УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук,
С. А. Пичугов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

The uniform approximation of continuous mappings of metric compacts into metric spaces is studied. Notions of a "weak dimension" and "weak Kolmogorov width" are introduced for comparison of approximation properties of infinite dimensional subspaces. For classes of mappings given by a continuity modulus majorant, bilateral estimates of weak widths are given, which coincide under certain conditions.

Досліджується рівномірна апроксимація неперервних відображень метричних компактів у метричні простори. Для порівняння апроксимаційних властивостей нескінченновимірних підпросторів вводяться поняття „слабкої вимірності" та „слабкого поперечника за Колмогоровим". Для класів відображень, що задаються мажорантою модуля неперервності, наведені двосторонні оцінки слабких поперечників, які при деяких умовах співпадають.

В данной работе изучается равномерная аппроксимация непрерывных отображений, определенных на метрическом компакте Q, значения которых содержатся в метрическом пространстве Y (множество таких отображений обозначим через $C(Q, Y)$). Естественной характеристикой непрерывных отображений являются модули непрерывности. В первой части статьи выясняется для каких Q и Y справедливо описание модулей непрерывности отображений $F \in C(Q, Y)$, аналогичное известному описанию модулей непрерывности функций $f \in C[a, b] = C([a, b], \mathbb{R})$. Во второй части статьи получаются оценки аппроксимации отображений $F \in C(Q, Y)$ кусочно-постоянными и некоторыми другими отображениями в терминах модулей непрерывности и некоторых геометрических характеристик Q и Y. В третьей части обсуждается вопрос о поперечниках классов отображений $F \in C(Q, Y)$, имеющих заданную мажоранту модулей непрерывности. Легко видеть, что верхняя грань на этом классе приближения любым конечномерным подпространством равна бесконечности в случае, когда Y — бесконечномерное банахово пространство. Мы вводим понятие „слабой размерности" и связанное с ним понятие „слабого n-поперечника по Колмогорову". Это позволяет классифицировать некоторые линейные подпространства, бесконечномерные в обычном смысле, и сравнивать их аппроксимативные свойства. Для введенных „слабых" поперечников приведем двусторонние оценки, которые в ряде случаев обращаются в равенство.

1. Модули непрерывности непрерывных отображений. Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций f с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Модулем непрерывности функции $f \in C[a, b]$ называется функция $\omega(f, h)$, которая для $h \in [0, \infty)$ определяется равенством

$$\omega(f, h) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \le h, \ x, y \in [a, b]\}.$$

Из этого определения следует, что для любой функции $f \in C[a, b]$ ее модуль непрерывности имеет следующие свойства:

1) $\omega(f, 0) = 0$;

2) $\omega(f, h)$ не убывает на $[0, \infty)$ и при этом $\omega(f, h) = \omega(f, b-a)$ для $h \in [b-a, \infty]$;

3) $\omega(f, h)$ является полуаддитивной функцией от h, т. е. для $h_1, h_2 \ge 0$ $\omega(f, h_1 + h_2) \le \omega(f, h_1) + \omega(f, h_2)$;

4) функция $\omega(f, h)$ непрерывна на $[0, \infty)$.

Замечательным оказалось то обстоятельство (см., например, [1, с. 254]), что свойства 1 – 4 полностью характеризуют модули непрерывности функций из $C[a,b]$ в том смысле, что какова бы ни была функция $\omega(h)$, удовлетворяющая условиям 1 – 4, существует $f \in C[a,b]$ такая, что $\omega(f,h) = \omega(h)$ для всех h (можно положить $f(x) = \omega(x-a)$ для $x \in [a,b]$). В этой связи вводят термин „модуль непрерывности", не связывая его с конкретной функцией $f \in C[a,b]$: модулем непрерывности называется любая непрерывная на $[0,\infty)$, неубывающая и полуаддитивная функция такая, что $\omega(0) = 0$.

Пусть теперь (Q,ρ_1) — метрический компакт, а (Y,ρ_2) — метрическое пространство (в дальнейшем мы исключаем вырожденные случаи, когда компакты состоят из одной точки), и $C(Q,Y)$ — пространство непрерывных функций $f\colon Q \to Y$. Модулем непрерывности функции $f \in C(Q,Y)$ назовем функцию $(h \geq 0)$

$$\omega(f,h) = \sup\{\rho_2(f(x), f(y)) \colon x, y \in Q,\ \rho_1(x,y) \leq h\}.$$

Естественно возникает вопрос: для каких (Q,ρ_1) и (Y,ρ_2) справедливо описание модулей непрерывности функций $f \in C(Q,Y)$, аналогичное описанию 1 – 4 модулей непрерывности из $C[a,b]$.

В [2] для числовых функций, заданных на компактах, лежащих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, предпринимается попытка дать ответ на этот вопрос. Однако в доказательстве теоремы 2 этой работы содержится ошибка.

Для формулировки нашего результата понадобятся некоторые определения.

Множество M, лежащее в метрическом пространстве (X,ρ), называется метрически выпуклым (м. в.) [3, с. 120], если для любых точек $x_0, x_1 \in M$ и любого $\lambda \in (0,1)$ найдется точка $x_\lambda \in M$ такая, что $\rho(x_0,x_\lambda) = \lambda\rho(x_0,x_1)$ и $\rho(x_\lambda,x_1) = (1-\lambda)\rho(x_0,x_1)$.

Известно (см., например, [3, с. 120]), что для любых двух точек x_0, x_1, лежащих в замкнутом м. в. множестве M полного метрического пространства, найдется подмножество $[x_0,x_1]$, содержащее точки x_0 и x_1, и изометричное отрезку числовой прямой длины $\rho(x_0,x_1)$.

Лемма 1. *Пусть (Q,ρ_1) — метрический компакт, (Y,ρ_2) — полное м. в. пространство. Если для любой $f \in C(Q,Y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in 0$ выполняется неравенство $\omega(f,nh) \leq n\,\omega(f,h)$, то Q — метрически выпукло.*

Доказательство. Допустим противное: найдутся $x_0, y_0 \in Q$, $\rho_1(x_0, y_0) = d > 0$, и $\lambda \in (0,1)$ такие, что $B[x_0,\lambda d] \cap B[y_0,(1-\lambda)d] = \varnothing$. Ввиду компактности Q и замкнутости шаров найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, где $B_1 = B[x_0,\lambda d+\varepsilon]$, $B_2 = B[y_0,(1-\lambda)d+\varepsilon]$. Значит, для некоторого натурального n $\rho_1(B_1,B_2) = \inf\{\rho_1(x,y) \colon x \in B_1, y \in B_2\} > d/n$.

Пусть сначала $Y = \mathbb{R}^1$, т. е. функции f числовые. Положим для $x \in Q$ $f_0(x) = h_1(1-\rho_1(x,x_0)/(\lambda d+\varepsilon))$ при $x \in B_1$, $f_0(x) = -h_2(1-\rho_1(x, y_0)/((1-\lambda)d+\varepsilon))$ при $x \in B_2$ и $f_0(x) = 0$ при $x \in Q \setminus (B_1 \cup B_2)$, где $h_1, h_2 > 0$, и таковы, что $h_1/(\lambda d+\varepsilon) = h_2/((1-\lambda)d+\varepsilon)$.

Положим $\delta = d/n$ и оценим сверху $\omega(f_0,\delta)$. Пусть $x, y \in Q$ и $\rho_1(x,y) \leq \delta$. Тогда случай $x \in B_1$, $y \in B_2$ невозможен. Если $x, y \overline{\in} B_1 \cup B_2$, то

$|f_0(x)-f_0(y)| = 0$. Если, например, $x \in B_1$, $y \,\overline{\in}\, B_1$, то $\rho_1(x, x_0) \geq \rho_1(x_0, y) - \rho_1(x, y) > \lambda d + \varepsilon - \delta$, и

$$|f_0(x) - f_0(y)| = |f_0(x)| = h_1\left(1 - \rho_1(x, x_0)/(\lambda d + \varepsilon)\right) <$$

$$< h_1\left(1 - \frac{\lambda d + \varepsilon - \delta}{\lambda d + \varepsilon}\right) = h_1 \frac{\delta}{\lambda d + \varepsilon}.$$

Аналогично, если $x \,\overline{\in}\, B_2$, $y \in B_2$, то $|f_0(x) - f_0(y)| = h_2\delta/((1-\lambda)d + \varepsilon)$.

Если x, $y \in B_1$ или x, $y \in B_2$, то соответственно

$$|f_0(x) - f_0(y)| = \frac{h_1}{\lambda\delta + \varepsilon}|\rho_1(x, x_0) - \rho_1(y, x_0)| \leq \frac{h_1\delta}{\lambda d + \varepsilon}.$$

$$|f_0(x) - f_0(y)| = \frac{h_2}{(1-\lambda)d + \varepsilon}|\rho_1(x, y_0) - \rho_1(y, y_0)| \leq$$

$$\leq \frac{h_2\delta}{(1-\lambda)d + \varepsilon} = \frac{h_1\delta}{\lambda d + \varepsilon}.$$

Таким образом, $\omega(f_0, \delta) \leq h_1\delta/(\lambda d + \varepsilon)$, $n\,\omega(f_0, \delta) = h_1 d/(\lambda d + \varepsilon)$. Следовательно,

$$\omega(f_0, n\delta) = \omega(f_0, d) = |f_0(x_0) - f_0(y_0)| = h_1 + h_2 =$$

$$= h_1\left(1 - \frac{(1-\lambda)d + \varepsilon}{\lambda d + \varepsilon}\right) = h_1 \frac{d + 2\varepsilon}{\lambda d + \varepsilon} > h_1 \frac{d}{\lambda d + \varepsilon} \geq n\,\omega(f_0, \delta),$$

что противоречит условию. Мы доказали лемму для числовых функций.

Пусть теперь Y — произвольное полное м. в. пространство. Возьмем две его различные точки z_1, z_2, и пусть $\varphi\colon [0, 1] \to [z_1, z_2]$ — отображение, которое каждому $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$ ставит в соответствие элемент $z(\lambda)$ из $[z_1, z_2] \subset \subset Y$ таким образом, что

$$\rho_2(z(\lambda_1), z(\lambda_2)) = |\lambda_1 - \lambda_2|\rho_2(z_1, z_2).$$

Для построенной выше числовой функции f_0 значения функции $f_1(x) = (f_0(x) + h_2)/(h_1 + h_2)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$. Тогда значения функции $f = \varphi \circ f_1$ из $C(Q, Y)$ находятся в $[z_1, z_2]$. Следовательно,

$$\rho_2(f(x), f(y)) = |f_1(x) - f_1(y)|\rho_2(z_1, z_2) = |f_0(x) - f_0(y)| \frac{\rho_2(z_1, z_2)}{h_1 + h_2},$$

$$\omega(f, h) = \rho_2(z_1, z_2)(h_1 + h_2)^{-1}\omega(f_0, h).$$

Поэтому

$$\omega(f, n\delta) = \rho_2(z_1, z_2)(h_1 + h_2)^{-1}\omega(f_0, n\delta) >$$

$$> \rho_2(z_1, z_2)(h_1 + h_2)^{-1} n\,\omega(f_0, \delta) = n\,\omega(f, \delta),$$

что невозможно по условию. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть (Q, ρ_1) — метрический компакт, (Y, ρ_2) — полное м. в. пространство. Тогда множество модулей непрерывности функций $f \in C(Q, Y)$ совпадает со множеством неубывающих непрерывных полуадди-*

тивных функций $\omega(h)$, $\omega(0)=0$, *и, если диаметр* Y *конечный, то* $\omega(\operatorname{diam} Q) \le \operatorname{diam} Y$ *тогда и только тогда, когда* Q *метрически выпукло.*

Доказательство. Пусть Q — м. в. и $\operatorname{diam} Q = \sup\{\rho_1(x,z)\colon x,z\in Q\} = \rho_1(x_0,z_0)$, $\operatorname{diam} Y = \rho_2(y_0,y_1) < \infty$. Для заданной функции ω построим $f_\omega\colon Q\to Y$, значения которой находятся во множестве $[y_0,y_1]$, такую, что $\omega(f_\omega,h)=\omega(h)$ для всех $h\in[0,\operatorname{diam} Q]$. Так как для любого $x\in Q$ $\omega(\rho_1(x,x_0)) \le \operatorname{diam} Y$, то из метрической выпуклости Y следует, что найдется точка $y_x\in[y_0,y_1]$ такая, что $\rho_2(y_x,y_0)=\omega(\rho_1(x,x_0))$. Определим f_ω равенством $f_\omega(x)=y_x$. Вычислим $\omega(f_\omega,h)$. Пусть $\rho_1(x_1,x_2)\le h$. Тогда

$$\rho_2(f_\omega(x_1),f_\omega(x_2)) = \rho_2(y_{x_1},y_{x_2}) = |\rho_2(y_{x_1},y_0)-\rho_2(y_{x_2},y_0)| =$$
$$= |\omega(\rho_1(x_1,x_0)) - \omega(\rho_1(x_2,x_0))| \le$$
$$\le \omega(|\rho_1(x_1,x_0)-\rho_1(x_2,x_0)|) \le \omega(\rho_1(x_1,x_2)),$$

и значит, $\omega(f_\omega,h)\le\omega(h)$. С другой стороны, если Q м. в., то можно выбрать $x\in Q$ так, чтобы $\rho_1(x,x_0)=h$. Тогда

$$\omega(f_\omega,h) \ge \rho_2(f_\omega(y_x^{*}), f_\omega(y_0)) = \omega(\rho_1(x,x_0)) = h.$$

Итак, $\omega(f_\omega,h)=\omega(h)$ для всех $h\in[0,\operatorname{diam} Q]$. В случае, когда $\operatorname{diam} Y = \infty$, выберем $y_0\in Y$ так, чтобы $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists y_n\in Y$, $\rho(y_0,y_n)>n$, и повторим предыдущие рассуждения.

Достаточность доказана. Необходимость следует из леммы 1.

2. Некоторые геометрические характеристики компактов и функциональных пространств. Для метрического компакта (Q,ρ) и натурального N рассмотрим две числовые характеристики:

$$\delta_N \equiv \delta_N(Q) = \max_{\{x_k\}_1^{N+1}\subset Q}\ \min_{\substack{k\ne j,\\ 1\le k,j\le N+1}} \rho(x_k,x_j), \tag{1}$$

$\varepsilon_N\equiv\varepsilon_N(Q)=\inf\{\varepsilon\colon$ найдутся N замкнутых шаров радиуса ε, покрывающих $Q\}$.

Следующая лемма, по-видимому, известна. Для полноты изложения приводим ее с доказательством.

Лемма 2. *Справедливы неравенства* $\varepsilon_N\le\delta_N\le2\varepsilon_N$.

Доказательство. Докажем первое неравенство. Ввиду компактности Q найдутся точки $\{x_k;\ k=1,\ldots,N,N+1\}$, реализующие максимум в (1). Рассмотрим $N+1$ шар $B_k=B_k[x_k,\delta_N]$, $k=\overline{1,N+1}$. Удалим первый шар. Если $\bigcup_{k=2}^{N+1}B_k$ содержит Q, то лемма доказана. В противном случае найдем элемент y_1 из Q такой, что $\rho(y_1,x_k)>\delta_N$ $\forall k\ge2$. Теперь рассмотрим совокупность шаров $\{B[y_1,\delta_N],B_3,\ldots,B_{N+1}\}$. Если они покрывают Q, лемма доказана. Если нет, то найдем y_2 из Q такой, что $\rho(y_2,x_k)>\delta_N$ при $k=3,4,\ldots,N+1$ и $\rho(y_2,y_1)>\delta_N$. Далее рассмотрим совокупность шаров $\{B[y_1,\delta_N],B[y_2,\delta_N],B_4,B_5,\ldots,B_{N+1}\}$ и так далее. Тогда либо на каком-то промежуточном шаге мы получим покрытие Q N шарами радиуса δ_N, и лемма доказана, либо указанный процесс совершим $N+1$ раз. В последнем случае для элементов $\{y_k;\ k=1,\dots,N,N+1\}$ имеем $\rho(y_i,y_j)>\delta_N\ \ \forall\, i\neq j$, что противоречит определению δ_N. Первое неравенство доказано.

Докажем второе неравенство. Пусть N шаров $B_1,\dots,B_N$ радиуса ε_N покрывают Q. Тогда каковы бы ни были точки $y_1,\dots,y_{N+1}\in Q$, по крайней мере две из них попадут в один шар. Но тогда $\min\limits_{i\neq j}\rho(y_i,y_j)\le 2\varepsilon_N$, и значит, $\delta_N\le 2\varepsilon_N$, что и требовалось.

Примеры. 1. Пусть $Q=\{x=(x^1,x^2,\dots,x^m)\in\mathbb{R}^m:\ 1\le x^k\le 1,\ k=\overline{1,m}\}$ — m-мерный куб с длиной ребра 1, $\rho(x,y)=\max\{|x^k-y^k|: k=1,\dots,m\}$. Разобьем каждое ребро на N равных по длине отрезков. Проведем через точки разбиения сечения, параллельные граням куба, и получим разбиение куба на N^m кубов с длиной ребра $1/N$.

Эти кубы в выбранной нами метрике являются шарами радиуса $1/2N$ и образуют покрытие Q. Тем самым получаем оценку $\varepsilon_{N^m}(Q)\le 1/2N$. С другой стороны, рассмотрим множество всех вершин кубов разбиения. Взаимное расстояние между ними не меньше $1/N$, а их число равно $(N+1)^m$. Тогда из (1) следует оценка $\delta_{(N+1)^m-1}(Q)\ge 1/N$. Заметим, что ε_n и δ_n не возрастают с ростом n. Поэтому для любого $k=0,1,\dots,(N+1)^m-N^m-1$ с учетом леммы 2 имеем

$$1/N\le\delta_{(N+1)^m-1}(Q)\le\delta_{N^m+k}(Q)\le 2\varepsilon_{N^m+k}(Q)\le 2\varepsilon_{N^m}(Q)\le 1/N.$$

Следовательно, мы доказали следующий факт: пусть натуральное число n принадлежит промежутку $[N^m,(N+1)^m)$. Тогда для всех таких n выполняется равенство

$$\delta_N(Q)=2\varepsilon_n(Q)=1/N. \tag{2}$$

2. Пусть $H_0^1=H_0^1[0,1]=\{f\in C[0,1]: |f(x)-f(y)|\le|x-y|;\ x,y\in[0,1],\ f(0)=0\}$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на N равных частей точками $x_k=k/N$, $k=\overline{0,N}$. Рассмотрим множество всех ломаных из H_0^1, узлы которых находятся только в точках x_k, а угловые коэффициенты равны ±1. Количество таких ломаных 2^N, а взаимное расстояние в $C[0,1]$ между ними не меньше $2/N$. Поэтому $\delta_{2^N-1}(H_0^1)\ge 2/N$. Теперь рассмотрим множество таких же ломаных, но которые на участке $[0,1/N]$ равны нулю. Таких ломаных уже 2^{N-1}, и шары с центрами в этих ломаных радиуса $1/N$ покрывают все множество H_0^1. Значит, $\varepsilon_{2^{N-1}}(H_0^1)\le 1/N$. Если теперь число n имеет вид $n=2^{N-1}+k$, где $0\le k<2^{N-1}$, то

$$2/N\le\delta_{2^N-1}(H_0^1)\le\delta_{2^{N-1}+k}(H_0^1)\le 2\varepsilon_{2^{N-1}+k}(H_0^1)\le$$
$$\le 2\varepsilon_{2^{N-1}}(H_0^1)\le 2/N,$$

т. е. на самом деле

$$\delta_{2^{N-1}+k}(H_0^1)=2\varepsilon_{2^{N-1}+k}(H_0^1)=2/N. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится понятие константы Юнга метрического пространства. Для ограниченного множества B из метрического пространства (Y, ρ) с диаметром $d(B) = \sup\{\rho(x, y): x, y \in Y\}$ величину

$$r(B) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in B} \rho(x, y)$$

называют чебышевским радиусом, а центр $\bar{y}$ шара минимального радиуса, содержащего B (если он существует) — чебышевским центром множества B. Константами Юнга множества B и метрического пространства Y называют соответственно величины [3, с. 68]

$$J(B; Y) = \frac{r(B)}{d(B)}, \quad J(Y) = \sup\{J(B, Y): d(B) < \infty\}.$$

Пусть $J^*(Y) = \sup\{J(B; Y): B$ — компакт$\}$ — константа Юнга класса компактных множеств из Y.

Очевидно, всегда $1/2 \le J^*(Y) \le J(Y) \le 1$.

Для некоторых важных пространств константы Юнга [4, 5] известны. Так, для пространств $L_p \equiv L_p[0, 1]$, $1 \le p < \infty$, $J(L_p) = J^*(L_p) = \max\{2^{(1-p)/p}, 2^{-1/p}\}$, для пространства $C(Q)$

$$1/2 = J^*(C(Q)) \ne J(C(Q)) = 1.$$

3. Приближение кусочно-постоянными отображениями. Пусть $O(Q, Y)$ — множество ограниченных отображений $f: Q \to Y$. Условимся называть такие отображения вектор-функциями. Для $f, g \in O(Q, Y)$ положим

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in Q} \rho_2(f(x), g(x)). \tag{4}$$

Разбиением Q назовем совокупность множеств из Q, $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ таких, что

$$Q = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k, \quad \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing, \quad k \ne j.$$

Обозначим через $S(\Delta)$ множество кусочно-постоянных отображений из $O(Q, Y)$, т. е. множество таких s, что найдутся элементы $a_1, \dots, a_n \in Y$ такие, что $s(x) = a_k$ при $x \in \Delta_k$, $k = 1, \dots, n$.

Для $f \in C(Q, Y)$ положим $E(f, S(\Delta)) = \inf\{\rho(f, s): s \in S(\Delta)\}$ — наилучшее приближение f кусочно-постоянными функциями по разбиению Δ.

Пусть $r(\Delta) = \max_{1 \le k \le n} r(\Delta_k)$ — радиус разбиения Δ, $d(\Delta) = \max_{1 \le k \le n} d(\Delta_k)$ — диаметр разбиения, $J(\Delta; Q) = \max_k J(\Delta_k; Q)$. Ясно, что $r(\Delta) \le J(\Delta; Q) d(\Delta)$.

Теорема 2. *Для произвольного отображения $f \in C(Q, Y)$ и произвольного разбиения Δ компакта Q справедливы неравенства*

$$E(f, S(\Delta)) \le \min\{\omega(f, r(\Delta)); J^*(Y)\,\omega(f, d(\Delta))\} \le$$
$$\le \min\{\omega(f, J(\Delta; Q))\, d(\Delta); J^*(Y)\,\omega(f, d(\Delta))\}. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно доказать лишь первое неравенство. Мы предложим два разных способа построения приближающей функции s для f.

Сначала для каждого из множеств Δ_k выберем чебышевский центр в Q. Он существует ввиду компактности Q. Получим точки $q_1, \dots, q_n$. Определим функцию s_1 из $S(\Delta)$ условием $s_1(x) = f(q_k)$, $x \in \Delta_k$. Тогда для точек $x \in \Delta_k$

$$\rho_2(f(x), s_1(x)) = \rho_2(f(x), f(q_k)) \le \omega(f, \rho_1(x, q_k)) \le \omega(f, r(\Delta_k)),$$

и значит,

$$\rho(f, s_1) = \sup_{x \in Q} \rho_2(f(x), s_1(x)) \le \omega(f, r(\Delta)). \tag{6}$$

С другой стороны, рассмотрим образы $f(\overline{\Delta}_k)$ замыканий $\overline{\Delta}_k$ при отображении f и выберем их чебышевские центры в Y. Существование их гарантируется, так как ввиду непрерывности f множества $f(\overline{\Delta}_k)$ компактны в Y. Получим точки $m_1, \ldots, m_n$. Определим функцию s_2 из $S(\Delta)$ условием $s_2(x) = m_k$ для $x \in \Delta_k$. Теперь для точек $x \in \Delta_k$

$$\rho_2(f(x), s_2(x)) = \rho_2(f(x), m_k) \le r(f(\overline{\Delta}_k)) \le J^*(Y)\, d(f(\overline{\Delta}_k)) =$$

$$= J^*(Y) \sup\{\rho_2(f(x), f(y)) : x, y \in \Delta_k\} \le J^*(Y)\, \omega(f, d(\Delta_k)).$$

Поэтому

$$\rho(f, s_2) = \sup_{x \in Q} \rho_2(f(x), s_2(x)) \le J^*(Y)\, \omega(f, d(\Delta)). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (5). Теорема 2 доказана.

Приведенное доказательство показывает, что выбор способа приближения элементами из $S(\Delta)$ зависит от величины геометрических характеристик $J(\Delta : Q)$ и $J^*(Y)$.

Пусть, например, при произвольном Q $Y = C[0, 1]$. Напомним, что $J^*(C[0, 1]) = 1/2$. Пусть, далее, отображение f таково, что $\omega(f, h) \le h^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$\min\{\omega(f, J(\Delta : Q)\, d(\Delta)) ; J^*(C[0, 1])\, \omega(f, d(\Delta))\} \le$$

$$\le \min\left\{J^\alpha(\Delta : Q) ; \frac{1}{2}\right\} d^\alpha(\Delta) = \frac{1}{2} d^\alpha(\Delta).$$

Значит, в этом случае, если $J(\Delta : Q) > 1/2$, второй способ приближения предпочтительнее.

Если же, например, $Y = L_1[0, 1]$, то $J^*(L_1[0, 1]) = 1$ и $\min\{J^\alpha(\Delta : Q) ; 1\} = J^\alpha(\Delta : Q)$, и в случае $J(\Delta : Q) < 1$ предпочтительнее приближение функцией s_1.

Рассмотрим теперь приближение кусочно-постоянными функциями класса $H^\omega = \inf\{f \in C(Q, Y) : \omega(f, h) \le \omega(h)\}$ при заданном модуле непрерывности ω. Будем изучать величину

$$E_n(H^\omega) = \inf_\Delta E(H^\omega, S(\Delta)), \tag{8}$$

где нижняя грань выбирается из всех разбиений на не более чем n множеств.

Укажем процесс построения „хорошего" в смысле (8) разбиения Δ^* компакта Q. Пусть $x_1^*, \ldots, x_n^*$ — точки в Q, реализующие нижнюю грань в определении $\varepsilon_n(Q)$. Положим

$$\Delta_1^* = \{x \in Q : \rho_1(x, x_1^*) \le \rho_1(x, x_i^*),\ i \ge 2\},$$

$$\Delta_2^* = \{x \in Q \setminus \Delta_1^* : \rho_1(x, x_2^*) \le \rho_1(x, x_i^*),\ i \ge 3\},\ \ldots,$$

$$\Delta_k^* = \left\{ x \in Q \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \Delta_j^* : \rho_1(x, x_k^*) \le \rho_1(x, x_i^*),\ i \ge k+1 \right\},\ \ldots.$$

Ясно, что для всех $i = 1, \ldots, n$ $r(\Delta_i^*) \le \varepsilon_n$, $d(\Delta_i^*) \le 2\varepsilon_n$. Учитывая теорему 2, получаем

$$E_n(H^\omega) \le \min\{\omega(\varepsilon_n);\ J^*(Y)\,\omega(2\varepsilon_n)\} \le$$

$$\le \min\{\omega(J(\Delta^*; Q)\,2\varepsilon_n);\ J^*(Y)\,\omega(2\varepsilon_n)\}. \tag{9}$$

В дополнение к оценкам сверху получим оценки снизу величины $E_n(H^\omega)$. Для этого построим функцию f_ω из H^ω, которая „плохо" приближается множеством $S(\Delta)$.

Будем предполагать, что $\operatorname{diam} Y > \omega(\delta_n(Q))$. Так как при $n \to \infty$ $\delta_n \to 0$, то это условие обязательно выполнится при достаточно больших n. Предположим, что Q и Y м. в., а Y — полное пространство.

Пусть $z_1, \ldots, z_{n+1}$ — точки из Q, рализующие максимум в (1). Возьмем произвольное разбиение Δ с числом элементов разбиения, равным n. Тогда в один из элементов разбиения попадет не менее двух из точек z_k. Пусть для простоты множество Δ_1 содержит точки z_1 и z_2, $\rho_1(z_1, z_2) \ge \delta_n$. Возьмем точки $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $\rho_2(y_1, y_2) = \omega(\delta_n(Q))$. Значения функции f_ω будут принадлежать отрезку $[y_1, y_2]$. Для каждой точки $x \in Q$ такой, что $\rho_1(x, z_1) \le \delta_n$, найдем точку $y(x)$ на отрезке $[y_1, y_2]$ такую, что $\rho_2(y(x), y_1) = \omega(\rho_1(x, z_1))$. Теперь положим для $x \in Q$ $f_\omega(x) = y(x)$, если $\rho_1(x, z_1) \le \delta_n$, и $f_\omega(x) = y_2$, если $\rho_1(x, z_1) > \delta_n$. Несложно проверить, что $f_\omega \in H^\omega$. Для оценки приближения этой функции снизу ограничимся множеством аргументов Δ_1:

$$E(H^\omega; S(\Delta)) \ge E(f_\omega; S(\Delta)) \ge \inf_{a \in Y} \sup_{x \in \Delta_1} \rho_2(f_\omega(x), a) \ge$$

$$\ge \inf_{a \in Y} \max\{\rho_2(f_\omega(z_1), a); \rho_2(f_\omega(z_2), a)\} =$$

$$= \inf_{a \in Y} \max\{\rho_2(y_1, a); \rho_2(y_2, a)\} \ge \frac{1}{2}\,\omega(\delta_n).$$

Последнее неравенство следует из того, что для любого $a \in Y$

$$\omega(\delta_n) = \rho_2(y_1, y_2) \le \rho_2(y_1, a) + \rho_2(y_2, a).$$

Мы получили следующий результат.

Теорема 3. *Пусть Q и Y м. в., Y — полное метрическое пространство, и таково, что $\omega(\delta_n(Q)) < \operatorname{diam} Y$. Тогда для любого разбиения $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ справедливо неравенство*

$$E(H^{\omega}; S(\Delta)) \geq \frac{1}{2}\,\omega(\delta_n(Q)), \tag{10}$$

и следовательно, $E_n(H^{\omega}) \geq (1/2)\,\omega(\delta_n(Q))$.

Ввиду того, что кусочно-постоянные отображения не являются непрерывными, оценки приближений класса H^{ω} (9) и (10) получены не в пространстве $C(Q, Y)$, а в пространстве $O(Q, Y)$. Сейчас мы получим оценку приближения некоторыми множествами непрерывных отображений в случае, когда Y — банахово пространство.

Пусть задан компакт (Q, ρ_1) и точки $x_1, \ldots, x_n \in Q$ таковы, что шары радиуса $\varepsilon_n(Q)$ с центрами в этих точках покрывают Q. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим открытые шары $B(x_i; \varepsilon_n + \varepsilon)$, которые и подавно покрывают Q. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{B(x_i; \varepsilon_n + \varepsilon)\}_{i=1}^{n}$ компакта Q, т. е. такой набор функций $\varphi_i(x) \in C(Q, \mathbb{R})$, что:

1) $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$;

2) $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) \equiv 1$;

3) $\operatorname{supp} \varphi_i(x) \subset B(x_i; \varepsilon_n + \varepsilon)$

(здесь $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f). Будем приближать класс H^{ω} подпространством Φ_n^{ε} непрерывных отображений из Q в Y вида $\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i(x)$, где $x \in Q$, $y_i \in Y$:

$$E(H^{\omega}; \Phi_n^{\varepsilon}) = \sup_{f \in H^{\omega}} \inf_{F \in \Phi_n^{\varepsilon}} \|f - F\|_{C(Q,Y)}.$$

В качестве первого способа приближения для $f \in H^{\omega}$ выберем $y_i = f(x_i)$. Будем иметь

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_i(x) \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^{n} (f(x) - f(x_i))\,\varphi_i(x) \right\|_Y \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \| f(x) - f(x_i) \|_Y = \sum_{i:\, \rho_1(x, x_i) < \varepsilon_n + \varepsilon} \varphi_i(x) \| f(x) - f(x_i) \|_Y,$$

так как $\varphi_i(x) = 0$ для i таких, что $\rho_1(x, x_i) \geq \varepsilon_n + \varepsilon$. Следовательно,

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_i(x) \right\|_Y = \sum_{i:\, \rho_1(x, x_i) < \varepsilon_n + \varepsilon} \varphi_i(x)\,\omega(\rho(x, x_i)) \leq$$

$$\leq \omega(\varepsilon_n + \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = \omega(\varepsilon_n + \varepsilon). \tag{11}$$

Рассмотрим другой метод приближения этим же подпространством. Пусть q_i, $i = 1, \ldots, n$, — чебышевские центры замыканий множеств $f(B(x_i; \varepsilon_n + \varepsilon))$. Будем приближать $f(x) \in H^{\omega}$ отображением $\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i(x)$:

$$\left\| f(x)-\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i(x)\right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^{n} (f(x)-q_i)\varphi_i(x)\right\|_Y \le$$
$$= \sum_{i:\,\rho_1(x,x_i)<\varepsilon_n+\varepsilon} \|f(x)-q_i\|_Y\varphi_i(x) \le$$
$$\le \sum_{i:\,\rho_1(x,x_i)<\varepsilon_n+\varepsilon} r(f(B(x_i;\varepsilon_n+\varepsilon)))\varphi_i(x) \le$$
$$\le J^*(Y) \sum_{i:\,\rho_1(x,x_i)<\varepsilon_n+\varepsilon} d(f(B(x_i;\varepsilon_n+\varepsilon)))\varphi_i(x) \le J^*(Y)\,\omega(2(\varepsilon_n+\varepsilon)). \tag{12}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть Q — метрический компакт, Y — банахово пространство, ω — заданный модуль непрерывности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$E(H^{\omega};\Phi_n^{\varepsilon}) = \sup_{f\in H^{\omega}} \inf_{F\in\Phi_n^{\varepsilon}} \|f-g\|_{C(Q,Y)} \le$$
$$\le \min\{\omega(\varepsilon_n(Q)+\varepsilon);\, J^*(Y)\,\omega(2(\varepsilon_n(Q)+\varepsilon))\}. \tag{13}$$

4. Поперечники классов $H^{\omega}(Q,Y)$. В данном пункте считаем, что Y — банахово пространство. Выше были получены оценки аппроксимации классов $H^{\omega}(Q,Y)$ достаточно просто устроенными аппроксимирующими множествами. Естественно возникает задача сравнения аппроксимативных свойств этих множеств аппроксимативными свойствами других, в каком-то смысле подобных им, множеств. В случае, когда $Y=\mathbb{R}^1$, для этой цели естественно использовать понятие поперечника по Колмогорову, которое позволяет сравнивать аппроксимативные свойства всех подпространств фиксированной размерности (см., например, [1]). Однако в случае, когда Y — бесконечномерное пространство, рассматриваемому нами классу $H^{\omega}(Q,Y)$ принадлежит, в частности, любое отображение вида $F(x)=y$, $x\in Q$, где $y\in Y$ фиксировано. Поэтому для любых n отображений $F_1,\ldots,F_n\in O(Q,Y)$ (или $\in C(Q,Y)$) справедливо соотношение

$$\sup_{F\in H^{\omega}(Q,Y)} \inf_{d_i\in\mathbb{R}} \left\| F-\sum_{i=1}^{n} d_iF_i\right\|_{O(Q,Y)} \ge$$
$$\ge \sup_{y\in Y}\inf_{\alpha_i}\sup_{x\in Q}\left\| y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF_i(x)\right\|_Y \ge$$
$$\ge \sup_{y\in Y}\inf_{\alpha_i}\left\| y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF_i(x_0)\right\|_Y = \infty$$

(здесь x_0 — произвольный фиксированный элемент из Q), так как Y бесконечномерно, а $\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF_i(x_0)\right\}$ — конечномерное пространство в Y. Следовательно, колмогоровские n-поперечники класса $H^{\omega}(Q,Y)$ в пространствах $O(Q,Y)$ (или $C(Q,Y)$) равны ∞ при любом n, если $\operatorname{diam} Y=\infty$.

Таким образом, задача аппроксимации классов $H^{\omega}(Q,Y)$ является содержательной только в случае приближения бесконечномерными подпространствами (так, множества $S(\Delta_n)$ и Φ_n^{ε}, использованные выше, являются бесконечномерными подпространствами в $O(Q,Y)$ и $C(Q,Y)$ соответственно). Ниже мы предлагаем способ классификации бесконечномерных подпространств пространства отображений в банахово пространство Y (по „слабой размерности") и определяем аналог поперечника по Колмогорову, которые в случае $Y = \mathbb{R}^1$ совпадают с классификацией конечномерных подпространств по размерности и обычными поперечниками по Колмогорову.

***Определение* 1.** *Пусть* $\{F_k\} \subset O(Q,Y)$ — *некоторая совокупность элементов,* Y — *нормированное пространство. Будем говорить, что элементы* F_k *являются слабо линейно зависимыми (или* w*-линейно зависимыми), если для любого ненулевого функционала* $G \in Y^*$ *числовые функции* $\langle G, F_k\rangle$ *аргумента* $x \in Q$ *являются линейно зависимыми.*

В противном случае элементы F_k назовем слабо линейно независимыми (w-линейно зависимыми).

***Определение* 2.** *Пусть* H — *некоторое линейное подпространство пространства* $O(Q,Y)$ *ограниченных отображений компакта* Q *в нормированное пространство* Y. *Будем говорить, что* H *имеет слабую размерность* n *(и писать* $w-\dim H = n$*), если:*

1) *найдутся* n *элементов в* H, *которые слабо линейно независимы;*

2) *любые* $n+1$ *элементов из* H *слабо линейно зависимы.*

Примером подпространства слабой размерности n является совокупность элементов вида

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) y_k :\ y_k \in Y \right\},$$

где $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — линейно независимые числовые функции на Q.

Действительно, пусть фиксирован элемент $y \in Y$, $y \neq 0$. Следующая совокупность элементов из H

$$\varphi_1(x)y,\ \varphi_2(x)y,\ \ldots,\ \varphi_n(x)y, \quad x \in Q,$$

является w-линейно независимой, так как для любого функционала $G \in Y^*$ такого, что $\langle G, y\rangle \neq 0$, числовые функции $\varphi_1(x)\langle G, y\rangle$, $\varphi_2(x)\langle G, y\rangle, \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x)\langle G, y\rangle$ линейно независимы.

С другой стороны, пусть

$$h_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, y_k^i, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

— произвольные $n+1$ элемент из H. Покажем, что $\forall G \in Y^*$, $G \neq 0$, функции

$$\langle G, h_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\langle G, y_k^i\rangle$$

линейно зависимы. Для этого рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \langle G, h_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\langle G, y_k^i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \langle G, y_k^i\rangle. \quad (14)$$

Система n уравнений с $n+1$ неизвестными α_i

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \langle G, y_k^i \rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

имеет нетривиальное решение, и для него линейная комбинация (14) обращается в нуль.

Заметим, что в случае $Y = \mathbb{R}^1$ введенное нами понятие слабой размерности совпадает с обычным определением размерности.

Определение 3. *Пусть A — некоторый класс отображений из $O(Q, Y)$, Y — нормированное пространство. Величину*

$$d_n^w(A; O(Q, Y)) = \inf_H \sup_{a \in A} \inf_{h \in H} \|a - h\|_{O(Q,Y)},$$

где внешняя нижняя грань выбирается по всевозможным подпространствам H из $O(Q, Y)$ таким, что $w-\dim H \le n$, назовем слабым n-поперечником по Колмогорову класса A в пространстве $O(Q, Y)$.

Аналогично определяется величина $d_n^w(A; C(Q, Y))$. Заметим, что в случае, когда Q м. в., а Y — банахово пространство, из (9) и (13) вытекают оценки сверху слабых n-поперечников классов $H^\omega \equiv H^\omega(Q, Y)$ для произвольных модулей непрерывности ω:

$$d_n^w(H^\omega; O(Q, Y)) \le \min\{\omega(\varepsilon_n(Q)); J^*(Y)\omega(2\varepsilon_n(Q))\}, \tag{15}$$

$$d_n^w(H^\omega; C(Q, Y)) \le \min\{\omega(\varepsilon_n(Q)); J^*(Y)\omega(2\varepsilon_n(Q))\}. \tag{16}$$

Для оценки этих поперечников снизу нам понадобятся следующие утверждения, являющиеся аналогом известного результата о поперечниках классов числовых функций (см., например, [6, с. 25]).

Лемма 3. *Пусть $A \subset O(Q, Y)$, H — подпространство в $O(Q, Y)$, $w - \dim H = n$. Предположим, что найдутся точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из Q, элементы $F_1, \ldots, F_n$ из H и функционал $G \in Y^*$, $\|G\| = 1$, такие, что:*

1) *функции $\langle G, F_1 \rangle, \ldots, \langle G, F_n \rangle$ линейно независимы; для любого распределения знаков $\lambda_i = \pm 1$, $i = 0, 1, \ldots, n$, существует отображение $f_\lambda \in A$, имеющее свойства:*

2) $\lambda_i \langle G, f_\lambda(x_i) \rangle \ge 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

2) $\left| \langle G, f_\lambda(x_i) \rangle \right| \ge \varepsilon > 0$.

Тогда

$$E(A, H)_{O(Q,Y)} \ge \sup_{f \in A} \inf_{h \in H} \|f - h\|_{O(Q,Y)} \ge \varepsilon.$$

Доказательство. Ясно, что для любого $f \in A$ и любого $\Phi \in O(Q, Y)^*$ такого, что $\|\Phi\| \le 1$ и $\Phi \perp H$,

$$E(f, H)_{O(Q,Y)} \ge \inf_{h \in H} \|f - h\|_{O(Q,Y)} \ge \Phi(f).$$

Пусть выполнены условия леммы. Найдем числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{n} |c_i| = 1; \quad \sum_{i=0}^{n} c_i \langle G, F_k(x_i) \rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

и определим следующий функционал:

$$\Phi(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i \langle G, f(x_i) \rangle.$$

Тогда $\|\Phi\| \le 1$ и для любого $h \in H$

$$\Phi(h) \ge \sum_{i=0}^{n} c_i \langle G, h(x_i) \rangle = \sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle G, F_k(x_i) \rangle. \tag{18}$$

Последнее равенство имеет место ввиду того, что функции $\langle G, h \rangle, \langle G, F_1 \rangle, \ldots$ $\ldots, \langle G, F_n \rangle$ линейно зависимы, а функции $\langle G, F_1 \rangle, \ldots, \langle G, F_n \rangle$ линейно независимы, и значит, $\forall x \in Q$

$$\langle G, h(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle G, F_k(x) \rangle.$$

Из (17) и (18) следует $\Phi(h) = 0$ $\forall h \in H$, т. е. $\Phi \perp H$. Значит, $\forall f \in A$

$$E(f, H)_{O(Q,Y)} \ge \sum_{i=0}^{n} c_i \langle G, f(x_i) \rangle.$$

Выберем знаки λ_i так, чтобы $\lambda_i \operatorname{sgn} c_i \ge 0$, $i = \overline{0, n}$, и соответствующее отображение f_λ из A. Тогда

$$E(A, H)_{O(Q,Y)} \ge E(f_\lambda, H)_{O(Q,Y)} \ge$$

$$\ge \sum_{i=0}^{n} c_i \langle G, f_\lambda(x_i) \rangle = \sum_{i=0}^{n} |c_i| \left| \langle G, f_\lambda(x_i) \rangle \right| \ge \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |c_i| = \varepsilon.$$

Теорема 5. *Если Q — м. в. компакт, Y — банахово пространство и $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$d_n^u(H^\omega(Q, Y) : C(Q, Y)) \ge d_n^u(H^\omega(Q, Y) : O(Q, Y)) \ge \frac{1}{2} \omega(\delta_n(Q)). \tag{19}$$

Доказательство. Первое из неравенств (19) очевидно. Докажем второе. Из определения δ_n следует, что найдутся точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in Q$ такие, что $\rho(x_i, x_j) \ge \delta_n$ $\forall i \ne j$. Тогда открытые шары $B(x_i, \delta_n/2)$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное подпространство $H \subset O(Q, Y)$, $w - \dim H = n$, и выберем в нем набор $F_1, \ldots, F_n$ слабо линейно независимых элементов. Пусть $G \in Y^*$ ($\|G\| = 1$) таков, что функции $\langle G, F_1 \rangle, \ldots, \langle G, F_n \rangle$ линейно независимы. Найдем вектор $e \in Y$, $\|e\| = 1$, такой, что любой элемент $y \in Y$ однозначно представим в виде $y = u + te$, где $u \in \operatorname{Ker} G$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть, далее, задано произвольное распределение знаков $\lambda_i = \pm 1$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Определим отображение $f_\lambda \in H^\omega(Q, Y)$ следующим образом. Если $x \in B(x_i, \delta_n/2)$, то

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2} \lambda_i \omega(\delta_n - 2\rho_1(x, x_i)) e / G(e).$$

Если же $x \overline{\in} \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \delta_n/2)$, то $f_\lambda(x) = 0$.

Нетрудно проверить, что $f_\lambda \in H^\omega(Q, Y)$. Кроме того, ясно, что:

1) $\operatorname{sgn}\langle G, f_\lambda(x_i)\rangle = \lambda_i$;

2) $\left|\langle G, f_\lambda(x_i)\rangle\right| = (1/2)\,\omega(\delta_n)$.

Таким образом, выполнены условия леммы 3 и, следовательно, для любого H такого, что $w-\dim H = n$, имеем $E(H^\omega, H)_{O(Q,Y)} \ge (1/2)\,\omega(\delta_n)$, и теорема 5 доказана.

Объединяя утверждение теоремы 5 с оценками (15), (16), получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть Q — метрически выпуклый компакт, Y — банахово пространство, ω — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\,\omega(\delta_n(Q)) \le d_n^w(H^\omega; O(Q,Y)) \le d_n^w(H^\omega; C(Q,Y)) \le$$

$$\le \min\{\omega(\varepsilon_n(Q)); J^*(Y)\,\omega(2\varepsilon_n(Q))\}.$$

В частности, если $J^*(Y) = 1/2$ и $\delta_n(Q) = 2\varepsilon_n(Q)$, то получаем точное значение слабого поперечника

$$d_n^w(H^\omega; O(Q,Y)) = d_n^w(H^\omega; C(Q,Y)) = \frac{1}{2}\,\omega(2\varepsilon_n(Q)).$$

Рассмотрим два частных случая. В примерах 1, 2 п. 2 для некоторых компактов исследовалась возможность равенства $\delta_n(Q) = 2\varepsilon_n(Q)$. Используя эти результаты (см. (2), (3)), получаем такие следствия из теоремы 6.

***Следствие* 1.** *Пусть $J^*(Y) = 1/2$. Тогда для любого выпуклого вверх модуля непрерывности ω справедливы равенства: при $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$*

$$d_{2^{n-1}+k}^w(H^\omega; C(H_0^1, Y)) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2}{n}\right).$$

***Следствие* 2.** *Пусть $J^*(Y) = 1/2$, Q — m-мерный куб $[0,1]^m$ в метрическом пространстве $\mathbb{R}_\infty^m$. Тогда для $k \in \{n^m, n^m+1, \ldots, (n+1)^m - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы равенства*

$$d_k^w(H^\omega; C([0,1]^m, Y)) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

для любого выпуклого вверх модуля непрерывности.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
2. *Колодий И. М., Хильдебранд Ф.* О некоторых свойствах модуля непрерывности // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 5. – С. 495 – 500.
3. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. – М.: Мир, 1968. – 160 с.
4. *Бердышев В. И.* Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 3. – С. 327 – 338.
5. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Там же. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604 – 614.
6. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.

Получено 29.12.92