УДК 517. 53

Е. К. Крутиголова, канд. физ.-мат. наук (Дрогобыч. пед. ин-т),

Ю. И. Мельник, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА–ДИРИХЛЕ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Necessary and sufficient conditions of absolute convergence of the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z)$$

in an open region are established. We also give conditions under which an arbitrary function analytic in a closed region (analytic in an open region and continuous in a closed region) can be represented by a series of this type.

Встановлено необхідні і достатні умови для абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z)$$

у відкритій області. Наведено також умови для зображення рядом вказаного вигляду довільної функції, аналітичної в замкненій (аналітичної у відкритій і неперервної у замкненій) області.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с нулями λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, соответственно кратностей $m_\nu \le m_0 = \mathrm{const}$.

Обозначим через $\gamma(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $L(\lambda)$, и через $\overline{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, D — открытая часть $\overline{D}$.

Возьмем произвольную аналитическую в $\overline{D}$ функцию $F(z)$ и, следуя А. Ф. Леонтьеву [1, с. 237], сопоставим ей ряд

$$F(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z), \tag{1}$$

где

$$a_{\nu,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \left\{ \frac{1}{k!(m_\nu - k - 1)!} \sum_{q=0}^{m_\nu - k - 1} q! C^q_{m_\nu - k - 1} \left[M_\nu(\mu) \right]^{(m_\nu - k - 1)}_{\lambda = \lambda_\nu} A_{\nu,q}(t) \right\} dt, \tag{2}$$

C — замкнутый контур, охватывающий множество $\overline{D}$, такой, что функция $F(z)$, аналитическая в точках $z \in C$ и внутри C, $A_{\nu,q}(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией

$$L(\lambda)/(\lambda - \lambda_\nu)^{q+1}, \quad q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1.$$

Если функция $F(z)$ аналитическая в D и непрерывная на $\overline{D}$, то предположим дополнительно, что

$$|L(re^{i\varphi})| < A \exp(h(\varphi) r)/r^{\mu}, \quad \mu > 1, \quad A = \mathrm{const}. \tag{3}$$

В этом случае функции $F(z)$ ставим в соответствие ряд (1), в котором коэффициенты $a_{\nu,k}$ вычисляются по формуле (2), где следует положить $C = \partial \overline{D}$ (условие (3) гарантирует непрерывность $A_{\nu,q}(t)$ на $\partial \overline{D}$) [1, с. 233].

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости ряда (1) в области D, а также условия сходимости этого ряда именно к своей функции $F(z)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $F(z)$ *аналитическая в* $\overline{D}$ *или аналитическая в* D *и непрерывная в* $\overline{D}$ *при условии* (3). *Для того чтобы ряд* (1), *в котором* λ_ν *— нули функции* $L(\lambda)$, *а коэффициенты* $a_{\nu,k}$ *вычисляются по формуле* (2), *сходился абсолютно в* $\overline{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$|L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)| > \exp((h(\varphi)-\varepsilon)|\lambda_\nu|), \quad \varepsilon > 0, \quad \nu > \nu_0(\varepsilon). \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем функцию $F(z) = \exp(\lambda z)$, $\lambda \neq \lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, и сконструируем для нее ряд (1). Поскольку [1, с. 228]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C A_{\nu,q}(t)\exp(\lambda t)\,dt = L(\lambda)/(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}, \;\; q = 0, 1, \ldots; m_\nu - 1, \;\; \nu = 1, 2, \ldots,$$

то искомый ряд имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\left(\frac{1}{k!(m_\nu-k-1)!}\sum_{q=0}^{m_\nu-k-1} q!\,C^q_{m_\nu-k-1}[M_\nu(\mu)]^{(m_\nu-k-q-1)}_{\lambda=\lambda_\nu}\frac{L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}}\right)\times$$
$$\times z^k\exp(\lambda_\nu z). \tag{5}$$

По предположению ряд (5) сходится абсолютно в D, поэтому сходится абсолютно в D также ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu(\lambda_\nu)\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_\nu}z^k\exp(\lambda_\nu z), \tag{6}$$

полученный из (5) при $q = 0$, $k = m_\nu - 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда начало координат принадлежит D. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и $0 < \rho < 1$. Пусть D_0 — область, образованная точками вида $z = \rho t$, $t \in D$, тогда

$$\max_{z\in\overline{D}_0}\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = \rho\max_{t\in\overline{D}}\operatorname{Re}(te^{i\varphi}) = \rho h(\varphi).$$

Обозначим через $D_1 \subset D_0$ множество тех точек $z \in D_0$, для которых

$$\max_{z\in D_0}\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = \rho h(\varphi),$$

и выберем ρ таким, чтобы выполнялось условие $\rho h(\varphi) > h(\varphi) - \varepsilon$. Пусть

$$|z_0| = \max_{z\in\overline{D}_1}|z|.$$

Тогда для всех $z \in \overline{D}_0$ получим

$$|z^{m_\nu-1}\exp(\lambda_\nu z)| \le |z_0|^{m_\nu-1}|\exp(\lambda_\nu z_0)|, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, ряд (6) сходится равномерно в $\overline{D}_0$, поэтому имеется постоянная $C = C(\rho)$ такая, что

$$|M_\nu(\lambda_\nu)(L(\lambda)/(\lambda-\lambda_\nu))z^{m_\nu-1}\exp(\lambda_\nu z)| < C, \quad z \in \overline{D}_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Так как λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, — нули функции $L(\lambda)$ кратностей m_ν, то при каждом $\nu = 1, 2, \ldots$ тейлоровское разложение функции $L(\lambda)$ в окрестности точки λ_ν имеет вид

$$L(\lambda) = (\lambda-\lambda_\nu)^{m_\nu}\left[\frac{L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)}{m_\nu!} + \frac{L^{(m_\nu+1)}(\lambda_\nu)}{(m_\nu+1)!}(\lambda-\lambda_\nu)+\dots\right].$$

Поэтому имеем

$$M_\nu(\lambda) = (\lambda-\lambda_\nu)^{m_\nu}/L(\lambda) = \left(\frac{L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)}{m_\nu!} + \frac{L^{(m_\nu+1)}(\lambda_\nu)}{(m_\nu+1)!}(\lambda-\lambda_\nu)+\dots\right)^{-1} \quad (8)$$

или

$$M_\nu(\lambda_\nu) = m_\nu!/L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots . \quad (9)$$

В силу (9) неравенство (7) можно записать в виде

$$\left|\frac{L(\lambda)\,m_\nu!\exp(\lambda_\nu z)}{L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)(\lambda-\lambda_\nu)}\right| < C, \quad z\in D, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad c = \mathrm{const}.$$

Отсюда при $\nu > \nu_2 = \mathrm{const}$ получаем $|L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)| > \exp(|\lambda_\nu|(h(\varphi_\nu)-\varepsilon_1))$, $\varepsilon_1 > 0$.

В случае, когда начало координат не принадлежит D, используем рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 4.6.1 в [1, с. 267]. Необходимость условия (4) доказана.

Докажем теперь *достаточность* условий теоремы. Пусть выполнено условие (4) и точка $z_0\in D$, δ — расстояние точки z_0 до границы области $\overline{D}$. Тогда имеем

$$|\exp(\lambda_\nu z_0)| = \exp\mathrm{Re}(\lambda_\nu z_0) \le \exp(|\lambda_\nu|(h(\varphi_\nu)-\delta)), \quad \nu = 1, 2, \dots . \quad (10)$$

Из условия (4) в силу (10) получаем

$$|M_\nu(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu z_0)| = \left|\frac{m_\nu!}{L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)}\exp(\lambda_\nu z_0)\right| <$$

$$< m_\nu!\exp(-|\lambda_\nu|(h(\varphi_\nu)-\varepsilon))\exp(|\lambda_\nu|(h(\varphi_\nu)-\delta)) <$$

$$< \exp(-|\lambda_\nu|\delta_1), \quad \delta_1 > 0, \quad \nu > \nu_3 = \mathrm{const}.$$

Дифференцируя (8), при $\lambda = \lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, имеем

$$M'_\nu(\lambda_\nu) = \left|\frac{L^{(m_\nu+1)}(\lambda_\nu)\,m_\nu!}{(m_\nu+1)\left(L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)\right)^2}\right|, \quad \nu = 1, 2, \dots . \quad (11)$$

Поскольку

$$L^{(i)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-\lambda|=1}\frac{L(t)\,dt}{(t-\lambda)^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots ,$$

то [1, с. 231]

$$|L^{(i)}(\lambda)| \le \max_{|t-\lambda|=1}|L(t)| = |L(t_0)|, \quad |t_0-\lambda| = 1.$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, $t_0 = \lambda + e^{i\varphi_0}$, тогда

$$|L(t_0)| = |L(\lambda+e^{i\varphi_0})| < C_1\exp((h(\varphi)+\varepsilon)r), \quad r \ge 0, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$|L(\lambda)| < C_1(\varepsilon)\exp((h(\varphi)+\varepsilon)r), \quad i \ge 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (12)$$

Отсюда вытекает

$$|M_\nu'(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu z_0)| = \frac{L^{(m_\nu+1)}(\lambda_\nu)\, m_\nu!\exp(\lambda_\nu z_0)}{(m_\nu+1)\left(L^{(m_\nu)}(\lambda_\nu)\right)^2} <$$

$$< C_2\exp(-|\lambda_\nu|\delta_2), \quad \delta_2>0, \quad C_2=\mathrm{const}. \tag{13}$$

Последовательно дифференцируя (8), аналогичным образом убеждаемся, что справедливы оценки

$$|M_\nu^{(i)}(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu z_0)| < A_i\exp(-|\lambda_\nu|\delta_i), \tag{14}$$

$$\delta_i>0, \quad A_i=\mathrm{const}, \quad i=1,2,\ldots, \quad m_\nu=1,$$

ибо по предположению $m_\nu \le m_0=\mathrm{const}$.

Кроме того, при $t\in C$ интеграл

$$A_{\nu,q}(t) = \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}}\exp(-\lambda t)\,d\lambda,$$

представляющий собой функцию, ассоциированную с $L(\lambda)/(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}$, ограничен, т. е. $|A_{\nu,q}(t)|<B$, $B=\mathrm{const}$, $q=0,1,\ldots,m_\nu-1$, $\nu=1,2,\ldots$. При $q=0$ это установлено в [1, с. 227], но тогда аналогичными рассуждениями убеждаемся, что эта оценка справедлива и при $q=1,\ldots,m_\nu-1$. А в случае, когда функция $F(z)$ аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ и $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (3), эта оценка установлена в [1, с. 233]. Следовательно, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C F(t)A_{\nu,q}(t)\,dt\right| < B_1, \quad B_1=\mathrm{const}, \quad q=0,1,\ldots,m_\nu-1, \quad \nu=1,2,\ldots. \tag{15}$$

В силу оценок (14), (15) получаем

$$\left|[M_\nu(\mu)]^{(m_\nu-k-q-1)}_{\lambda=\lambda_\nu}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C F(t)A_{\nu,q}(t)\,dt\right)z_0^k\exp(\lambda_\nu z_0)\right| < \exp(-|\lambda_\nu|\delta_4),$$

$$\delta_4>0, \quad \nu>\nu_3=\mathrm{const},$$

откуда, учитывая условие $m_\nu\le m_0$, сразу следует абсолютная сходимость ряда (1) в D. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы произвольная функция $F(z)$, аналитическая в $\overline{D}$ (или аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ при условии (3)) представлялась в D рядом (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (4) и $L(\lambda)$ была целой функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. *Необходимость.* Если произвольная аналитическая в $\overline{D}$ функция $F(z)$ представлена в D рядом (1), то согласно теореме 1 выполняется условие (4) и для $F(z)=\exp(\lambda z)$ имеем

$$\exp(\lambda z) = L(\lambda)\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\frac{1}{k!(m_\nu-k-1)!}\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{m_\nu-k-1} q!\,C^q_{m_\nu-k-1}[M_\nu(\mu)]^{(m_\nu-k-q-1)}_{\mu=\lambda_\nu}\frac{z^{(k)}}{(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}}\exp(\lambda_\nu z).$$

Рассуждая так же, как в [1, с. 295], образуем кружки $K_\nu : |\lambda - \lambda_\nu| < |\lambda_\nu|^{-h}$, $h > 1$, $\nu \geq 1$. Вне этих кружков

$$|\lambda_\nu|^{-1} \leq \exp(-\lambda z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} \frac{1}{k!(m_\nu - k - 1)!} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{m_\nu - k - 1} q! C_{m_\nu - k - 1}^{q} [M_\nu(\mu)]_{\mu = \lambda_\nu}^{(m_\nu - k - q - 1)} |\lambda_\nu|^{(q+1)h} z^k \exp(\lambda_\nu z). \tag{16}$$

Спроектируем кружки K_ν на положительную часть вещественной оси, получаем множество E_0. Поскольку

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^{-(q+1)h} < \infty$$

при $q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1$, то мера множества E_0 конечна.

Учитывая оценку (14), а также

$$|\lambda_\nu|^{(q+1)h} |z|^k |M_\nu^{(i)}(\lambda_\nu)| \exp(\lambda_\nu z) < \exp(-|\lambda_\nu|\delta_5), \quad \delta_5 > 0, \quad \nu > \nu_4 = \text{const},$$

убеждаемся, что ряд в первой части (16) сходится абсолютно. Поэтому также справедливо неравенство

$$|L(\lambda)|^{-1} < B_2 |\exp(-\lambda z)|, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad r \neq E_0.$$

Отсюда так же, как и в [1, с. 295], получаем

$$|L(\lambda)| > \exp((h(\varphi) - \varepsilon) r), \quad r > r_0(\varepsilon),$$

что и доказывает полную регулярность функции $L(\lambda)$.

Докажем теперь *достаточность* условий теоремы. Если выполняется условие (4) и $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста, то [1, с. 307] в области D справедливо представление

$$F(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \exp(\mu z)\, d\mu, \quad z \in D, \quad \rho_k \uparrow D, \quad k \to \infty.$$

Учитывая, что [1, с. 230]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \exp(\mu z)\, d\mu = \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z), \tag{17}$$

где C_ν — окружность с центром в точке λ_ν, внутри которой нет нулей функции $L(\lambda)$, отличных от λ_ν. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \exp(\mu z)\, d\mu = \sum_{\nu=1}^{\bar{\nu}(\rho_k)} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z),$$

$|\lambda_\nu| < \rho_k$, $\bar{\nu}(\rho_k) = \text{const}$. Отсюда в силу (7) получаем

$$F(z) = \lim_{k \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\bar{\nu}(\rho_k)} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z).$$

Теорема доказана.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Получено 29.11.93