УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА КОМОНОТОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

For a function $f(x)$, which is continuous on the interval $[-1;1]$ and has finitely many intervals where it is either nonincreasing or nondecreasing, it is proved that there exists a sequence of polynomials $P_n(x)$ which have the same local monotonicity properties as the function $f(x)$ and such that $|f(x)-P_n(x)|\le C\omega_2\left(f; n^{-2}+n^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$, C is a constant depending on the length of the minimum interval.

Доведено, що для неперервної на $[-1;1]$ функції $f(x)$ з обмеженою кількістю проміжків неспадання і незростання існує послідовність многочленів $P_n(x)$, локально монотонних так само, як $f(x)$ і $|f(x)-P_n(x)|\le C\omega_2\left(f; n^{-2}+n^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$, C — стала, яка залежить від довжини найменшого проміжку.

1. Введение. Пусть на отрезке $[-1;1]:=I$ имеется фиксированный набор Y из $s+1$-й упорядоченной точки $-1=y_s<\ldots<y_1<y_0=1$, $s\in N$. Через $\Delta(Y)$ обозначим множество действительнозначных непрерывных на I функций $f=f(x)$, не убывающих на отрезке $[y_{i+1}, y_i]$ при i четном и не возрастающих на отрезке $[y_{i+1}, y_i]$ при i нечетном. Функции из $\Delta(Y)$ называются комонотонными друг другу.

В работе для случая $s>1$ и класса H_2^{φ} ($\varphi=\varphi(x)$ — непрерывная неубывающая при $t\ge 0$ функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)/t^2$ не возрастает) непрерывных на I функций f таких, что

$$\omega_2(f;t):=\sup_{0<h\le t}\ \max_{-1\le x\le 1-2h}|f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)|\le\varphi(t)$$

$t\in[0,1]$, доказана теорема 1. Обозначим

$$\rho:=\rho_n:=\rho_n(x):=n^{-2}+n^{-1}\sqrt{1-x^2},\quad x\in I;\quad n\in N.$$

Теорема 1. *Пусть $s\ge 1$. Если функция $f\in H_2^{\varphi}\cap\Delta(Y)$, то при каждом натуральном $n\ge N(Y):=500s\left(\min\limits_{0\le i<s}(y_i-y_{i+1})\right)^{-1}$ существует алгебраический многочлен $P=P_n(x)$ степени $\le n$ такой, что*

$$P_n\in\Delta(Y),\tag{1}$$

$$|f(x)-P_n(x)|\le c(s)\varphi(\rho_n(x)),\quad x\in I,\tag{2}$$

где $c(s)$ — постоянная, зависящая только от s.

Из теоремы 1 и классических обратных теорем В. К. Дзядыка следует конструктивная характеристика класса $\mathrm{Lip}^*\alpha$ функций f, для которых $\omega_2(f;t)=O(t^{\alpha})$, $0<\alpha<2$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $s\ge 1$. Если $0<\alpha<2$, то функция $f\in\mathrm{Lip}^*\alpha\cap\Delta(Y)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность многочленов $P_n=P_n(x)$ степени $\le n$ таких, что $P_n\in\Delta(Y)$ и*

$$\left\|\frac{f-P_n}{\rho_n^{\alpha}}\right\|_{C([-1,1])}=O(1),\quad n\to\infty.\tag{3}$$

Следствием теоремы 1 является также теорема 3.

Теорема 3. *Пусть* $s \geq 1$. *Если функция* $f \in H_2^{\varphi} \bigcap \Delta(Y)$, *то при каждом* $n = 1, 2, \ldots$ *найдется многочлен* $P_n = P_n(x)$ *степени* $\leq n$ *такой, что* $P_n \in \Delta(Y)$ *и*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(Y)\varphi(\rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{4}$$

$c(Y)$ *— постоянная, зависящая только от набора* Y.

Для случая $s = 1$, т. е. для множества неубывающих на I функций, теоремы 1 – 3 доказаны в работе [1]. Теорема 2 справедлива также и для $\alpha \geq 2$, случай $s = 1$ доказан в [2], а доказательство для случая $s \geq 2$ находится в печати. При $s > 1$ известны несколько равномерных оценок типа Джексона и в терминах модуля непрерывности, определенного З. Дитцианом и В. Тотиком. Так, D. J. Newman, E. Passow, L. Raymon, J. A. Roulier в своих работах 1972 – 1979 гг. в условиях теоремы 3 пришли к оценке [3]

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(Y)\omega_1(f; n^{-1}), \quad x \in I, \quad n \in N. \tag{5}$$

В 1978 г. G. L. Iliev [4] доказал (5) с постоянной $c(s)$. А. С. Шведов [5] и X. M. Yu [6] усилили (5), заменив в (5) $\omega_1(f; n^{-1})$ на $\omega_2(f; n^{-1})$; при этом, как оказалось, постоянную $c(Y)$ нельзя поменять на $c(s)$ [5]. S. P. Zhou [7] доказал, что при $s > 1$ неравенство (5) с ω_3 не верно. Приведем работу D. Leviatan [8], в которой для функции $f \in C(I) \bigcap \Delta(Y)$ при каждом $n \in N$ построен полином $P_n(x) =: P_n \in \Delta(Y)$ степени $\leq n$ такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(s; \min\{y_{s-1} + 1; 1 - y_1\})\omega_1^{\psi}(f; n^{-1}),$$

где ω_1^{ψ} — модуль непрерывности З. Дитциана и В. Тотика.

2. Вспомогательные предложения. Всюду далее c_i — различные положительные постоянные, которые могут зависеть только от фиксированного $s \in N$, $s \neq 1$. Воспользуемся обозначениями и некоторыми неравенствами из [9], § 15, или [2]. Зафиксируем $n \in N$. Для каждого $j = \overline{1, n}$ обозначим

$$x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n), \quad x_0 := 1,$$

$$I_j := I_{j,n} := [x_{j,n}, x_{j-1,n}], \quad h_j := h_{j,n} := x_{j-1,n} - x_{j,n}.$$

Справедливы неравенства

$$\rho < h_j < 5\rho \quad \text{при} \quad x \in I_j, \tag{6}$$

$$h_{j\pm 1} < 3h_j, \tag{7}$$

$$\rho_n^2(y) < 4\rho(|x - y| + \rho), \; x \in I, \; y \in I, \tag{8}$$

$$2(|x - y| + \rho) > |x - y| + \rho_n(y) > (|x - y| + \rho)/2. \tag{9}$$

Обозначим

$$\beta_j^0 := \beta_{j,n}^0 := \begin{cases} (j - 1/4)\pi/n, & \text{если } j < n/2, \\ (j - 3/4)\pi/n, & \text{если } j \geq n/2; \end{cases}$$

$$\overline{\beta}_j := \overline{\beta}_{j,n} := (j - 1/2)\pi/n;$$

$$x_j^0 := x_{j,n}^0 := \cos\beta_j^0; \quad \overline{x}_j := \overline{x}_{j,n} := \cos\overline{\beta}_j;$$

$$t_{j,n}(x) := (x - x_j^0)^{-2}\cos^2 2n \arccos x + (x - \overline{x}_j)^{-2}\sin^2 2n \arccos x$$

— алгебраический многочлен степени $4n - 2$, для которого справедливы оценки

$$\min\{(x - x_j^0)^{-2}, (x - \overline{x}_j)^{-2}\} \le t_{j,n}(x) \le$$
$$\le \max\{(x - x_j^0)^{-2}, (x - \overline{x}_j)^{-2}\}, \quad x \in I, \tag{10}$$

а при $x \in I_j$

$$t_{j,n}(x) \le 10^3 h_j^{-2}. \tag{11}$$

3. Доказательство теоремы 1. Теорему 1 докажем по индукции по s. При $s = 1$, т. е. для монотонных на всем I функций, теорема 1 (с $n \in N$) доказана в [1]. Предположим, что теорема 1 справедлива для множества функций $H_2^\varphi \cap \Delta(Y\setminus\{y_{s-1}\})$ при каждом натуральном $n \ge N(Y\setminus\{y_{s-1}\})$. Докажем ее для функции $f \in H_2^\varphi \cap \Delta(Y)$. Без ограничения общности будем считать, что $f\{y_{s-1}\} = 0$. Тогда

$$|f(x)| \le \omega_2(f; |x - y_{s-1}|),$$
$$\text{если } |x - y_{s-1}| \le \min\{y_{s-1} + 1, y_{s-2} - y_{s-1}\}. \tag{12}$$

Согласно достаточно известному следствию неравенств Маршо и Уитни (см., например, [9, с. 51]) из (12) находим

$$|f(x)| \le c_1 \Gamma_n^{-2}(y_{s-1})\,\omega_2(f; \rho_n(y_{s-1})), \quad x \in I, \tag{13}$$

где $\Gamma_n(y_{s-1}) := \rho_n(y_{s-1})/(|x - y_{s-1}| + \rho_n(y_{s-1}))$. Введем обозначение $f^*(x) := := f(x)\operatorname{sign}(x - y_{s-1})$. Очевидно,

$$f^* \in \Delta(Y\setminus\{y_{s-1}\}). \tag{14}$$

Следовательно, по предположению индукции существует многочлен $Q_n(x)$ степени $\le n$ такой, что

$$Q_n \in \Delta(Y\setminus\{y_{s-1}\}), \tag{15}$$

$$|Q_n(x) - f^*(x)| \le c_2\omega_2(f^*; \rho), \quad x \in I. \tag{16}$$

Из (12), (14) вытекает оценка

$$\omega_2(f^*; t) \le 3\omega_2(f; t) \le 3\varphi(t), \quad t \ge 0. \tag{17}$$

Ниже, в лемме 1, определим два многочлена, свойства которых позволят „поправить" многочлен $Q_n(x)$ таким образом, чтобы он удовлетворял теореме 1.

Выберем натуральное число $N^*(Y)$ таким образом, чтобы при каждом $n \ge \ge N^*(Y)$ любой отрезок $[y_{i+1}, y_i]$, $i = \overline{0, s-1}$, содержал по крайней мере три различных отрезка I_j и всюду далее считаем $n \ge \max\{N^*(Y), N(Y\setminus\{y_{s-1}\})\}$, n фиксировано. Обозначим

$$O_i := O_{i,n} := \begin{cases} (x_{j+1}, x_{j-1}), & \text{если } y_i = x_j, \\ (x_{j+1}, x_{j-2}), & \text{если } y_i \in (x_j, x_{j-1}); \end{cases}$$

$$\Pi_Y(x) := \prod_{i=1}^{s-1} (x - y_i).$$

Легко проверить справедливость неравенства

$$\left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(y)}\right| \le \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)} + 1\right)^{s-1}, \quad x \in I, \ y \in I \setminus \cup_{i=1}^{s-1} O_i. \tag{18}$$

Из (14) и равенства $f^*(y_{s-1}) = 0$ следует

$$f^*(x)\Pi_Y(x) \ge 0, \quad x \in [-1, y_{s-2}]. \tag{19}$$

Так как $f^* \in \Delta(Y \setminus \{y_{s-1}\})$, то количество непересекающихся отрезков $[a, b] \subset [y_{s-2}, 1]$ таких, что при $x \in [a, b]$ $f^*(x)\Pi_Y(x) \le 0$, не превышает $s-2$. Множество концов таких отрезков (конечно, если они существуют) обозначим через Z. Пронумеруем точки набора Z в убывающем порядке: $z_k < z_{k-1} < \ldots < z_1$, $2 \le k \le 2(s-2)$, k — четное. Положим

$$\Pi_Z(x) := \prod_{\mu=1}^{k} (x - z_\mu).$$

Таким образом, при всех $x \in I$ будем иметь

$$f^*(x)\Pi_Y(x)\Pi_Z(x) \ge 0. \tag{20}$$

Далее, среди номеров $j = \overline{1, n}$ определим индексы l и r такие, что $I_l \not\subset O_{s-1}$, $I_{l-1} \subset \overline{O}_{s-1}$ и соответственно $I_r \not\subset O_{s-1}$, $I_{r+1} \subset \overline{O}_{s-1}$. Проще говоря, отрезки I_l и I_r расположены сразу слева и соответственно справа от множества O_{s-1}. Обозначим

$$T_{j,n}(x; Y) := \frac{\int_{-1}^{x} t_{j,n}^{12s}(y)\,\Pi_Y(y)\,dy}{\int_{-1}^{1} t_{j,n}^{12s}(y)\,\Pi_Y(y)\,dy};$$

$$\overline{T}_{j,n}(x; Y, Z) := \frac{\int_{-1}^{x} t_{j,n}^{15s}(y)\,\Pi_Y^2(y)\Pi_Z(y)\,dy}{\int_{-1}^{1} t_{j,n}^{15s}(y)\,\Pi_Y^2(y)\Pi_Z(y)\,dy}.$$

Отметим кратко два обстоятельства. 1) Пусть $j = l \vee r$. Используя (10), (11) и (18), аналогично [2] нетрудно показать, что при $n \ge N^*(Y)$

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{I \setminus I_j} t_{j,n}^{12s}(y)\,\Pi_Y(y)\,dy\right| < \frac{1}{3}\left|\int\limits_{I_j} t_{j,n}^{12s}(y)\,\Pi_Y(y)\,dy\right|, \\ \left|\int\limits_{I \setminus I_j} t_{j,n}^{15s}(y)\,\Pi_Y^2(y)\Pi_Z(y)\,dy\right| < \frac{1}{3}\left|\int\limits_{I_j} t_{j,n}^{15s}(y)\,\Pi_Y^2(y)\Pi_Z(y)\,dy\right|.\end{gathered} \tag{21}$$

Поэтому, в частности, существует число $\alpha \in [0, 1]$ такое, что

$$\alpha\,\overline{T}_{l,n}(y_{s-1}; Y, Z) + (1-\alpha)\,\overline{T}_{r,n}(y_{s-1}; Y, Z) = \frac{1}{2}; \tag{22}$$

положим

$$R_n(x:Y,Z) := \alpha\,\overline{T}_{l,n}(x:Y,Z) + (1-\alpha)\,\overline{T}_{r,n}(x:Y,Z).$$

2) С помощью (21), (6) – (11) для $j = l \vee r$ можно (аналогично [2]) установить справедливость неравенств

$$\left|T'_{j,n}(x;Y)\right| \ge \tilde{c}_3 \frac{h_j^{24s-1}}{\left(\left|x-x_j\right|+h_j\right)^{24s}} \left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right|, \quad x \in I, \tag{23}$$

$$\left|\overline{T}'_{j,n}(x;Y,Z)\right| \le c_4 \frac{h_j^{30s-1}}{\left(\left|x-x_j\right|+h_j\right)^{30s}} \left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right|^2 \left|\frac{\Pi_Z(x)}{\Pi_Z(x_j)}\right|, \quad x \in I. \tag{24}$$

Обозначим

$$K_n(x:Y) = \min\left\{1;\ \min_{i=\overline{1,s-1}} \frac{|x-y_i|}{\rho_n(y_i)}\right\}.$$

Лемма 1. *Для многочленов*

$$U_n(x) := U_n(x:Y,Z) := 2R_n(x:Y,Z) - 1,$$

$$V_n(x) := V_n(x:Y) :=$$

$$:= \varphi(h_l)(T_{l,n}(x:Y)\operatorname{sign}\Pi_Y(x_l) + T_{r,n}(x:Y)\operatorname{sign}\Pi_Y(x_r))$$

степени $\le 15s(4n-2)+3s$ *при всех* $x \in I$ *справедливы неравенства*

$$|U_n(x)| < 7; \tag{25}$$

$$U_n(x)(x-y_{s-1}) \ge 0; \tag{26}$$

$$|U_n(x) - \operatorname{sign}(x-y_{s-1})| \le c_5\Gamma_n^4(y_{s-1}); \tag{27}$$

$$U'_n(x)\Pi_Z(x) \ge 0; \tag{28}$$

$$|U'_n(x)| \le c_6\rho_n^{-1}(y_{s-1})\Gamma_n^{26s}(y_{s-1})K_n^2(x:Y); \tag{29}$$

$$|V_n(x)| \le c_7\varphi(\rho); \tag{30}$$

$$V'_n(x)\Pi_Y(x) \ge 0; \tag{31}$$

$$|V'_n(x)| \ge c_8\varphi(\rho)\rho_n^{-1}(y_{s-1})\Gamma_n^{26s}(y_{s-1})K_n(x:Y). \tag{32}$$

Доказательство. Неравенства (25), (26) вытекают из (21) с учетом (22). Из (21) следуют также неравенства (28) и (31), так как $t_{j,n}(x) \ge 0$, $x \in I$. Оценки (27), (29), (30), (32) доказываются аналогично лемме 17.2 из [9] с использованием (6) – (12) и (21) – (24). Лемма 1 доказана.

Обозначим

$$P_n(x) := Q_n(x)U_n(x) + AV_n(x), \tag{33}$$

где $A = \text{const} > 0$ выберем позже. Из (13), (16), (17), (25), (27) и (30) вытекает оценка

$$|P_n(x) - f(x)| = |(Q_n(x) - f^*(x))U_n(x) +$$

$$+ f^*(x)(U_n(x) - \operatorname{sign}(x-y_{s-1})) + AV_n(x)| \le$$

$$\le 21c_2\omega_2(f:\rho) + c_5|f^*(x)|\Gamma_n^4(y_{s-1}) + 4Ac_7\varphi(\rho) \le$$

$$\leq (21c_2 + 4Ac_7)\varphi(\rho) + c_1c_5\rho^{-1}(|x - y_{s-1}| + \rho)\Gamma_n^2(y_{s-1})\omega_2(f;\rho) \leq$$
$$\leq (4Ac_7 + c_9)\varphi(\rho), \quad x \in I. \tag{34}$$

Покажем, что $P_n \in \Delta(Y)$ или, что то же самое,

$$P_n'(x)\Pi_Y(x) = (Q_n'(x)U_n(x) + f^*(x)U_n'(x))\Pi_Y(x) +$$
$$+ ((Q_n(x) - f^*(x))U_n'(x) + AV_n'(x))\Pi_Y(x) =:$$
$$=: \Psi_1(x) + \Psi_2(x) \geq 0, \quad x \in I. \tag{35}$$

Действительно, из (15), (26), (20) и (28) непосредственно вытекает неравенство $\Psi_1(x) \geq 0$, $x \in I$. Чтобы доказать неравенство $\Psi_2(x) \geq 0$, $x \in I$, достаточно согласно (31) обеспечить справедливость оценки

$$A|V_n'(x)| \geq |Q_n(x) - f^*(x)||U_n'(x)| \tag{36}$$

при всех $x \in I$. Это нетрудно сделать, положив

$$A = 3c_2c_6/c_8. \tag{37}$$

В самом деле, из (16), (17), (29), (32) и (37) получаем

$$|Q_n(x) - f^*(x)||U_n'(x)| \leq$$
$$\leq 3c_2c_6\varphi(\rho)\rho_n^{-1}(y_{s-1})\Gamma_n^{26s}(y_{s-1})K_n^2(x;Y) \leq A|V_n'(x)|, \quad x \in I,$$

так как $\|K_n(\cdot;Y)\|_{C(I)} = 1$. Оценка (35) доказана.

Из (37), (34) и (35) видно, что многочлен (33) — это многочлен, искомый в теореме 1. Теорема 1 доказана.

Автор благодарит И. А. Шевчука за внимание к работе.

1. *De Vore R. A., Yu X. M.* Pointwise Estimates for Monotone Polynomial Approximation // Constr. Approx. – 1985. – **1**, № 4. – P. 323 – 331.
2. *Шевчук И. А.* Приближение монотонных функций монотонными многочленами // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 5. – С. 63 – 78.
3. *Newman D. J.* Efficient co-monotone approximation // J. Approx. Theory. – 1979. – **25**, № 3. – P. 189 – 192.
4. *Iliev G. L.* Exact Estimates for Partially Monotone Approximation // Anal. Math. – 1978. – **4**, № 3. – P. 181 – 197.
5. *Шведов А. С.* Коприближение кусочно-монотонных функций многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 6. – С. 839 – 846.
6. *Yu X. M.* Degree of comonotone polynomial approximation // Approx. Theory Appl. – 1988. – **4**, № 3. – P. 73 – 78.
7. *Zhou S. P.* On comonotone approximation by polynomials in L^p space // Analysis. – 1993. – **13** (4). – P. 363 – 376.
8. *Leviatan D.* Monotone and comonotone polynomial approximation revisited // J. Approx. Theory. – 1988. – **53**. – P. 1 – 16.
9. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.

Получено 03.08.93