УДК 517. 54

А. К. Бахтин, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ n-Х ДИАМЕТРАХ КОНТИНУУМОВ*

An analog of the problem on the n-th diameters of continua in the complex plane is considered.

Розглянуто аналог задачі про n-ті діаметри континуумів комплексної площини.

Пусть N^* — множество натуральных чисел, $n \geq 2$, V — совокупность всех континуумов комплексной плоскости, имеющих единичную логарифмическую емкость. Величина

$$d_n(K) = \left\{ \max_{c_i, c_p \in K} \left(\prod_{1 \leq i < p \leq n} \left| c_i - c_p \right| \right) \right\}^{2/n(n-1)}, \quad n \in N^*,$$

называется n-м диаметром континуума K, $K \in V$.

Для всякого $\rho \geq 0$ и $n \in N^*$ составим функционал, заданный на V:

$$d_{n,\rho}(K) = \left\{ \max_{c_i, c_p \in K} \prod_{1 \leq i < p \leq n} \frac{\left| c_i - c_p \right|}{1 + \rho \left| c_i - c_p \right|} \right\}^{2/n(n-1)}.$$

Ясно, что при $\rho \to 0$ $d_{n,\rho}(K) \to d_n(K)$.

Пусть

$$d_{n,\rho} = \max_{K \in V} d_{n,\rho}(K).$$

***Задача* А.** Для всякой пары (n, ρ), $n \in N^*$, $\rho \geq 0$, найти значение $d_{n,\rho}$ и все экстремальные континуумы.

Существование экстремальных континуумов очевидно. Пусть K_0 — произвольный экстремальный континуум и $\{ c_i^0 \}$ — экстремальные точки, реализующие величину $d_{n,\rho}$, а $K_n^0 = \{ z : z^n \in [0, 4] \}$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Произвольный экстремальный в задаче А континуум K_0 состоит из объединения конечного числа замыканий траекторий квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\, dw^2 = - \sum_{1 \leq i < k < n} \frac{\gamma_{ik}}{(c_i^0 - w)(c_k^0 - w)}\, dw^2,$$

где

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{1 + \rho \left| c_i^0 - c_k^0 \right|},$$

$\left\{ c_i^0 \right\}_{i=1}^n$ *— экстремальные точки на* K_0.

* Работа частично финансирована Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий.

Теорема 2. *При* $n = 3$ *любой экстремальный в задаче А континуум конгруэнтен континууму* K_3^0.

Сведения по теории квадратичных дифференциалов можно найти в монографии [1, с. 49].

Доказательство теоремы 1. Для изучения экстремального континуума применим метод граничной вариации [2], согласно которому для любой точки w_0, $w_0 \neq 0$, экстремального континуума $K_0 \in V$ существует функция

$$W^*(w) = w + A\varepsilon^2 \frac{w}{(w - w_0)w_0} + O(\varepsilon^3), \tag{1}$$

однолистная и мероморфная во внешности континуума K_0; $|(1/\varepsilon^3)O(\varepsilon^3)| \leq$ $\leq$ const на каждом компакте, не содержащем $w = w_0$.

Произведем необходимые вычисления, исходя из формулы (1):

$$|c_i^* - c_k^*| = \left| c_i^0 - c_k^0 + \frac{A\varepsilon^2}{w_0}\left(\frac{c_i^0}{\left(c_i^0 - w_0\right)} - \frac{c_k^0}{\left(c_k^0 - w_0\right)}\right) + O(\varepsilon^3)\right| =$$

$$= |c_i^0 - c_k^0| \left\{1 - \mathrm{Re}\,\frac{A\varepsilon^2}{(c_i^0 - w_0)(c_k^0 - w_0)} + O(\varepsilon^3)\right\},$$

$$1 + \rho|c_i^* - c_k^*| =$$

$$= \left(1 + \rho\left|\left(c_i^0 - c_k^0\right)\right|\right)\left\{1 - \mathrm{Re}\,\frac{A\varepsilon^2}{1 + \rho\left|\left(c_i^0 - c_k^0\right)\right|}\frac{\rho\left|c_i^0 - c_k^0\right|}{(c_i^0 - w_0)(c_k^0 - w_0)} + \ldots\right\},$$

$$\left|\frac{c_1^* - c_k^*}{1 + \rho\left(c_1^* - c_k^*\right)}\right| = \left|\frac{\left(c_i^0 - c_k^0\right)}{1 + \rho\left(c_i^0 - c_k^0\right)}\right| \times \tag{2}$$

$$\times \left\{1 - \mathrm{Re}\,A\varepsilon^2\left(1 - \frac{\rho\left|c_i^0 - c_k^0\right|}{1 + \rho\left(c_i^0 - c_k^0\right)}\right)\frac{1}{(c_i^0 - w_0)(c_k^0 - w_0)} + O(\varepsilon^3)\right\}.$$

Из формул (2) стандартным путем получаем, что произвольный экстремальный континуум состоит из замыканий конечного числа траекторий квадратичного дифференциала [2]

$$Q(w)\,dw^2 = -\sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{\gamma_{ik}}{(c_i^0 - w)(c_k^0 - w)}\,dw^2,$$

где

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{1 + \rho\left|c_i^0 - c_k^0\right|}.$$

Доказательство теоремы 2. При $n = 2$ легко получить, что экстремальный континуум есть прямолинейный отрезок длины 4.

Рассмотрим решение задачи при $n = 3$. Для удобства вычислений будем писать c_k вместо c_k^0, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$Q(w)\,dw^2 = \left\{\frac{1}{1 + \rho|c_1 - c_2|}\frac{1}{(c_1 - w)(c_2 - w)} + \right.$$

$$+\frac{1}{1+\rho|c_1-c_3|}\frac{1}{(c_1-w)(c_3-w)}+\frac{1}{1+\rho|c_2-c_3|}\frac{1}{(c_2-w)(c_3-w)}\Bigg\}dw^2=$$

$$=\frac{(\gamma_{1,2}+\gamma_{1,3}+\gamma_{2,3})w-(c_3\gamma_{1,2}+c_2\gamma_{1,3}+c_1\gamma_{2,3})}{(c_1-w)(c_2-w)(c_3-w)}dw^2,$$

где

$$\gamma_{ik}=\frac{1}{1+\rho|c_i-c_k|}.$$

В силу инвариантности функционала относительно движений в плоскости w получаем нормирующие условия

$$c_1\gamma_{2,3}+c_2\gamma_{1,3}+c_3\gamma_{1,2}=0,\qquad c_1>0.$$

Для нормированного квадратичного дифференциала будем иметь следующее выражение:

$$Q(w)dw^2=\frac{\sigma w}{(c_1-w)(c_2-w)(c_3-w)}dw^2,$$

$$\sigma=\sum_{1\le i<k\le 3}\gamma_{ik},\qquad \gamma_{ik}=\frac{1}{1+\rho|c_i-c_k|}.$$

На интервале $(0, c_1)$ имеется точка w_0 такая, что $Q(w_0)>0$.

Применяя метод геометрических мест П. М. Тамразова, получаем, что $c_2=\bar{c}_3$.

В силу равноправности точек c_1, c_2, c_3 заключаем, что с точностью до евклидового движения экстремальным является континуум, состоящий из трех прямолинейных отрезков равной длины, исходящих из начала координат под углами $2\pi/3$. При $\rho=0$ получаются известные результаты для плоскости [3].

1. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 265 с.
2. *Schifler M.* A method of variations within the family of simple functions // Proc. London Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432–449.
3. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 240 с.

Получено 20.09.93