УДК 517.977

А. В. Сукретна, О. А. Капустян (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НАБЛИЖЕНИЙ УСЕРЕДНЕНИЙ СИНТЕЗ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

For the problem of optimal control for a parabolic equataion in the case of bounded control, we construct and justify approximate homogeneous control in the form of reverse connection.

Для задачі оптимального керування для параболічного рівняння, у випадку обмеженого керування, побудовано і обґрунтовано наближене усереднене керування у формі оберненого зв'язку.

1. Вступ. Задача побудови оптимального керування у формі оберненого зв'язку або синтезу для нескінченновимірних динамічних систем є актуальною проблемою в теорії оптимального керування. З одного боку, керування практично всіма виробничими системами здійснюється за принципом оберненого зв'язку, а з іншого — проблема побудови обмежених оптимальних синтезованих керувань для нескінченновимірних динамічних систем ще далека від свого остаточного розв'язання. З практичної точки зору синтезоване керування має переваги над програмним, адже дозволяє здійснювати більш гнучке управління системою. Повний розв'язок задачі для випадку розподіленого керування без обмежень отримано в [1, 2]. Проте природна умова обмеженості керувань у таких системах значно ускладнює задачу. Крім того, нерегулярна залежність коефіцієнтів задачі від малого параметра (що пов'язана з неоднорідністю середовищ, в яких відбуваються досліджувані процеси) також додає певних складнощів, насамперед обчислювального характеру.

У даній роботі для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами і спеціальним напіввизначеним критерієм якості побудовано усереднене наближене обмежене керування за принципом оберненого зв'язку у випадку, коли керування виходить на обмеження. Аналогічні питання, але без швидкоосцилюючих коефіцієнтів, розглянуто в [3].

2. Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,1)$ керований процес у циліндрі $\bar{Q}_T = [0,T] \times \bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{aligned} y_t^\varepsilon(x,t) &= A^\varepsilon\big(y^\varepsilon(x,t)\big) + g^\varepsilon(x)v(t), \quad (t,x) \in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \\ y^\varepsilon(x,0) &= y_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon := \operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n = a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ — вимірна симетрична матриця, яка задовольняє умову рівномірної еліптичності, $g^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon(x) = g\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $a(x)$ та $g(x)$ — відповідно 1-періодичні матриця та функція, ε — малий параметр.

На керування накладено локальні обмеження

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2([0,T]) : |v(t)| \le \xi \quad \text{майже скрізь на} \quad [0;T]\}. \tag{2}$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб на розв'язках (1) при $v(\cdot) \in U$ мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega q(x) y^\varepsilon(x, T) dx \right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t) dt, \tag{3}$$

де $q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$.

У роботі [4] при деяких додаткових обмеженнях на функції g^ε та q виписано явні формули для синтезованого оптимального керування задачі (1)–(3). Проте ці формули містять нескінченні ряди, побудовані за коефіцієнтами Фур'є вихідних функцій g^ε, y_0, q та власними значеннями оператора A^ε. Крім того, згадані формули суттєво залежать від малого параметра ε, входження якого, як правило, нерегулярне. Вказані вище обставини суттєво ускладнюють практичне застосування цих результатів.

Мета даної роботи — на базі точної формули для синтезованого оптимального керування $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$ задачі (1)–(3) (тобто керування у формі оберненого зв'язку $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, яке б при підстановці в (1)–(3) замість $v(t)$ мінімізувало заданий критерій якості) у випадку виходу керування на обмеження побудувати наближене і певним чином усереднене керування та довести близькість отриманого керування $u_n[t, z_n^\varepsilon]$ до точного $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, а також близькість значень $J^\varepsilon(u_n[t, z_n^\varepsilon])$ и $J^\varepsilon(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])$.

3. Побудова наближеного усередненого синтезованого керування задачі (1)–(3). Відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v \in U$ задача (1) має єдиний розв'язок у класі $C([0, T]; H_0^1)$ [5]. Крім того, задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок $v^\varepsilon(\cdot) \in U$ [2].

Неважко переконатися, що для розв'язків задачі (1) при довільному керуванні $v \in U$ для кожного значення параметра $\varepsilon \in (0; 1)$ та для всіх $t \in [0; T]$ справджуються оцінки

$$\begin{gathered} \|y^\varepsilon(t)\|^2 \le 2 \left(\|y_0\|^2 + \frac{1}{\lambda_1^4} \|g^\varepsilon\|^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0;T]} |v(t)|^2 \right), \\ \|y_t^\varepsilon(t)\|^2 \le 3 \left(\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\|g^\varepsilon\|^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0;T]} |v(t)|^2 \right). \end{gathered} \tag{4}$$

Тут і далі $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$.

Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{gathered} A^\varepsilon X + \mu X = 0, \quad x \in \Omega, \\ X|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Тоді з урахуванням умови рівномірної еліптичності та [5] спектральна задача (5) при кожному $\varepsilon \in (0; 1)$ має прості власні числа $0 < (\lambda_1^\varepsilon)^2 < (\lambda_2^\varepsilon)^2 < \ldots$, $(\lambda_n^\varepsilon)^2 \to \to \infty$ при $n \to \infty$ і власні функції $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$, що утворюють ортонормований у $L_2(\Omega)$ та ортогональний у $H_0^1(\Omega)$ базис.

Поряд з оператором A^ε введемо усереднений оператор $A^0 := \operatorname{div}(a^0 \nabla)$, де a^0 — усереднена до $a^\varepsilon(x)$ матриця [6].

Нехай $\{(\lambda_i^0)^2\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{X_i^0\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ — відповідно власні значення та власні функції спектральної задачі (5) з оператором A^0, g^0 – середнє значення функції $g(x)$. Тоді відомо [6], що мають місце оцінки

$$|(\lambda_k^\varepsilon)^2 - (\lambda_k^0)^2| \le c_k\varepsilon, \qquad \|X_k^\varepsilon - X_k^0\| \le C_k\varepsilon, \quad k \ge 1, \tag{6}$$

та $g^\varepsilon \to g^0$, $\varepsilon \to 0$, слабко в $L_2(\Omega)$. Звідси легко отримуємо

$$g_i^\varepsilon = (g^\varepsilon, X_i^\varepsilon) \to (g^0, X_i^0) = g_i^0, \qquad q_i^\varepsilon = (q, X_i^\varepsilon) \to (q, X_i^0) = q_i^0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у $L_2(\Omega)$.

При $\varepsilon \in [0;1)$ введемо наступні позначення:

$$\begin{gathered} f^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon, \\ \Re^\varepsilon(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} X_i^\varepsilon(x), \end{gathered} \tag{7}$$

причому перший ряд збігається рівномірно по $t \in [0,T]$, а другий — у просторі $C([0,T];L_2)$.

Справедливою є наступна лема.

Лема. *При кожному $t \in [0;T]$ мають місце збіжності при $\varepsilon \to 0$*

$$f^\varepsilon(t) \to f^0(t), \qquad \|\Re^\varepsilon(\cdot,t) - \Re^0(\cdot,t)\| \to 0. \tag{8}$$

Доведення. При $t = T$ із (7) отримуємо

$$f^\varepsilon(T) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon = (q, g^\varepsilon) \to (q, g^0) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^0 g_i^0 = f^0(T), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\Re^\varepsilon(x,T) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x) = q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^0 X_i^0(x) = \Re^0(x,T).$$

Зафіксуємо довільні $t \in [0;T)$ та достатньо мале $\eta > 0$. Виберемо $N \in \mathbb{N}$ настільки великим, щоб

$$e^{((\lambda_N^0)^2-1)(t-T)} < \eta.$$

За знайденим N, використавши (6), визначимо $\varepsilon_0 > 0$ так, щоб при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ виконувались оцінки

$$0 < (\lambda_N^0)^2 - 1 < (\lambda_N^0)^2 - c_N\varepsilon < (\lambda_N^\varepsilon)^2, \quad \|g^\varepsilon\| \le 2\|g^0\|,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon - e^{(\lambda_i^0)^2(t-T)} q_i^0 g_i^0\right)\right| < \eta, \tag{9}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)} X_i^\varepsilon - \sum_{i=1}^{N} q_i^0 e^{(\lambda_i^0)^2(t-T)} X_i^0\right\| < \eta.$$

Тоді отримаємо

$$e^{(\lambda_N^\varepsilon)^2(t-T)} < e^{((\lambda_N^0)^2-1)(t-T)} < \eta,$$

$$\begin{gathered}\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)}q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon - e^{(\lambda_i^0)^2(t-T)}q_i^0 g_i^0\right)\right| \le \\ \le 2\|g^0\|\|q\|\left(e^{(\lambda_N^\varepsilon)^2(t-T)} + e^{(\lambda_N^0)^2(t-T)}\right) \le k_1\eta, \\ \left\|\sum_{i=N+1}^{\infty} q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-T)}X_i^\varepsilon - \sum_{i=N+1}^{\infty} q_i^0 e^{(\lambda_i^0)^2(t-T)}X_i^0\right\| \le \\ \le \|q\|\left(e^{(\lambda_N^\varepsilon)^2(t-T)} + e^{(\lambda_N^0)^2(t-T)}\right) \le k_2\eta,\end{gathered} \tag{10}$$

де сталі k_1 і k_2 не залежать від N та ε.

З нерівностей (9), (10) очевидним чином маємо (8).

Лему доведено.

Далі будемо вважати дані задачі (1)–(3) такими, що виконано наступні припущення.

Припущення 1. При довільному значенні параметра $\varepsilon \in [0; 1)$ функція $f^\varepsilon(t)$ є додатною і строго монотонно зростає на $[0; T]$.

Припущення 2. При кожному $\varepsilon \in [0; 1)$ виконується система нерівностей

$$\frac{|(\Re^\varepsilon(0), y_0)|\, f^\varepsilon(0)}{\gamma + \int_0^T (f^\varepsilon(s))^2 ds} < \xi,$$

$$\frac{|(\Re^\varepsilon(0), y_0)|\, f^\varepsilon(T)}{\gamma + \int_0^T (f^\varepsilon(s))^2 ds} > \xi.$$

Розглянемо допоміжну „усереднену" до (1)–(3) задачу оптимального керування

$$y_t^0(x,t) = A^0(y^0(x,t)) + g^0 v(t), \quad (t,x) \in Q_T,$$

$$y^0(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$y^0(x,0) = y_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{11}$$

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2([0,T]) : |v(t)| \le \xi \quad \text{майже скрізь на} \quad [0;T]\},$$

$$J^0(v) = \left(\int\limits_\Omega q(x) y^0(x,T)dx\right)^2 + \gamma\int\limits_0^T v^2(t)dt.$$

Відмітимо, що задача оптимального керування (11) має єдиний розв'язок $v^0 \in \in U$, крім того, при довільному фіксованому керуванні $v \in U$ для розв'язку крайової задачі (11) справедливими є оцінки типу (4).

Згідно з [4] при виконанні припущень 1,2 для довільного $\varepsilon \in [0; 1)$ існує τ^ε — єдина точка перемикання оптимального керування задачі (11) у випадку $\varepsilon = 0$ та задачі (1)–(3) у випадку $\varepsilon > 0$, яка визначається з рівняння

$$\frac{(\Re^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) + \xi \displaystyle\int_{\tau^\varepsilon}^{T} f^\varepsilon(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_t^{\tau^\varepsilon} (f^\varepsilon(s))^2 ds} f(\tau^\varepsilon) = -\xi \quad \text{при} \ t \in [0, \tau^\varepsilon]. \tag{12}$$

При цьому оптимальне керування задач (11) та (1) – (3) відповідно набирає вигляду

$$u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] = \begin{cases} -\dfrac{(\Re^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) + \xi \displaystyle\int_{\tau^\varepsilon}^{T} f^\varepsilon(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_t^{\tau^\varepsilon} (f^\varepsilon(s))^2 ds} f^\varepsilon(t), & t \in [0, \tau^\varepsilon], \\ \xi, & t \in [\tau^\varepsilon, T], \end{cases} \tag{13}$$

де $y^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок крайових задач (11) та (1) з керуванням (13), а точку перемикання τ^ε можна знайти з рівняння (12) і, крім того, τ^ε — єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{(\Re^\varepsilon(0), y_0) + \xi \displaystyle\int_{\tau^\varepsilon}^{T} f^\varepsilon(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_0^{\tau^\varepsilon} (f^\varepsilon(s))^2 ds} f(\tau^\varepsilon) = -\xi. \tag{14}$$

Перейдемо до розв'язання задачі наближеного синтезу.

Для довільного $\varepsilon \in [0;1)$ та $n \in \mathbb{N}$ введемо позначення

$$f_n^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2 (t-T)} q_i^\varepsilon g_i^\varepsilon,$$

$$\Re_n^\varepsilon(x,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i^\varepsilon e^{(\lambda_i^\varepsilon)^2 (t-T)} X_i^\varepsilon(x).$$

Будемо вимагати виконання наступного припущення.

Припущення 3. При довільному значенні параметра $\varepsilon \in [0;1)$ функція $f_n^\varepsilon(t)$ є додатною і строго монотонно зростає на $[0;T]$.

Нехай тепер $(12)_n$, $(13)_n$, $(14)_n$ — це формули (12), (13), (14), в яких всі входження $f^\varepsilon(t)$ і $\Re^\varepsilon(x,t)$ замінено на $f_n^\varepsilon(t)$ і $\Re_n^\varepsilon(x,t)$ відповідно, τ_n^ε — відповідна точка перемикання.

Тоді можна довести [3], що формально побудований закон $(12)_n - (14)_n$ є законом оптимального керування для задач (11) при $\varepsilon = 0$ та (1) – (3) при $\varepsilon > 0$ з функціоналом J^ε, в якому функцію $q(x)$ замінено на функцію $q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x)$, причому при кожному $n \in \mathbb{N}$ точка τ_n^ε визначається єдиним чином і для довільного $\varepsilon \in [0;1)$ має місце збіжність $\tau_n^\varepsilon \to \tau^\varepsilon$, $n \to \infty$.

Тепер побудуємо і обґрунтуємо закон наближеного усередненого синтезу для задачі (1) – (3), причому основною метою є доведення близькості значень критерію якості (3) на точному і побудованому керуваннях.

Далі основним об'єктом нашого дослідження буде наближене усереднене керування, що має вигляд

$$u_n[t, z_n^\varepsilon] = \begin{cases} -\dfrac{\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) + \xi \displaystyle\int_{\tau_n^0}^T f_n^0(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds} f_n^0(t), & t \in [0, \tau_n^0], \\ \xi, & t \in [\tau_n^0, T], \end{cases} \tag{15}$$

де $z_n^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок задачі (1) з керуванням (15), τ_n^0 — точка перемикання, яка є розв'язком рівняння $(12)_n$ при $\varepsilon = 0$.

Зауваження. Керування (15) не є, взагалі кажучи, неперервним у точці $t = \tau_n^0$.

4. Коректність запропонованого керування. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай g^ε, $q \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ та виконано припущення 1–3. Тоді для довільного малого $\eta > 0$ існують $N \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для будь-яких $n \geq N$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для керувань (13), (15) виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} &\|u_n[\cdot, z_n^\varepsilon] - u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon]\|_{L_2(0,T)} < \eta, \\ &|I(u_n[t, z_n^\varepsilon]) - I(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])| < \eta. \end{aligned} \tag{16}$$

Доведення. 1. Доведемо, що $u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] \to u^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$, в $L_2(0,T)$ рівномірно по $\varepsilon \in (0;1)$, де $u^0[t,\,\cdot\,]$ має форму (13) при $\varepsilon = 0$, а z^ε — розв'язок задачі (1) з керуванням $u^0[t, z^\varepsilon]$.

Для цього оцінимо

$$D = \|u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon]\|_{L_2(0,T)}^2 = \int\limits_0^T |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt.$$

Зафіксуємо довільне достатньо мале $\eta > 0$. Оскільки має місце збіжність точок перемикання відповідних керувань, виберемо $N_1 \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб для всіх $n \geq N_1$ виконувалася нерівність

$$|\tau_n^0 - \tau^0| < \frac{\eta^2}{144\xi^2}\,.$$

Далі розіб'ємо проміжок інтегрування в D на три проміжки: $\left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$, $\left[\tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2} \text{ і } \tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$, $\left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}; T\right]$. Тоді

$$D = D_1 + D_2 + D_3,$$

де

$$D_1 = \int\limits_0^{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}} |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt,$$

$$D_2 = \int\limits_{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}} |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt < 4\xi^2 \cdot 2 \cdot \frac{\eta^2}{144\xi^2} = \frac{\eta^2}{18}\,,$$

$$D_3 = \int\limits_{\tau^0+\frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{T} |u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]|^2 dt = 0.$$

Тепер покажемо, що $u_n[t, z_n^\varepsilon] \to u^0[t, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$, рівномірно по $\varepsilon \in (0;1)$ при кожному $t \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$.

Для довільного $t \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$ оцінимо

$$|u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]| =$$

$$= \left| -\frac{\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) + \xi \int_{\tau_n^0}^{T} f_n^0(s)ds}{\gamma + \int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds} f_n^0(t) + \frac{\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t)\right) + \xi \int_{\tau^0}^{T} f^0(s)ds}{\gamma + \int_t^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds} f^0(t) \right| \le$$

$$\le \alpha_n + \left| \frac{f^0(t)\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t)\right)}{\gamma + \int_t^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds} - \frac{f_n^0(t)\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right)}{\gamma + \int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds} \right|,$$

де на підставі леми $\alpha_n = \left| \dfrac{\xi f^0(t) \int_{\tau^0}^{T} f^0(s)ds}{\gamma + \int_t^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds} - \dfrac{\xi f_n^0(t) \int_{\tau_n^0}^{T} f_n^0(s)ds}{\gamma + \int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds} \right| \to 0, n \to \infty,$

при кожному $t \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$ і не залежить від ε.

Для скорочення викладок введемо позначення

$$h(t) = \frac{\xi f^0(t)}{\gamma + \int_t^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds}, \qquad h_n(t) = \frac{\xi f_n^0(t)}{\gamma + \int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds}.$$

Тоді

$$\left| \frac{f^0(t)\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t)\right)}{\gamma + \int_t^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds} - \frac{f_n^0(t)\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right)}{\gamma + \int_t^{\tau_n^0} (f_n^0(s))^2 ds} \right| =$$

$$= \left| h(t)\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t)\right) - h_n(t)\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) \right| \le$$

$$\le |h(t)\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\right)| + |h(t)\left(\Re^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) - h_n(t)\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right)|.$$

Оцінимо окремо кожен з доданків:

$$D_4 = |h(t)\left(\Re^0(t), z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\right)| \le \|h(t)\Re^0(\,\cdot\,, t)\| \, \|z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\|,$$

$$D_5 = |h(t)\left(\Re^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right) - h_n(t)\left(\Re_n^0(t), z_n^\varepsilon(t)\right)| \le$$

$$\le \|h(t)\Re^0(\,\cdot\,, t) - h_n(t)\Re_n^0(\,\cdot\,, t)\| \, \|z_n^\varepsilon(t)\| \le c\beta_n,$$

де на підставі леми $\beta_n \to 0$, $n \to \infty$, при кожному $t \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$ і не залежить від ε, а c — стала, що обмежує $\|z_n^\varepsilon(t)\|$; вона існує, скінченна і не залежить від ε та t внаслідок (4).

Для завершення доведення рівномірної по ε збіжності відповідних керувань покажемо, що $\|\omega_n^\varepsilon(t)\| = \|z^\varepsilon(t) - z_n^\varepsilon(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ при кожному $t \in \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$ рівномірно по ε.

Зауважимо, що $\omega_n^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$\omega_{nt}^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(\omega_n^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)(u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]), \quad (t,x) \in Q_T,$$

$$\omega_n^\varepsilon(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

$$\omega_n^\varepsilon(x,t_0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Розкладаючи функції задачі (17) в ряди Фур'є за системою $\{X_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$, для коефіцієнтів Фур'є $\omega_i(t)$ розв'язку крайової задачі $\omega_n^\varepsilon(x,t)$ отримуємо задачу Коші

$$\dot{\omega}_i = -(\lambda_i^\varepsilon)^2\omega_i + g_i^\varepsilon(u_n[t, z_n^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]),$$

$$\omega_i(0) = 0.$$

Звідси $\omega_i(t) \leq (g_i^\varepsilon)^2 T \int_0^t (u_n[s, z_n^\varepsilon] - u^0[s, z^\varepsilon])^2 ds$, а тому, використовуючи попередні міркування, отримуємо

$$\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2 \leq \varphi_n \int_0^t \|\omega_n^\varepsilon(s)\|^2 ds + \psi_n,$$

де при кожному t послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою, а $\psi_n \to 0$ при $n \to \infty$ і ці послідовності не залежать від ε.

Звідси за нерівністю Гронуолла–Беллмана знаходимо, що при кожному t $\|\omega_n^\varepsilon(t)\|^2 \to 0$, $n \to \infty$, рівномірно по ε.

Таким чином, $u_n[t, z_n^\varepsilon] \to u^0[t, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$, рівномірно по $\varepsilon \in (0;1)$ при кожному $t \in \left[0; \tau^0 - \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$, а отже,

$$\begin{gathered} \forall \eta > 0 \quad \exists N_2 \geq N_1 : \quad \forall n \geq N_2 \quad \forall \varepsilon \in (0;1) \\ \|u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon]\|_{L_2(0,T)} < \frac{\eta}{3}\,. \end{gathered} \tag{18}$$

2. Доведемо, що $u^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$, $\varepsilon \to 0$, при кожному $t \in [0,T]$, де $u^0[t, y^0]$ задається формулою (13) при $\varepsilon = 0$ і є оптимальним керуванням задачі (11) з точкою перемикання τ^0.

Оскільки розглядувані керування мають спільну точку перемикання τ^0, то досить довести вказану збіжність для довільного $t \in [0, \tau^0]$.

Враховуючи той факт, що $z^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок задачі (1) з відповідним керуванням і для розв'язків крайової задачі (1) мають місце оцінки (4), отримуємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;\tau^0]} \left\{ \|z^\varepsilon(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|z^\varepsilon_t(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right\} \le K,$$

де $K > 0$ — деяка стала, що не залежить від ε.

Тоді з леми про компактність випливає існування такої функції $z^0 = z^0(x,t)$, що для деякої підпослідовності для всіх $t \in [0;\tau^0]$ мають місце збіжності

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(t) &\to z^0(t), \qquad \varepsilon \to 0, \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega), \\ z^\varepsilon(t) &\to z^0(t), \qquad \varepsilon \to 0, \quad \text{слабко в} \quad H^1_0(\Omega), \\ z^\varepsilon_t(t) &\to z^0_t(t), \qquad \varepsilon \to 0, \quad \text{слабко в} \quad H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \tag{19}$$

Оскільки внаслідок (19) $z^\varepsilon(t) \to z^0(t)$, $\varepsilon \to 0$, слабко в $L_2(\Omega)$, то при кожному $t \in [0;\tau^0] : u_0[t,z^\varepsilon] \to u_0[t,z^0]$ при $\varepsilon \to 0$ по тій же підпослідовності. А тому $g^\varepsilon(x)u_0[t,z^\varepsilon] \to g^0 u_0[t,z^0]$ при $\varepsilon \to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$ для всіх $t \in [0;\tau^0]$. Остання обставина дозволяє перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ в задачі Коші для коефіцієнтів Фур'є розкладу функції $z^\varepsilon(x,t)$ за базисом $\{X^\varepsilon_i(x)\}$:

$$\begin{cases} \dot z^\varepsilon_i = -(\lambda^\varepsilon_i)^2 z^\varepsilon_i + g^\varepsilon_i u^0[t,z^\varepsilon], \\ z^\varepsilon_i(0) = y^\varepsilon_i, \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} \dot z^0_i = -(\lambda^0_i)^2 z^0_i + g^0_i u^0[t,z^0], \\ z^0_i(0) = y^0_i. \end{cases}$$

Це означає, що $p(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z^0_i(t) X^0_i(x)$ — єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} p_t &= A^0(p) + g^0 u^0[t,z^0], \\ p|_{\partial\Omega} &= 0, \quad p|_{t=0} = y_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Покажемо тепер, що $p \equiv z^0$. Для цього при кожному $t \in [0;\tau^0]$ оцінимо

$$\|z^\varepsilon(t) - p(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (z^\varepsilon_i(t) X^\varepsilon_i(\cdot) - z^0_i(t) X^0_i(\cdot)) \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=1}^{N_3-1} (z^\varepsilon_i(t) X^\varepsilon_i(\cdot) - z^0_i(t) X^0_i(\cdot)) \right\| + \left\| \sum_{i=N_3}^{\infty} (z^\varepsilon_i(t) X^\varepsilon_i(\cdot) - z^0_i(t) X^0_i(\cdot)) \right\| =$$

$$= I_1 + I_2$$

при кожному фіксованому $N_3 \ge 2$.

Оскільки для довільного $t \in [0;\tau^0] : z^\varepsilon(t) \to z^0(t)$, $\varepsilon \to 0$, в $L_2(\Omega)$ по підпослідовності та $X^\varepsilon_i \to X^0_i$, $\varepsilon \to 0$, в $L_2(\Omega)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $I_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0$ по цій підпослідовності.

Оцінимо I_2. Для кожного фіксованого $N_3 \ge 2$ виберемо з урахуванням (6) таке $\varepsilon_1 > 0$, щоб для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ виконувалися нерівності

$$0 < (\lambda^0_{N_3})^2 - 1 < (\lambda^0_{N_3})^2 - c_{N_3}\varepsilon < (\lambda^\varepsilon_{N_3})^2 \quad \text{та} \quad \|g^\varepsilon\| \le 2\|g^0\|.$$

Крім того, неважко помітити, що для $z^\varepsilon_i(t)$ і $z^0_i(t)$, як для розв'язків вищезгаданих задач Коші, справедливими є оцінки

$$(z^\varepsilon_i(t))^2 \le 2(y^{0\varepsilon}_i)^2 e^{-(\lambda^\varepsilon_i)^2 t} + 2\frac{(g^\varepsilon_i)^2}{(\lambda^\varepsilon_i)^2}(1 - e^{-(\lambda^\varepsilon_i)^2 t}),$$

$$(z_i^0(t))^2 \le 2(y_i^{00})^2 e^{-(\lambda_i^0)^2 t} + 2\frac{(g_i^0)^2}{(\lambda_i^0)^2}(1 - e^{-(\lambda_i^0)^2 t}),$$

де $y_i^{0\varepsilon}$ та y_i^{00} — коефіцієнти Фур'є при розкладі функції $y_0(x)$ за ортонормованими базисами $\{X_i^\varepsilon\}$ та $\{X_i^0\}$ відповідно. Тоді

$$I_2^2 \le \sum_{i=N_3}^{\infty} \left((z_i^\varepsilon(t))^2 + (z_i^0(t))^2\right) \le$$

$$\le 4\|y_0\|^2 e^{-((\lambda_{N_3}^0)^2 - 1)t} + \frac{6\|g^0\|^2}{(\lambda_{N_3}^0)^2 - 1} \to 0, \quad N_3 \to \infty.$$

Далі отримуємо

$$\forall \zeta > 0 \quad \exists N_3 \ge N_2 \quad \exists \widetilde{\varepsilon} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}) \quad \forall t \in [0; \tau_0]$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{N_3 - 1} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2},$$

$$\left\| \sum_{i=N_3}^{\infty} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\zeta}{2},$$

звідки $z^\varepsilon(t) \to p(t)$ при $t \in [0; \tau_0]$ в $L_2(\Omega)$, а отже, $p \equiv z^0$ внаслідок єдиності границі. Таким чином, z^0 — розв'язок задачі (20) з керуванням $u^0[t, z^0]$, а тому з єдиності розв'язку крайової задачі маємо, що $z^0 \equiv y^0$ і при кожному $t \in [0; \tau_0]$ збіжність $z^\varepsilon \to y^0$ має місце по всій послідовності $\varepsilon \to 0$.

Остаточно отримуємо, що для всіх $t \in [0; \tau_0]$ (а отже, і для всіх $t \in [0; T]$) $u^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \to 0$, а тому

$$\begin{gathered} \forall \eta > 0 \quad \exists N_3 \ge N_2 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 : \quad \forall n \ge N_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1) \\ \|u^0[\,\cdot\,, z^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, y^0]\|_{L_2(0,T)} < \frac{\eta}{3}\,. \end{gathered} \tag{21}$$

3. Доведемо, що $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$, $\varepsilon \to 0$, при кожному $t \in [0, T]$.

Оскільки $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$ — оптимальне синтезоване керування для задачі (1)–(3), а $u^0[t, y^0]$ — оптимальне синтезоване керування для задачі (11), то вказана збіжність легко випливає зі збіжності відповідних програмних керувань

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} -\dfrac{(\Re^\varepsilon(0), y^\varepsilon(0)) + \xi \displaystyle\int_{\tau^\varepsilon}^{T} f^\varepsilon(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_0^{\tau^\varepsilon} (f^\varepsilon(s))^2 ds} f^\varepsilon(t), & t \in [0, \tau^\varepsilon], \\ \xi, & t \in [\tau^\varepsilon, T], \end{cases}$$

$$u^0(t) = \begin{cases} -\dfrac{(\Re^0(0), y^0(0)) + \xi \displaystyle\int_{\tau^0}^{T} f^0(s)ds}{\gamma + \displaystyle\int_0^{\tau^0} (f^0(s))^2 ds} f^0(t), & t \in [0, \tau^0], \\ \xi, & t \in [\tau^0, T], \end{cases}$$

яка на підставі леми є очевидною.

Таким чином,

$$\begin{gathered}\forall \eta > 0 \quad \exists N_3 \geq N_2 \quad \exists \varepsilon_2 < \varepsilon_1 : \quad \forall n \geq N_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \\ \|u^\varepsilon[\,\cdot\,, y^\varepsilon] - u^0[\,\cdot\,, y^0]\|_{L_2(0,T)} < \frac{\eta}{3}\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Зі співвідношень (18), (21) та (22) легко отримуємо

$$\begin{gathered}\forall \eta > 0 \quad \exists N_3 \quad \exists \varepsilon_2 : \quad \forall n \geq N_3 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2) \\ \|u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon] - u^\varepsilon[\,\cdot\,, y^\varepsilon]\|_{L_2(0,T)} < \eta. \end{gathered} \tag{23}$$

Звідси, як і в п. 1, отримуємо при кожному $t \in [0; T]$ близькість у $L_2(\Omega)$ розв'язків крайової задачі (1) з відповідними керуваннями, а отже, і близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях, тобто

$$\begin{gathered}\forall \eta > 0 \quad \exists N_4 \quad \exists \varepsilon_3 : \quad \forall n \geq N_4 \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_3) \\ |I(u_n[\,\cdot\,, z_n^\varepsilon]) - I(u^\varepsilon[\,\cdot\,, y^\varepsilon])| < \eta. \end{gathered} \tag{24}$$

Зі співввідношень (23), (24) легко отримуємо (16), покладаючи

$$N = \max\{N_3, N_4\}, \qquad \varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Таким чином, теорему доведено.

Висновки. В роботі побудовано й обґрунтовано наближене усереднене синтезоване керування для параболічної крайової задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. Доведено збіжність побудованого наближеного керування до точного та близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях.

1. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. *Капустян О. А.* Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1704 – 1709.
4. *Капустян Е. А., Накопечный А. Г.* Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44 – 57.
5. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1997. – 643 p.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 461 с.

Одержано 01.06.2004