхом відкидання локально еквівалентних випадків. Детальне доведення ми не наводимо, оскільки воно досить громіздке.

З таблиці видно, що в усіх випадках розширення тривіальної симетрії Лі (2), окрім випадків 3 і 5, система (1) залишається зачепленою, а тому є реалістичною, оскільки зберігається щонайменше один член, який вказує на наявність взаємодії популяцій двох видів.

Серед часткових випадків ДСЛВ (1), наведених у таблиці, найбільш цікавою з точки зору теоретико-алгебраїчного аналізу є система (див. випадок 7)

$$\begin{aligned} U_t &= d_1 U_{xx} + b_1 U^2, \\ V_t &= d_1 V_{xx} + b_1 UV, \end{aligned} \quad (4)$$

яка інваріантна відносно шестивимірної алгебри Лі AG_6 з базовими операторами $P_t, P_x, D, R, V\partial_V, U\partial_V$. Нами було помічено, що чотиривимірна підалгебра цієї алгебри з базовими операторами $\langle P_t, R, V\partial_V, U\partial_V \rangle$ є новим зображенням псевдо-галілеївської алгебри $AG(1.1)$. Стандартне зображення цієї алгебри задається максимальною алгеброю інваріантності (МАІ) відомого рівняння дифузії з логарифмічною нелінійністю

$$U_t = U_{xx} + U \log U,$$

яка має базові оператори

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad Q = \exp(t)U\partial_U, \\ G &= \exp t P_x - \frac{x}{2} Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Зауважимо, що в роботі [12] описано всі квазілінійні узагальнення рівнянь типу реакції-дифузії, інваріантні відносно алгебри $AG(1.1)$ та її багатовимірних аналогів $AG(1.n)$ зі стандартними зображеннями. У випадку зображення $\langle P_t, R, V\partial_V, U\partial_V \rangle$ для отримання алгебри $AG(1.1)$ необхідно покласти

$$X_1 = -V\partial_V, \quad X_2 = P_t, \quad Q = b_1 U\partial_V, \quad G = R. \quad (6)$$

Алгебра AG_6 породжує шестипараметричну групу інваріантних перетворень ДСЛВ (4)

$$\begin{aligned} t &\rightarrow m_1^2 t + t_0, \quad x \rightarrow m_1 x + x_0, \\ U &\rightarrow m_1^{-2} U, \quad V \rightarrow (v_1 b_1 t + v_0)U + m_0 V + v_1, \end{aligned} \quad (7)$$

де $t_0, x_0, m_0, m_1, v_0, v_1$ — довільні дійсні параметри. Отже, застосовуючи (7) до довільного розв'язку $(U_0(t, x), V_0(t, x))$ ДСЛВ (4), отримуємо таку формулу його розмноження у шестипараметричну сім'ю розв'язків:

$$\begin{aligned} U_{new} &= m_1^2 U_0(m_1^2 t + t_0, m_1 x + x_0), \\ V_{new} &= m_0^{-1} [V_0(m_1^2 t + t_0, m_1 x + x_0) - \\ &\quad - (v_1 b_1 t + v_0) U_0(m_1^2 t + t_0, m_1 x + x_0) - v_1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Зокрема, формулу (7) можна застосувати до довільного розв'язку вигляду $U_0(t, x) = V_0(t, x)$, де $U_0(t, x)$ задовольняє нелінійне рівняння реакції-дифузії

$$U_t = d_1 U_{xx} + b_1 U^2. \quad (9)$$

Розв'язки рівняння (9) можна побудувати шляхом його редукції до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) по підалгебрах його МАІ, базовими операторами якої є $\langle P_t, P_x, D = 2tP_t + xP_x - 2U\partial_U \rangle$.

Знайдені симетрії можна також застосовувати для редукції (зведення) відповідних ДСЛВ до систем ЗДР. У разі побудови точних розв'язків отриманих таким чином систем ЗДР ми легко побудуємо розв'язки ДСЛВ вигляду (1).

Надалі ми вважатимемо, що система (1) не має нульових коефіцієнтів, тобто інваріантна лише відносно тривіальної алгебри Лі (2), і моделює випадок змагання між популяціями двох видів ii). Зручно зробити перепозначення $b_k \rightarrow -b_k, c_k \rightarrow -c_k$, а отже, ДСЛВ (1) набирає вигляду

$$\begin{aligned}U_t &= d_1 U_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\V_t &= d_2 V_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V),\end{aligned}\tag{10}$$

де всі коефіцієнти є додатними.

За операторами (2) легко будується плоскохвильовий анзац

$$U = \Phi(\omega), \quad V = \Psi(\omega), \quad \omega = x - vt, \quad v \in R,\tag{11}$$

за допомогою якого ДСЛВ (1) з довільними коефіцієнтами зводиться до системи ЗДР

$$\begin{aligned}d_1 \Phi_{\omega\omega} + v \Phi_{\omega} + \Phi(a_1 - b_1 \Phi - c_1 \Psi) &= 0, \\d_2 \Psi_{\omega\omega} + v \Psi_{\omega} + \Phi(a_2 - b_2 \Phi - c_2 \Psi) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Побудувати загальний розв'язок нелінійної системи ЗДР (12) при довільних коефіцієнтах неможливо, тому ми розглянемо спеціальний випадок. Нехай додатково виконується

$$\Psi = \beta_0 + \beta_1 \Phi,\tag{13}$$

де β_0, β_1 – поки що невідомі сталі.

Підставляючи (13) в (12), отримуємо перевизначену систему, яка має ненульові розв'язки лише при таких обмеженнях на коефіцієнти:

$$\begin{aligned}d_1 &= d_2 = \lambda, \\ \beta_0(a_2 - c_2 \beta_0) &= 0, \\ \beta_1(c_2 - c_1) &= b_1 - b_2, \\ a_1 - a_2 &= \beta_0 \left(c_1 - 2c_2 - \frac{b_2}{\beta_1} \right).\end{aligned}\tag{14}$$

Алгебраїчні рівняння (14) ведуть до двох суттєво різних випадків: $\beta_0 = 0$ і $\beta_0 = \frac{a_2}{c_2} > 0$. Проте в обох випадках система ЗДР (12) зводиться до одного рівняння вигляду

$$\lambda \Phi_{\omega\omega} + v \Phi_{\omega} + \Phi(a - b \Phi) = 0,\tag{15}$$

де

$$a = \begin{cases} a_1 = a_2, & \beta_0 = 0, \\ a_1 - a_2 \frac{c_1}{c_2}, & \beta_0 = \frac{a_2}{c_2}, \end{cases}\tag{16}$$

$$b = \begin{cases} \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1 - c_2}, & \beta_0 = 0, \\ b_1 + c_1 \beta_1, & \beta_0 = \frac{a_2}{c_2}, \end{cases}\tag{17}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}, & c_1 \neq c_2, \quad b_1 \neq b_2, \\ -\frac{a_2 b_1}{a_1 c_1}, & c_1 = c_2, \quad b_1 = b_2. \end{cases}\tag{18}$$

Нелінійне ЗДР (15) добре вивчене (див., наприклад, [3]), оскільки воно отримується редукцією класичного рівняння Фішера [13]

$$U_t = \lambda U_{xx} + U(a - bU)$$

за допомогою анзацу (11). Зокрема, відомий розв'язок (15) [14]

$$\Phi(\omega) = \frac{a}{b} \left[1 + c \exp \left(\pm \sqrt{\frac{a}{6\lambda}} \omega \right) \right]^{-2}, \quad (19)$$

де $v = \frac{5}{\sqrt{6}} \sqrt{\lambda a}$, c — довільна стала. При $c > 0$ та фіксованому верхньому знакові розв'язок (19) з урахуванням формул (13), (16), (17), (11) породжує такий розв'язок ДСЛВ (10):

$$U = \frac{a}{4b} \left[1 - \tanh \left(\sqrt{\frac{a}{24\lambda}} x - \frac{5a}{12} t + c_0 \right) \right]^2, \quad (20)$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 U,$$

де c_0 — довільна стала, а коефіцієнти a , b , β_0 , β_1 задаються формулами (16)–(18). Нижче ми покажемо, що розв'язок (20) в залежності від значення сталої β_0 має суттєво різні властивості, а тому моделює різні типи взаємодії популяцій видів. Зауважимо, що в частковому випадку, коли $a_2 = c_2 = 0$, ДСЛВ (10) називається системою Белоусова–Жаботинського, точний розв'язок якої побудовано в [15]. Той розв'язок легко отримується з (20), якщо (β_0, β_1) є розв'язком алгебраїчних рівнянь (14) при $a_2 = c_2 = 0$.

При $c < 0$ та фіксованому верхньому знакові розв'язок (19) веде до розв'язку ДСЛВ (10)

$$U = \frac{a}{4b} \left[1 - \coth \left(\sqrt{\frac{a}{24\lambda}} x - \frac{5a}{12} t + c_0 \right) \right]^2, \quad (21)$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 U,$$

який перетворюється в нескінченність в усіх точках (t, x) площини $\sqrt{\frac{a}{24\lambda}} x - \frac{5a}{12} t + c_0 = 0$. Ним можуть моделюватися певні патологічні типи взаємодії популяцій видів.

Зауважимо, що в роботі [16] побудовано точні розв'язки системи рівнянь Шіради–Кавасакі–Терамото, частковим випадком якої є ДСЛВ (10). Проте легко перевірити, що з отриманих у [16] розв'язків неможливо одержати будь-які розв'язки ДСЛВ (10) (окрім таких, що не залежать від просторової координати x).

3. Крайова задача Ноймана для ДСЛВ (10). Маючи вже знайдені розв'язки вигляду (20) нелінійної ДСЛВ (10), можна сформулювати таку теорему для розв'язання крайової задачі Ноймана з фіксованими початковими умовами.

Теорема 2. Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для ДСЛВ (10) при $d_1 = d_2 = \lambda$ та початкових умовах

$$U = \frac{a}{4b} \left[1 - \tanh \left(\sqrt{\frac{a}{24\lambda}} x + c_0 \right) \right]^2 \equiv U_0(x), \quad (22)$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 U_0(x)$$

і нульових крайових умов Ноймана

$$U_x(t, -\infty) = U_x(t, +\infty) = V_x(t, -\infty) = V_x(t, +\infty) = 0 \quad (23)$$

в області $\Omega = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)\}$ має вигляд (20). У формулах (22) і (20) c_0 — довільна стала, а коефіцієнти a, b, β_0, β_1 визначаються через (16)–(18).

Доведення зводиться до перевірки виконання для розв'язку (20) крайових умов (23) і початкової умови (22).

При біологічній інтерпретації цієї теореми виникає два принципово різних випадки: $\beta_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Якщо $\beta_0 \neq 0$, то розв'язок (20) має властивість

$$(U, V) \rightarrow \left(\frac{a_1}{b_1}, 0 \right) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (24)$$

якщо виконується умова

$$A > \max\{B, C\}, \quad (25)$$

де $A = \frac{a_1}{a_2}, B = \frac{b_1}{b_2}, C = \frac{c_1}{c_2}$ (зауважимо, що з (13) випливає умова $A(B-1) = B(C-1)$). Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між популяціями двох видів U і V є безкомпрісним і, врешті-решт, ріст популяції виду U веде до повного зникнення виду V . У випадку виконання протилежної умови

$$A < \min\{B, C\} \quad (26)$$

змагання за суттю має такий самий характер, але, зрештою, перемагає вид V . Зауважимо, що при $\beta_0 \neq 0$ інших співвідношень між A, B і C не виникає.

Якщо $\beta_0 = 0$ (при цьому з необхідністю $a_1 = a_2 = a$), то помічаємо, що розв'язок (20) має властивість

$$(U, V) \rightarrow \left(\frac{a(C-1)}{b_2(C-B)}, \frac{a(1-B)}{c_2(C-B)} \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Очевидно, що додатково має виконуватися умова $\beta_1 = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} > 0$ (див. (18)), яка забезпечує невід'ємність розв'язку (20). У термінах A, B і C ця умова еквівалентна виконанню співвідношень

$$B > A = 1 > C \quad (28)$$

або

$$C > A = 1 > B. \quad (29)$$

Розв'язком (20) з властивістю (27) описується випадок „м'якого” змагання між двома популяціями, який допускає як завгодно довге співіснування видів.

Наголосимо, що теореми існування розв'язків задачі Ноймана для ДСЛВ (10) з властивостями (24), (27) давно відомі (див. роботу [6] та наведену в ній бібліографію); зокрема, встановлено, що співвідношення (25), (26), (28) та (29) відіграють при цьому вирішальну роль. З другого боку, точні розв'язки, які є ілюстраціями до цих теорем, ні в цитованій вище, ні в інших аналогічних роботах не побудовано. Більше того, нижче ми покажемо шляхом побудови наближених розв'язків, що різноманітні локальні збурення в початковій умові (22) ведуть до розв'язків відповідної крайової задачі Ноймана, які через порівняно невеликий проміжок часу збігаються з розв'язком типу (20) (при цьому може спостерігатися зсув по змінній x на деяку фіксовану величину).

З метою дослідження ролі аналітичних розв'язків вигляду (20) для розв'язання задачі Ноймана з початковими умовами більш загального вигляду було отримано серію числових розв'язків ДСЛВ (10) за допомогою числового методу, який для випадку одного рівняння реакції-дифузії детально описано в [17]. Було отримано

числові розв'язки для різних збурень аналітичного розв'язку в початковий момент часу $t = 0$. При цьому значення коефіцієнтів дифузії було прийнято рівними $d_1 = d_2 = \lambda = 5, 0$, а коефіцієнтів a_i, b_i, c_i такими: $a_1 = 6, a_2 = 2, b_1 = 4, b_2 = 2, c_1 = 5, c_2 = 2$. Вирази для коефіцієнтів a, b, β_0, β_1 у формулах (20) вибирались такими: $a = a_1 - \frac{c_1 a_2}{c_2}, b = b_1 + c_1 \beta_1, \beta_1 = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}$, а значення $c_0 = 0$. На підставі результатів аналізу отриманих числових розв'язків збурені (в початковий момент часу) розв'язки можна умовно розділити за характером їх збіжності до точного розв'язку на два такі класи.

До першого класу належать розв'язки, які є такими локальними збуреннями точного розв'язку, що вони за порівняно невеликий проміжок часу збігаються до аналітичного (20) з дуже високою точністю. Один із таких прикладів ілюструє рисунок, а (якісна поведінка компонент V для всіх розглянутих випадків є аналогічною; суцільною і штриховою лініями позначено відповідно точний та збурений (числовий) розв'язки). Початкові умови для числового розв'язку вибирались такими:

$$U(0, x) = \begin{cases} U_e(0, x) + 0, 6, & x \in [0; 10], \\ U_e(0, x), & x \notin [0; 10], \end{cases} \quad (30)$$

$$V(0, x) = \begin{cases} V_e(0, x) + 0, 4, & x \in [-10; 0], \\ V_e(0, x), & x \notin [-10; 0], \end{cases}$$

тобто величина збурення становить 40 відсотків від максимальних значень U і V . Тут і нижче через U_e і V_e позначено компоненти точного розв'язку. Із рисунка, а видно, що збурений розв'язок за відносно невеликий проміжок часу $t = t_p \approx 20$ з високою точністю збігається з точним. Аналогічну картину отримуємо у випадку збурення початкових умов не „догори” (знак „+” у виразах (30)), а „донизу”

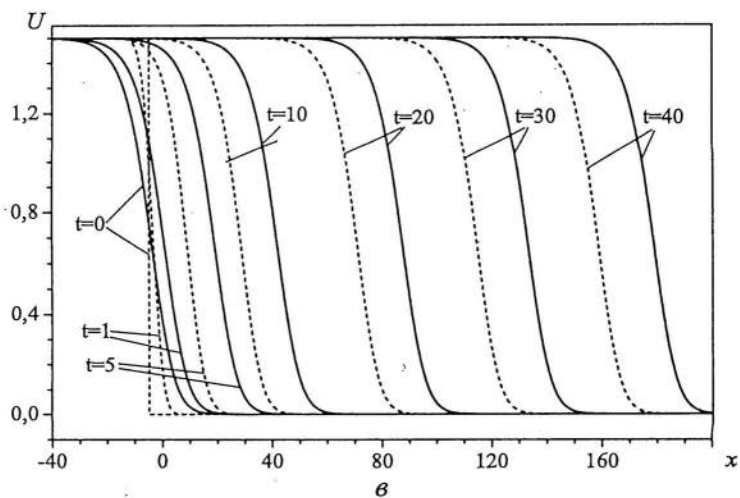
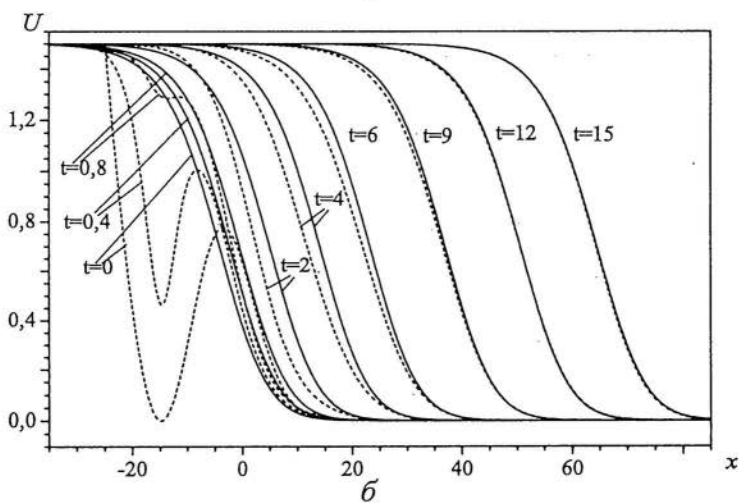
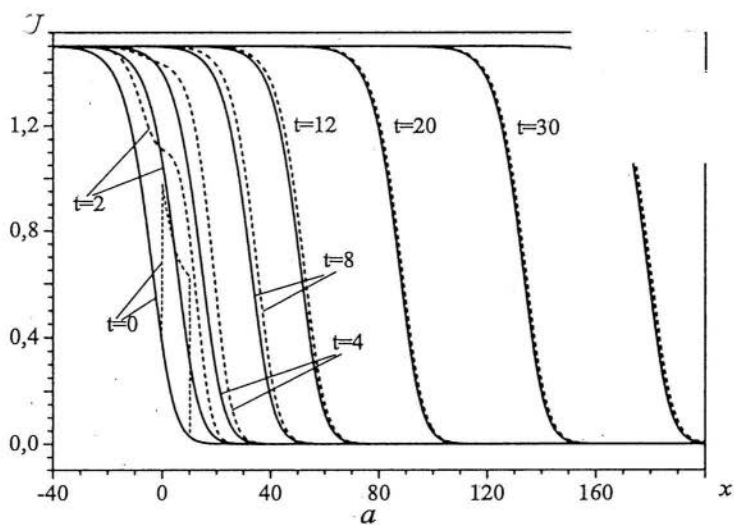
$$U(0, x) = \begin{cases} U_e(0, x) - 0, 6, & x \in [-20; -10], \\ U_e(0, x), & x \notin [-20; -10], \end{cases}$$

$$V(0, x) = \begin{cases} V_e(0, x) - 0, 4, & x \in [0; 10], \\ V_e(0, x), & x \notin [0; 10]. \end{cases}$$

На підставі обчислень встановлено, що при збільшенні довжини просторового відрізка, на якому збурюється точний розв'язок в початковий момент часу (при тій самій величині збурення функцій U_e і V_e), величина часу збільшується.

На поведінку збуреного розв'язку впливає величина просторового відрізка, на якому збурюється точний розв'язок, а також форма збурення. На рисунку, б зображено числовий розв'язок задачі Ноймана (10), (23) з початковими умовами, які є збуреннями точного розв'язку (при $t = 0$) у формі синусоїди:

$$U(0, x) = \begin{cases} U_e(0, x) \left[1 + \sin \frac{\pi(x - x_0)}{20} \right], & x \in [-20 + x_0; 20 + x_0], \\ U_e(0, x), & x \notin [-20 + x_0; 20 + x_0], \end{cases}$$



$$V(0, x) = \begin{cases} V_e(0, x) \left[1 + \sin \frac{\pi(x - x_0)}{20} \right], & x \in [-20 + x_0; 20 + x_0], \\ V_e(0, x), & x \notin [-20 + x_0; 20 + x_0]. \end{cases}$$

Тут величина x_0 вибрана з умови, що в точці $x = x_0$ в початковий момент часу значення точного розв'язку дорівнює половині свого максимального значення, тобто $U_e(0, x_0) = 0,75$, $V_e(0, x_0) = 0,5$. Для наведених вище значень коефіцієнтів величина $x_0 \approx -4,827482$. У цьому випадку довжина відрізка, на якому збурюється точний розв'язок у початковий момент часу, в декілька разів більша, ніж у попередньому, однак числовий розв'язок збігається до точного набагато швидше ($t_p \approx 12$).

До другого класу належать збурені розв'язки, які при зростанні часу збігаються до точного розв'язку, але зсунутого вздовж осі на деяку фіксовану величину x_1 : $u_p(t, x) \rightarrow u_e(t, x + x_1)$ при $t \rightarrow +\infty$. Наприклад, якщо початкові умови в задачі Ноймана (10), (23) є глобальними збуреннями (тобто збурений розв'язок при $t = 0$ збігається з точним лише на множині точок нульової міри) точного розв'язку $u_e(t, x)$, то відповідний збурений розв'язок u_p має саме таку властивість. Цей висновок ілюструє рисунок, в, де зображено поведінку U -компоненти збуреного розв'язку, котрий задовольняє на кінцях просторового відрізка $[-40; 200]$ граничні умови (23) і такі початкові умови:

$$U(0, x) = \begin{cases} 1,5, & x \leq x_0, \\ 0, & x > x_0, \end{cases} \quad V(0, x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ 1,0, & x > x_0. \end{cases}$$

Із рисунка, в, видно, що збурений розв'язок прямує до точного розв'язку, але зсунутого вздовж осі x ліворуч на однакову величину x_1 .

1. Lotka A. J. Updated oscillations derived from the law of mass action // J. Amer. Chem. Soc. – 1920. – 42. – P. 1595–1599.
2. Volterra V. Variazioni fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Mem. Acad. Lincei. – 1926. – 2. – P. 31–113.
3. Murray J. D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 767 p.
4. Conway E., Smoller J. Diffusion and predator-prey interaction // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – 33. – P. 673–686.
5. Brown P. N. Decay to uniform states in ecological interactions // Ibid. – 1980. – 38. – P. 22–37.
6. Lou Y., Ni W.-M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion // J. Different. Equat. – 1996. – 131. – P. 79–131.
7. Malfliet W. Series solution of nonlinear coupled reaction-diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1991. – 24. – P. 5499–5503.
8. Archilla J., Romero J., Romero F., Palmero F. Lie symmetries and multiple solutions in $\alpha - \omega$ reaction-diffusion systems // Ibid. – 1997. – 30. – P. 185–194.
9. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
11. Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems // Rept. Math. Phys. – 2000. – 46. – P. 63–76.
12. Фуцич В. И., Чернига Р. М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения, II // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 12. – С. 1687–1694.
13. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – 7. – P. 353–369.
14. Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. – 1979. – 41. – P. 835–840.
15. Гудков В. В. Точные решения типа распространяющихся волн некоторых эволюционных уравнений // Докл. РАН. – 1997. – 353. – С. 439–441.
16. Чернига Р. М. Нові точні розв'язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 10. – С. 1409–1421.
17. Cherniha R., Dutka V. Exact and numerical solutions of the generalized Fisher equation // Repts Math. Phys. – 2001. – 47, № 3. – P. 393–411.

Одержано 08.10.2003