УДК 519.21

А. А. Погоруй, канд. физ.-мат. наук (НИИ „Квант", Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ МНОЖЕСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Asymptotic estimates are obtained for the behavior of the distribution of a functional which has the type of the first time of hitting an infinitely extending level by a semi-Markov process on an integer semiaxis.

Одержані асимптотичні оцінки поведінки розподілу функціоналу типу момента досягнення рівня, що нескінченно віддаляється, півмарківським процесом на цілочисловій півпрямій.

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — регулярный полумарковский процесс [1] с фазовым пространством $E = \{1, 2, \ldots\}$, вложенная цепь Маркова $\eta(m)$, $m \in N$, которого удовлетворяет условию:

1. Цепь $\eta(m)$, $m \in N$, неприводима и имеет стационарное распределение $\rho = \{\rho_i, i \in E\}$, причем $\forall\, n \geq 1$

$$\varepsilon_n = \sum_{i>n} \rho_i > 0.$$

Через e_n обозначим укрупненное до одного множество состояний $E^n = \{i: i > n\}$, а через Π_{ij}, $i, j \in \{k, e_n\}$ ($k \in E$ фиксированное) — переходные вероятности разреженной цепи Маркова $\eta_0^{(n)}(m)$, $m \in N$ [2], образованной из цепи $\eta(m)$ и определенной на фазовом пространстве $E^n = \{k, e_n\}$.

Из [2] известно, что $\forall\, n \geq k$

$$0 \leq \frac{\rho_k \Pi_{ke_n}}{\varepsilon_n} \leq 1, \tag{1}$$

следовательно, существуют

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\rho_k \Pi_{ke_n}}{\varepsilon_n} = A_0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\rho_k \Pi_{ke_n}}{\varepsilon_n} = A_1. \tag{2}$$

Там же доказывается, что если существует

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\rho_k \Pi_{ke_n}}{\varepsilon_n} \right) = A,$$

то A не зависит от k. Аналогично можно показать, что A_0 и A_1 не зависят от k.

Обозначим через $\tau_n^{(k)}$, $n > k$, момент достижения процессом $\xi(t)$ множества E^n при условии, что $\xi(0) = k$, т. е. $\inf\{t: \xi(t) \in E^n / \xi(0) = k\}$.

Нас интересует асимптотическое поведение распределения случайной величины (с. в.) $\varepsilon_n \tau_n^{(k)}$ при $n \to \infty$.

Пусть ξ_i — время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии $i \in E$, $a_i = M\xi_i$.

Предполагается выполненным условие:

2. $$\sup_{i \in E} a_i = c < \infty.$$

Пусть $\xi_0^{(n)}(t)$, $t \geq 0$, — разреженный полумарковский процесс [2], образо-

© А. А. ПОГОРУЙ, 1994

ванный из процесса $\xi(t)$ и определенный на фазовом пространстве $E_0^{(n)} = \{ k, e_n \}$, тогда $\eta_0^{(n)}(t)$, $m \in N$, — вложенная в $\xi_0^{(n)}(t)$ цепь Маркова.

Через $G_n(t)$ обозначим функцию распределения времени пребывания процесса $\xi_0^{(n)}(t)$ в состоянии k, и пусть она имеет плотность $g_n(t)$. Положим

$$m_1^n = \int_0^\infty t g_n(t)\,dt; \quad V_n = \frac{\rho_k \Pi_{ke_n}}{\varepsilon_n}; \quad B_n = (m_1^{(n)})^{-1} V_n;$$

$$R_0^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^\infty g_n^{(i)*}(t) - (m_1^{(n)})^{-1},$$

где

$$g_n^{(i)*}(t) = \int_0^t g_n^{(i-1)*}(t-u) g_n(u)\,du,$$

$$i \ge 2, \quad g_n^{(1)*}(t) = g_n(t), \quad F_{\varepsilon_n}(t) = P\{\varepsilon_n \tau_n^{(k)} \ge t\}, \quad F_0^{(n)}(t) = e^{-B_n t}.$$

Лемма. *Если выполнены условия* 1, 2, *то*

$$F_{\varepsilon_n}(t) = e^{-B_n t} - \int_0^t F_{\varepsilon_n}(t-u) \Bigg[R_0^{(n)}(u/\varepsilon_n) V_n - V_n B_n \int_0^u R_0^{(n)}((u-v)/\varepsilon_n) e^{-B_n v} dv \Bigg] du. \tag{3}$$

Доказательство. Функция $F_{\varepsilon_n}(t)$ удовлетворяет сингулярно-возмущенному уравнению марковского восстановления [1]

$$F_{\varepsilon_n}(t) = \overline{G}_n(t/\varepsilon_n) + \int_0^{t/\varepsilon_n} g_n(s)(1-\Pi_{ke_n}) F_{\varepsilon_n}(t - s/\varepsilon_n)\,ds, \tag{4}$$

где $\overline{G}_n(t/\varepsilon_n) = 1 - G_n(t/\varepsilon_n)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_n}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_{\varepsilon_n}(t)\,dt, \\ g_n(\varepsilon_n\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\varepsilon_n \lambda t} g_n(t)\,dt, \\ Q_n(\varepsilon_n\lambda) &= g_n(\varepsilon_n\lambda)(1-\Pi_{ke_n}), \\ R_0^{(n)}(\varepsilon_n\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\varepsilon_n\lambda t} R_0^{(n)}(t)\,dt, \\ \overline{G}_n(\varepsilon_n\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\varepsilon_n\lambda t}\, \overline{G}_n(t)\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

$$F_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_0(t)\,dt.$$

Из (4) с учетом (5) имеем

$$F_{\varepsilon_n}(\lambda) = \varepsilon_n (1 - Q_n(\varepsilon_n \lambda))^{-1}\, \overline{G}_n(\varepsilon_n \lambda). \tag{6}$$

Определим $S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda)$ равенством

$$S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) = \varepsilon_n^{-1} m_1^{(n)}\, \overline{G}_n^{-1}(\varepsilon_n \lambda) - \varepsilon_n^{-1}. \tag{7}$$

Из (6), (7) следует

$$Q_n(\varepsilon_n \lambda) = g_n(\varepsilon_n \lambda)(1 - \Pi_{ke_n}) =$$

$$= (1 - \varepsilon_n \lambda m_1^{(n)})(1 + \varepsilon_n S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda))^{-1}(1 - \Pi_{ke_n}).$$

Из последнего равенства получаем

$$F_{\varepsilon_n}(\lambda) = (\lambda + B_n + \varepsilon_n (S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) - \lambda\, m_1^{(n)}) B_n)^{-1},$$

$$F_{\varepsilon_n}^{-1}(\lambda) F_0^{(n)}(\lambda) = (\lambda + B_n) F_0^{(n)}(\lambda) +$$

$$+ \varepsilon_n (S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) - \lambda\, m_1^{(n)}) B_n F_0^{(n)}(\lambda). \tag{8}$$

Так как

$$1 - B_n F_0^{(n)}(\lambda) = \lambda F_0^{(n)}(\lambda), \quad (\lambda + B_n) F_0^{(n)}(\lambda) - 1 = 0,$$
$$S^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) - \lambda\, m_1^{(n)} = \lambda\, m_1^{(n)} R_0^{(n)}(\varepsilon_n \lambda), \tag{9}$$

имеем

$$F_{\varepsilon_n}(\lambda) = F_0^{(n)}(\lambda) - F_{\varepsilon_n}(\lambda)(\varepsilon_n m_1^{(n)} R_0^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) B_n -$$

$$- \varepsilon_n m_1^{(n)} R_0^{(n)}(\varepsilon_n \lambda) B_n^2\, F_0^{(n)}(\lambda)),$$

откуда, переходя к обратным преобразования Лапласа, получаем утверждение леммы.

Теорема. *Пусть помимо условий* 1, 2 *выполнены условия:*

3. *Для* $\forall\, n > 1$ *существуют*

$$m_2^{(n)} = \int_0^\infty t^2 g_n(t)\,dt, \quad m_3^{(n)} = \int_0^\infty t^3 g_n(t)\,dt, \quad \lim_{n \to \infty} m_2^{(n)} = m_2 < \infty.$$

4. $$\sup_{n > 1} \int_0^\infty |R_0^{(n)}(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда равномерно по $t \in [0, T]$, $0 < o < T < \infty$,

$$\exp\left\{-\sup_{i \ge n} B_i(t)\right\} + \varepsilon_n \min_{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]} f(\lambda, t, m_1, m_2) +$$

$$+ o(\varepsilon_n) \le P\{\varepsilon_n \tau_n^{(k)} \ge t\} \le$$

$$\leq \exp\left\{-\inf_{i\geq n} B_i(t)\right\} + \varepsilon_n \max_{\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]} f(\lambda, t, m_1, m_2) + o(\varepsilon_n), \tag{10}$$

где

$$\lambda_0 = A_0/m_1, \quad \lambda_1 = A_1/m_1, \quad m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i a_i,$$

$$f(\lambda, t, m_1, m_2) = (\lambda^2 t - \lambda)(m_1 - m_2/2m_1)\, e^{-\lambda t}.$$

Доказательство. Проитерировав равенство (3) один раз, получим

$$F_{\varepsilon_n}(t) = e^{-B_n t} - \int_0^t \left\{ e^{-B_n(t-u)} - \int_0^{t-u} F_{\varepsilon_n}(t-u-y)\left[R_0^{(n)}(y/\varepsilon_n)V_n - \right.\right.$$

$$\left.\left. - V_n B_n \int_0^y R_0^{(n)}((y-s)/\varepsilon_n)e^{-B_n s}\, ds \right] dy \right\}\left[R_0^{(n)}(u/\varepsilon_n)V_n - \right.$$

$$\left. - V_n B_n \int_0^u R_0^{(n)}((u-v)/\varepsilon_n)e^{-B_n v} dv \right] du. \tag{11}$$

Раскрывая скобки, оцениваем слагаемые правой части (11):

$$\int_0^t e^{-B_n(t-u)} R_0^{(n)}(u/\varepsilon_n)V_n\, du =$$

$$= \varepsilon_n V_n \int_0^{t/\varepsilon_n} (e^{-B_n(t-\varepsilon_n s)} - e^{-B_n t}) R_0^{(n)}(s)\, ds +$$

$$+ \varepsilon_n V_n e^{-B_n t} \int_0^{t/\varepsilon_n} R_0^{(n)}(s)\, ds =$$

$$= \varepsilon_n (m_1^{(n)})^{-2}(m_2^{(n)}/2 - (m_1^{(n)})^2) V_n e^{-B_n t} + o(\varepsilon_n). \tag{12}$$

Здесь использовалось то, что в условиях теоремы [3]

$$\int_0^{\infty} R_0^{(n)}(s)\, ds = (m_1^{(n)})^{-2}(m_2^{(n)}/2 - (m_1^{(n)})^2).$$

Аналогично

$$B_n V_n \int_0^t e^{-B_n(t-u)} \int_0^u R_0^{(n)}((u-v)/\varepsilon_n) e^{-B_n v} dv\, du =$$

$$= \varepsilon_n B_n V_n \int_0^t e^{-B_n(t-u)} \int_0^{u/\varepsilon_n} R_0^{(n)}(s)\, e^{-B_n(u-\varepsilon_n s)} ds\, du =$$

$$= \varepsilon_n B_n V_n t\, e^{-B_n v}(m_1^{(n)})^{-2}(m_2^{(n)}/2 - (m_1^{(n)})^2) + o(\varepsilon_n). \tag{13}$$

Далее, учитывая, что $F_{\varepsilon_n}(t) \leq 1$, (1) и условие 4, имеем

$$V_n^2 \left| \int_0^t \int_0^{t-u} F_{\varepsilon_n}(t-u-y) R_0^{(n)}(y/\varepsilon_n) R_0^{(n)}(u/\varepsilon_n)\, dy\, du \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon_n^2 \left(\int_0^\infty \left| R_0^{(n)}(s) \right| ds \right)^2 = o(\varepsilon_n). \tag{14}$$

В [2] доказывается, что

$$\lim_{n \to \infty} m_1^{(n)} = m_1 = \sum_{i=1}^\infty \rho_i a_i. \tag{15}$$

Учитывая (15) и условие 2, получаем

$$\left| B_n^2 V_n^2 \int_0^t \int_0^{t-u} F_{\varepsilon_n}(t-u-y) \int_0^y R_0^{(n)}((y-v)/\varepsilon_n) e^{-B_n s} ds dy \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^u R_0^{(n)}((u-v)/\varepsilon_n) e^{-B_n v} dv\, du \right| \leq$$

$$\leq t/2m_1 \varepsilon_n^2 \left(\int_0^\infty \left| R_0^{(n)}(s) \right| ds \right)^2 = o(\varepsilon_n). \tag{16}$$

Аналогично доказывается, что остальные слагаемые в правой части (11), содержащие $F_{\varepsilon_n}(t)$, имеют порядок $o(\varepsilon_n)$.

Переходя к верхнему и нижнему пределу в (12), (13) при $n \to \infty$ с учетом (14)–(16) и условия 3, получаем доказательство теоремы.

В качестве следствия из (10) имеем

$$e^{-\lambda_1 t} + o(1) \leq P\{\varepsilon_n \tau_n^{(k)} \geq t\} \leq e^{-\lambda_0 t} + o(1).$$

Замечание. В [2] при условии существования

$$\lim_{n \to \infty} V_n = A > 0$$

доказано, что

$$\lim_{n \to \infty} P\{\varepsilon_n \tau_n^{(k)} \geq t\} = e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = A/m_1$. Отказавшись от требования существования предела A, мы получили в некотором смысле обобщение этого результата.

Учитывая результаты, полученные в [4], неравенства (10) при дополнительных условиях могут быть выписаны с точностью $o(\varepsilon_n^l)$ $\forall\, l \geq 1$.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев, Наук. думка, 1976. – 181 с.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф., Томусяк А. А.* Время пребывания полумарковского процесса в расширяющемся множестве состояний // Аналитические методы в теории вероятностей. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 62–69.
3. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 289 с.
4. *Погоруй А. А.* Асимптотическое разложение распределения момента достижения полумарковским процессом бесконечно удаляющегося уровня // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Наук. думка, 1992. – С. 69–76.

Получено 29.12.92