УДК 519.21

Б. В. Бондарев, д-р физ.-мат. наук,
И. Л. Шурко, ассист. (Донец. ун-т)

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОЦЕССОВ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

For the rate of convergence of normalized integrals of weakly dependent stationary processes to a standard Wiener process in a uniform metric in probability, exact estimates are obtained. This result is applied to studying the behavior of stochastic systems under weakly dependent random influences in the case of curvilinear boundaries.

Знайдені точні оцінки швидкості збіжності для нормованих інтегралів від стаціонарних процесів зі слабкою залежністю до стандартного вінерівського процесу в рівномірній матриці за ймовірністю. Одержаний результат застосований до дослідження поведінки в криволінійних границях стохастичних систем, підданих слабко залежним випадковим діям.

Введение. Будем рассматривать стационарные в узком смысле процессы $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющие одному из следующих условий: условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) с коэффициентом р. с. п. $\varphi(s) \to 0$, $s \to \infty$, либо условию сильного перемешивания (с. п.) с коэффициентом с. п. $\alpha(s) \to 0$, $s \to \infty$.

Считаем, что

$$E\eta(t) = 0, \quad D\int_0^1 \eta(u)\,du = 1,$$

$$0 < \sigma = E\left(\int_0^1 \eta(u)\,du\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} E\int_0^1 \eta(u)\,du \int_j^{j+1} \eta(u)\,du < \infty,$$

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]} |\eta(t)| > R\right\} < C_1 e^{-C_2 R},$$

$w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Из работы [1] следует слабая сходимость процесса

$$\zeta_\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(u)\,du$$

к $w(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Вместе с тем по известной теореме А. В. Скорохода [2, с. 13] на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ можно построить процесс $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, имеющий такие же конечномерные распределения, что и $\zeta_\varepsilon(t)$, такой, что $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ сходится по вероятности к $w(t)$ в каждой точке $t \in [0, 1]$.

В настоящей статье найдена оценка скорости сходимости $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ к $w(t)$ в равномерной метрике по вероятности. Затем полученная оценка применена при исследовании поведения в криволинейных границах процессов усреднения, подверженных воздействию случайных процессов со слабой зависимостью, и процессов, подверженных быстроосциллирующим случайным воздействиям.

1. Оценка скорости сходимости в принципе инвариантности.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $2 < r < 5$ *справедливо* $\varphi(s) \le As^{-g}$, *где* $g > j(u)(j(u) - 1)$, $u = (2 + 5r)/2(5 - r)$, $j(u) = 2\min\{k \in N: 2k \ge u\}$. *Функция* $\beta(\varepsilon)$ *такая, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{C_2\sqrt{\sigma}\,\beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \to 0. \tag{1}$$

Тогда на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ *можно построить случайный процесс* $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, *имеющий такие же конечномерные распределения, что и* $\zeta_\varepsilon(t)$, *такой, что*

$$Q(\varepsilon) = P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - w(t)\right| > \right.$$

$$\left. > 4\beta(\varepsilon) + C\left(\varepsilon^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r\right)^{1/(r+1)}\right\} < \lambda(\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$\lambda(\varepsilon) = (1 + (3/\varepsilon)C_1)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} +$$

$$+ C\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r\right)^{1/(r+1)},$$

C зависит от A, g, r, σ.

Доказательство. Пусть $n = [1/\varepsilon]$. Обозначим $t_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$S_k = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{k}(\tilde{\zeta}_\varepsilon(\varepsilon i) - \tilde{\zeta}_\varepsilon(\varepsilon(i-1))), \quad t_0 = s_0 = 0.$$

Пусть $\tilde{\eta}_n(t)$ — ломаная с узлами в точках $(t_k, (1/\sqrt{n\sigma})S_k)$. Тогда

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\tilde{\zeta}_n(t) - w(t)\right| > 4\beta(\varepsilon) + C\varepsilon^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - \tilde{\eta}_n(t)\right| > 4\beta(\varepsilon)\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\tilde{\eta}_n(t) - w(t)\right| > C\left(\varepsilon^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r\right)^{1/(r+1)}\right\}.$$

Поскольку $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ и $\zeta_\varepsilon(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения, то

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - \tilde{\eta}_n(t)\right| > 4\beta(\varepsilon)\right\} = P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\zeta_\varepsilon(t) - \eta_n(t)\right| > 4\beta(\varepsilon)\right\},$$

где $\eta_\varepsilon(t)$ — случайная ломаная с узлами в точках

$$\left(t_k, \frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\sum_{i=1}^{k}\int_{i-1}^{i}\eta(u)du\right).$$

В свою очередь,

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\zeta_\varepsilon(t) - \eta_n(t)\right| > 4\beta(\varepsilon)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{t/\varepsilon}\eta(u)du-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du\right|>\beta(\varepsilon)\right\}+$$

$$+\,P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du-\frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du\right|>\beta(\varepsilon)\right\}+$$

$$+\,P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du-\eta_n(t)\right|>2\beta(\varepsilon)\right\}. \qquad (3)$$

Оценим каждое из слагаемых правой части последнего неравенства:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{t/\varepsilon}\eta(u)du-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du\right|>\beta(\varepsilon)\right\}=$$

$$=P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_{nt}^{t/\varepsilon}\eta(u)du\right|>\frac{\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{t\in[0,1]}|\eta(t)|>\frac{\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\le C_1\exp\left\{-C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}/\sqrt{\varepsilon}\right\}. \qquad (4)$$

Далее,

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du-\frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\int\limits_0^{nt}\eta(u)du\right|>\beta(\varepsilon)\right\}=$$

$$=P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_{nt}^{t/\varepsilon}\eta(u)du\right|>\frac{\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{t\in[0,1]}|\eta(t)|>\frac{\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\le C_1\exp\left\{-C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}/\sqrt{\varepsilon}\right\},$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{\varepsilon}>\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\varepsilon}\right)<n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Пусть событие

$$A_n^k=\left\{\omega:\ \sup_{t\in[k,k+1]}|\eta(t)|>\frac{2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

Тогда событие

$$A=\left\{\omega:\ \sup_{t\in[0,n]}|\eta(t)|>\frac{2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}=\bigcup_{k=0}^{n-1}A_n^k,$$

$$P(A)\le\sum_{k=0}^{n-1}P(A_n^k)\le nP\left\{\sup_{t\in[0,1]}|\eta(t)|>\frac{2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}C_1\exp\left\{-2C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}/\sqrt{\varepsilon}\right\}. \qquad (5)$$

Поскольку при $t\in[t_k,t_{k+1}]$

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} \int_0^k \eta(u)\,du + \frac{n(t-t_k)}{\sqrt{n\sigma}} \int_0^{k+1} \eta(u)\,du,$$

то третье слагаемое в (3) можно оценить следующим образом:

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} \int_0^{nt} \eta(u)\,du - \eta_n(t) \right| > 2\beta(\varepsilon) \right\} =$$

$$= P\left\{ \sup_{0\le k\le n-1} \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left| \int_k^{nt} \eta(u)\,du - n(t-t_k) \int_k^{k+1} \eta(u)\,du \right| > 2\beta(\varepsilon)\sqrt{n\sigma} \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \sup_{0\le k\le n-1} \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left((nt-k) \sup_{s\in[k,n]} |\eta(s)| + \sup_{s\in[k,k+1]} |\eta(s)| \right) > 2\beta(\varepsilon)\sqrt{n\sigma} \right\} =$$

$$= P\left\{ \sup_{t\in[0,n]} |\eta(t)| > \beta(\varepsilon)\sqrt{n\sigma} \right\} \le nP\left\{ \sup_{t\in[0,1]} |\eta(t)| > \beta(\varepsilon)\sqrt{n\sigma} \right\} \le$$

$$\le \frac{C_1}{\varepsilon} \exp\left\{ -C_2\beta(\varepsilon) \sqrt{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}\sqrt{\sigma} \right\} \le \frac{C_1}{\varepsilon} \exp\left\{ -C_2\beta(\varepsilon) \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\sqrt{\sigma} \right\}. \tag{6}$$

Из доказательства теоремы 7.1 работы [3] следует

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,1]} \left| \tilde\eta_n(t) - w(t) \right| > C\left(n^{-r/2} \sum_{i=0}^{n-1} E\left| \int_i^{i+1} \eta(u)\,du \right|^r \right)^{1/(r+1)} \right\} \le$$

$$\le C\left(n^{-r/2} \sum_{i=0}^{n-1} E\left| \int_i^{i+1} \eta(u)\,du \right|^r \right)^{1/(r+1)},$$

где C — некоторая константа.

С учетом этого

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,1]} \left| \tilde\eta_n(t) - w(t) \right| > C\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1} E\left| \int_0^1 \eta(u)\,du \right|^r \right)^{1/(r+1)} \right\} \le$$

$$\le C\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1} E\left| \int_0^1 \eta(u)\,du \right|^r \right)^{1/(r+1)}. \tag{7}$$

Из оценок (4) – (7) следует необходимая оценка (2).

Повторяя доказательство теоремы 1, но используя вместо теоремы 7.1 теорему 7.2 работы [3], получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть для некоторого* r, $2<r<5$, *справедливо* $\alpha(k) \le Ak^{-g}$, $k = 1, 2, \ldots$, *где*

$$g > \max\left(\delta_1^{-1} j(u)(j(u)+\delta_1),\ \delta_2^{-1} j(2r)(j(2r)+\delta_2)\right),$$

$$u = \max\left(2r,\ (2+5r)/2(5-r)\right),\quad \delta_1 = r-2,\quad \delta_2 = (r-2)(r(r+1))^{-1},$$

$$j(u) = 2\min(k\in N:\ 2k \ge u),\qquad E\left| \int_0^1 \eta(u)\,du \right|^r < \infty,$$

$\beta(\varepsilon)$ *определена в теореме* 1.

Тогда на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ можно построить случайный процесс $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, имеющий такие же распределения, что и $\zeta_\varepsilon(t)$, такой, что

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)-w(t)\right| \geq 4\beta(\varepsilon)+C\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{(r-2)/2(r+1)} E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r\right\} \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}+C\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{(r-2)/2(r+1)} E\left|\int_0^1 \eta(u)du\right|^r,$$

где C — некоторая константа.

***Пример* 1.** Пусть $\eta(t)$ — ступенчатый марковский процесс, изменяющий свои состояния в моменты $0, 1, 2, \ldots$ со значениями из $[-d, d]$. Предположим, что цепь Маркова $\eta(k)$ имеет только один эргодический класс, не имеющий подклассов, плотность вероятности перехода за один шаг $\rho(x, y)$ равномерно (относительно x) интегрируема. Будем предполагать, что $P\{\eta(0)\in B\} = \pi(B)$. Тогда [4] существуют $K_1>0$, $0<\gamma<1$, такие, что

$$\sup_{x,B}\left|P^{(n)}(x,B)-\pi(B)\right| \leq K_1\gamma^n,$$

цепь $\eta(k)$ удовлетворяет перемешиванию по Ибрагимову с $\varphi(k)=2K_1\gamma^k$. Процесс $\eta(k)$ является стационарным в узком смысле случайным процессом [5].

Очевидно, найдется $\lambda>0$ такое, что $\gamma=e^{-\lambda}$, и тогда $\varphi(k)=K_1e^{-\lambda_1 k}$.

Найдем константу K_2 такую, чтобы $\varphi(k)\leq K_2k^{-g}$. Прологарифмировав обе части неравенства и проделав очевидные преобразования, получим

$$K_2 = 2K_1\exp\left(\max_{x_1\leq x\leq x_2}(\ln x-(\lambda/g)x)\right).$$

Таким образом, процесс $\eta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, справедлива оценка (2).

***Пример* 2.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Ито

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dw(t)+b(t, X(t))\,dt, \quad t\geq 0, \quad X(0)=x_0, \tag{8}$$

где функции $a(t,x)$, $b(t,x)$ ограничены и борелевы, и при всех $x\in R$, $t\geq 0$ $a^2(t,x)\geq \nu>0$, для некоторого $r>0$ при всех $|x|\geq r$, $t\geq 0$ $b(t,x)x\leq \leq -\gamma|x|$, $\gamma>0$.

Предполагаем также, что коэффициенты a и b таковы, что решение $X(t)$ уравнения (8) единственно в смысле закона распределения. Тогда [6] при некотором $\lambda>0$ при каждом x для всех $s\geq s(x)$ выполняется неравенство для коэффициента с. п. $\alpha(s)\leq\exp\{-\lambda s\}$.

Проделав те же выкладки, что и в примере 1, получим $\alpha(s)\leq As^{-g}$, и поскольку $X(t)$ является строго марковским стационарным в узком смысле случайным процессом с $E|X(t)|<C'<\infty$, то можем применить теорему 2.

Справедлива оценка

$$Q(\varepsilon)\leq\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}+C\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{(r-2)/2(r+1)} E\left|\int_0^1 X(t)dt\right|^r.$$

2. Усреднение в криволинейных границах. Рассмотрим в R^1 уравнение

$$\frac{dX_\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon(a(t, X_\varepsilon(t)) + b(X_\varepsilon(t))\eta(t),$$

$X_\varepsilon(0) = x_0$, $t \in [0, T/\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\eta(t)$ — случайный процесс, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Без ограничения общности можно полагать $\sigma = 1$.

Пусть функция $a(x, y)$ непрерывна по x и y, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x с константой L_a; функция $b(x)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица с константой L_b.

Будем предполагать, что равномерно по $x \in R^1$, $t_0 \geq 0$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t, x)dt = a_0(x).$$

Пусть $X_0(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = a_0(X_0(t)), \quad X_0(0) = x_0.$$

Считаем, что

$$\rho_\varepsilon = \sup_{0\leq t\leq T} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(a\left(\frac{s}{\varepsilon}, X_0(s)\right) - a_0(X_0(s))\right) ds \right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Известно [7], что тогда случайный процесс $\zeta_\varepsilon(t) = (1/\sqrt{\varepsilon})(X_\varepsilon(t/\varepsilon) - - X_0(t))$ слабо сходится к гауссовскому марковскому процессу, характеристики которого можно получить.

Найдем оценку скорости сходимости $\zeta_\varepsilon(t)$ к некоторому гауссовскому процессу в криволинейных границах.

Теорема 3. *Пусть выполнены сформулированные выше условия и, кроме того,*

$$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t b(X_0(s))\eta(s/\varepsilon)\,ds \right| > R \right\} \leq C_\varepsilon^1 \exp\{-C_\varepsilon^2 R^\alpha\} + r_\varepsilon,$$

$$P\left\{ \sqrt{\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} (|\eta(s)| - E|\eta(s)|)ds > R \right\} \leq C_\varepsilon^3 \exp\{-C_\varepsilon^4 R^\beta\} + r_\varepsilon,$$

$$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(s)ds \right| > R \right\} \leq C_\varepsilon^5 \exp\{-C_\varepsilon^4 R^\gamma\} + r_\varepsilon,$$

где $r_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, α, β, γ *— некоторые константы,* $|a(t, x)| + |b(x)| \leq$ $\leq C(1 + |x|)$ *для всех* $x \in R^1$,

$$\int_0^T b^2(X_0(s))\,ds > C_0.$$

Выберем функции $\varphi_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$, $r(\varepsilon)$ *таким образом, чтобы при* $\varepsilon \to 0$ $\varphi_1(\varepsilon) \to 0$ *и* $\varphi_1(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \to \infty$,

$$\varphi_2(\varepsilon) = \left(4\beta(\varepsilon) + C\left(\varepsilon^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(s)ds\right|^r\right)^{1/(r+1)}\right)\times$$

$$\times(|x_0| + CT + 1)(1 + L_b)\exp\{L_aT + CT\},$$

$\beta(\varepsilon)$ *определена в теореме* 1, $\varphi_s(\varepsilon) \to 0$ *и* $\varphi_s(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \to \infty$, $r(\varepsilon) \to \infty$ и $\sqrt{\varepsilon}\, r(\varepsilon) \to 0$.

Пусть случайный процесс $\eta_\varepsilon(t)$ *такой, что*

$$\eta_\varepsilon(t/\varepsilon) = \int_0^t a'_x(s/\varepsilon, X_0(s))\eta_\varepsilon(s/\varepsilon)ds + \int_0^t b(X_0(s))dw(s),$$

функции $f_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, *определены при* $t \geq 0$, *липшицевы и для всех* t $f_1(t) < 0 < f_2(t)$.

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$|P\{f_1(t) < \xi_\varepsilon(t) < f_2(t),\ 0 \leq t \leq T\} - P\{f_1(t) < \eta_\varepsilon(t) < f_2(t),\ 0 \leq t \leq T\}| \leq$$

$$\leq 2C_\varepsilon^1 \exp\left\{-C_\varepsilon^2 \frac{\varphi_1(\varepsilon)\exp\{-L_aT\}}{\sqrt{\varepsilon}\, L_b(\sqrt{\varepsilon}\, r(\varepsilon) + CT)}\left(\exp\{-(L_a + C_0T + \sqrt{\varepsilon}\, r(\varepsilon))\} - \rho_\varepsilon\right)^\alpha\right\} +$$

$$+ 2C_\varepsilon^3 \exp\{-C_\varepsilon^4 (r(\varepsilon))^\beta\} + r_\varepsilon + \lambda(\varepsilon) +$$

$$+ 2\exp\left\{-\frac{1}{2C_0}\left(\left(\frac{\varphi_3(\varepsilon)\exp\{-L_aT\} - \rho_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}\, C''T}\right)^{1/2} - \rho_\varepsilon\right)^2\right\} +$$

$$+ C\left(\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\right)\ln\sqrt{\left(\sum\nolimits_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\right)^{-1}} + \left(\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\right)^{1/c^*},$$

где $\lambda(\varepsilon)$ *определено в теореме* 1, C — *некоторая абсолютная константа.*

Доказательство. После несложных выкладок убеждаемся в том, что

$$|\xi_\varepsilon(t)| \leq \rho_\varepsilon + \left(L_aT + L_b\int_0^T |\eta(s/\varepsilon)|ds\right)\xi_\varepsilon(t) + \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t b(X_0(s))\eta(s/\varepsilon)ds\right|.$$

По лемме Гронуолла

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_\varepsilon(t)| \leq \left(\rho_\varepsilon + \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t b(X_0(s))\eta(s/\varepsilon)ds\right|\right)\exp\left\{L_aT + L_b\int_0^T|\eta(s/\varepsilon)|ds\right\}.$$

Тогда с учетом условий теоремы получаем

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_\varepsilon(t)| > d_\varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t b(X_0(s))\eta(s/\varepsilon)ds\right| > d_\varepsilon\right\}\exp\{-(L_a + C_0T + \sqrt{\varepsilon}\, r(\varepsilon))\} +$$

$$+ P\left\{\sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)| - E|\eta(s)|)ds > r(\varepsilon)\right\} \leq$$

$$\leq C_\varepsilon^1 \exp\{-C_\varepsilon^2(d_\varepsilon(\exp\{-(L_a+C_0T+\sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon))\}-\rho_\varepsilon)^\alpha)\} +$$
$$+ C_\varepsilon^3 \exp\{-C_\varepsilon^4(r(\varepsilon))^\beta\} + r_\varepsilon.$$

Введем в рассмотрение случайный процесс $\eta_\varepsilon^{(1)}(t)$, являющийся решением уравнения

$$\frac{d\eta_\varepsilon^{(1)}(t)}{dt} = \varepsilon[a(t, \eta_\varepsilon^{(1)}(t)) + b(X_0(t))\eta(t)], \qquad \eta_\varepsilon^{(1)}(0) = x_0.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|X_\varepsilon(t/\varepsilon)-\eta_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}L_a\int_0^T|X_\varepsilon(s/\varepsilon)-\eta_\varepsilon^{(1)}(s/\varepsilon)|\,ds +$$
$$+ L_b\int_0^T|\eta_\varepsilon^{(1)}(s/\varepsilon)|\,ds \sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_\varepsilon(t/\varepsilon)-X_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|.$$

Из леммы Гронуолла и изложенного выше следует оценка

$$p_1 = P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_\varepsilon(t/\varepsilon)-\eta_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right| > \varphi_1(\varepsilon)\right\} \leq$$
$$\leq P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_\varepsilon(t)| > \frac{\varphi_1(\varepsilon)\exp\{-L_aT\}}{\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}|\eta(s)|ds\right)L_b}\right\} \leq$$
$$\leq C_\varepsilon^1\exp\left\{-C_\varepsilon^2\frac{\varphi_1(\varepsilon)\exp\{-L_aT\}}{\sqrt{\varepsilon}\,L_b\left(\sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)+CT\right)}\left(\exp\left\{-\left(L_a+C_0T+\sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\right)\right\}-\rho_\varepsilon\right)^\alpha\right\} +$$
$$+ 2C_\varepsilon^3\exp\{-C_\varepsilon^4(r(\varepsilon))^\beta\} + r_\varepsilon.$$

Далее, пусть процессы $\tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(t)$ и $\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t)$ такие, что

$$\tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon) = x_0 + \int_0^t a(s/\varepsilon, \tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(s/\varepsilon))\,ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t b(X_0(s))\,d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s),$$
$$\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t/\varepsilon) = x_0 + \int_0^t a(s/\varepsilon, \tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(s/\varepsilon))\,ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t b(X_0(s))\,dw(s),$$

где процесс $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ определен в теореме 1 (заметим, что $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ построен на одном вероятностном пространстве с $w(t)$). Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon)-\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t/\varepsilon)| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}L_a\int_0^T|\tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(s/\varepsilon)-\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(s/\varepsilon)|\,ds +$$
$$+ \left|\int_0^t b(X_0(s))\,d\left[\tilde{\zeta}_\varepsilon(s)-w(s)\right]\right|.$$

Применяя лемму Гронуолла и формулу интегрирования по частям к последнему соотношению, получаем

$$\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon)-\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t/\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \exp\{L_a T + CT\}(|x_0| + CT + 1)(1 + L_b) \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - w(t)|.$$

Из теоремы 1 следует оценка для

$$p_2 = P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left| \tilde{\eta}_\varepsilon^{(1)}(t/\varepsilon) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t/\varepsilon) \right| > \varphi_2(\varepsilon) \right\}:$$

$$p_2 \leq P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - w(t) \right| > \frac{\varphi_2(\varepsilon) \exp\left\{-L_a T - CT\right\}}{(|x_0| + CT + 1)\left(1 + L_b T\right)} \right\} \leq \lambda(\varepsilon),$$

где $\lambda(\varepsilon)$ определена в упомянутой теореме.

Обозначим

$$\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\tilde{\eta}_\varepsilon^{(2)}(t/\varepsilon) - X_0(t) \right)$$

и введем в рассмотрение процесс

$$\tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) = \int_0^t a'_x(s/\varepsilon, X_0(s))\, \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(s/\varepsilon)\, ds + \int_0^t b(X_0(s))\, dw(s).$$

Тогда

$$|\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/\varepsilon) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t a(s/\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\, \tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(s/\varepsilon) + X_0(s)) - a(s/\varepsilon, X_0(s)) - \right.$$

$$- a'_x(s/\varepsilon, X_0(s)) \sqrt{\varepsilon}\, \tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(s/\varepsilon)\, ds +$$

$$\left. + \int_0^t a'_x(s/\varepsilon, X_0(s)) \left(\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(s/\varepsilon) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(s/\varepsilon) \right) ds \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t a(s/\varepsilon, X_0(s)) - a(X_0(s))\, ds \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\, C'' \int_0^t |\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(s/\varepsilon)|^2 ds + L_a \int_0^t |\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(s/\varepsilon) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(s/\varepsilon)|\, ds + \rho_\varepsilon.$$

Вновь применив лемму Гронуолла, получим

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/\varepsilon)| \leq \exp\{L_a T\} \left(\rho_\varepsilon + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b(X_0(s))\, dw(s) \right| \right)$$

и

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/3) \right| > d_\varepsilon \right\} \leq 2P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T b(X_0(s))\, dw(s) > d_\varepsilon \exp\{-L_a T\} - \rho_\varepsilon \right\}.$$

Применив экспоненциальные тождества для мартингалов [7] и неравенство Чебышева, будем иметь

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/3) \right| > d_\varepsilon \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{1}{2C_0} \left(d_\varepsilon \exp\{-L_a T\} - \rho_\varepsilon \right)^2 \right\}.$$

Следовательно,

$$p_3 = P\left\{ \sup_{0\le t\le T} \left| \tilde{\eta}_\varepsilon^{(3)}(t/\varepsilon) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) \right| > \varphi_3(\varepsilon) \right\} \le$$

$$\le 2\exp\left\{ -\frac{1}{2C_0}\left(\left(\frac{\varphi_3(\varepsilon)\exp\{-L_a T\} - \rho_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}\, C'' T} \right)^{1/2} - \rho_\varepsilon \right)^r \right\}.$$

Несложно установить, что

$$|Q_\varepsilon - Q_0| \le 2\sum_1^3 p_i + P\left\{ -\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) < \sup_{0\le t\le T} \left(\tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) - f_2(t) \right) < \sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right\} +$$

$$+ P\left\{ -\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) < \sup_{0\le t\le T} \left(f_1(t) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) \right) < \sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right\}.$$

Сделав замену времени

$$u = \psi(t) = \int_0^t b^{-2}(X_0(s))\, ds$$

и применив лемму из [8], получим

$$P\left\{ 0 < \sup_{0\le t\le T} \left(\tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) - \left(f_2(t) - \sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right) \right) < 2\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right\} \le$$

$$\le \left(A + R\sqrt{\ln\left(2\sum\nolimits_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right)^{-1}} \right) \sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) + 4\left(\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right)^{1/A_1}. \tag{9}$$

где A, A_1, R не зависят от ε.

Аналогично (9) имеем

$$P\left\{ 0 \le \sup_{0\le t\le T} \left(\left(f_1(t) - \sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right) - \tilde{\eta}_\varepsilon^{(4)}(t/\varepsilon) \right) < 2\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) \right\}$$

Суммируя полученные оценки, убеждаемся в справедливости теоремы.

3. Возмущение быстрыми случайными осцилляциями. Нахождение в криволинейных границах. Пусть $X_\varepsilon(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\varepsilon(t)}{dt} = a(t, X_\varepsilon(t)) + b(t, X_\varepsilon(t))\,\eta(t/\varepsilon), \quad X_\varepsilon(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\eta(t)$ — случайный процесс, удовлетворяющий условиям теоремы 1.

Будем также предполагать, что для любых R, r

$$P\left\{ \sup_{0\le t\le T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(s)\,ds \right| > R \right\} \le C_3 \exp\{-C_4 R^\beta\},$$

$$P\left\{ \sqrt{\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} (|\eta(s)| - E|\eta(s)|)\,ds > r \right\} \le C_5 \exp\{-C_6 r^\gamma\},$$

где C_i, $i = \overline{3,6}$, β, γ — некоторые положительные константы и функции $a(t,x)$, $b(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R$, удовлетворяют при некотором $L < \infty$ условиям:

1) $\quad |a(t,x_1)-a(t,x_2)| + |b(t,x_1)-b(t,x_2)| +$

$$+ |a'_x(t,x_1)-a'_x(t,x_2)| + |b'_x(t,x_1)-b'_x(t,x_2)| \le L|x_1-x_2|;$$

2) $\quad a(t,x) + b(t,x) \le L(1+|x|);$

3) $\quad \left|\dfrac{\partial b(t,x)}{\partial t}\right| \le L(1+|x|);$

4) $\quad \left|\dfrac{\partial b(t,x)}{\partial t\,\partial x}\right| \le L.$

Пусть $X_0(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = a(t, X_0(t)), \quad X_0(0) = x_0, \quad t\in[0,T],$$

$\xi_0(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$d\xi_0(t) = a'_x(t, X_0(t))\xi_0(t)\,dt + b(t, X_0(t))\,dw(t), \qquad \xi_0(0) = 0.$$

Представляет интерес оценка скорости сходимости $Q_\varepsilon = P\{f_1(t)<\xi_\varepsilon(t)<f_2(t),\ 0\le t\le T\}$ к $Q_0 = P\{f_1(t)<\xi_0(t)<f_2(t),\ 0\le t\le T\}$, где функции $f_i(t)$, $i=\overline{1,2}$, определены при $t\ge 0$ и удовлетворяют условию $f_1(t)<0<f_2(t)$, $t\in[0,T]$.

Теорема 4. *Пусть функции* $\varphi_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$, $r(\varepsilon)$ *такие, что при* $\varepsilon\to 0$

$$\varphi_1(\varepsilon)\to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_1(\varepsilon)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\to\infty,$$

$$\varphi_2(\varepsilon)\to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_2(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\to\infty,$$

$$r(\varepsilon)\to\infty, \quad \sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\to 0,$$

$$\varphi_3(\varepsilon) = \left(4\beta(\varepsilon) + C\varepsilon^{r/2-1}E\left|\int_0^1 \eta(s)ds\right|^r\right)e^{2Lt}(L+(L+L_1)LT)$$

(здесь $\beta(\varepsilon)$ *из теоремы* 1, $L_1 = L(1+(|x_0|+LT)e^{LT}))$. *Тогда*

$$|Q_\varepsilon - Q_0| \le$$

$$\le C\left(\exp\left\{-C\left(\frac{\varphi_1(\varepsilon)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)^{\beta}\right\} + \exp\left\{-C\left(\frac{\varphi_2(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\beta/2}\right\} + \exp\left\{-C(r(\varepsilon))^{\gamma}\right\}\right) +$$

$$+\lambda(\varepsilon) + C\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\ln\sqrt{\left(\sum\nolimits_1^3\varphi_i(\varepsilon)\right)^{-1}} + \left(\sum_1^3\varphi_i(\varepsilon)\right)^{1/C}, \tag{10}$$

где C *— некоторая абсолютная константа,* $\lambda(\varepsilon)$ *определена в теореме* 1.

Доказательство. Вначале получим некоторые вспомогательные оценки. Очевидно,

$$|X_0(t)| \le |x_0| + LT + L\int_0^t |X_0(s)|ds.$$

Из леммы Гронуолла следует

$$\sup_{0\le t\le T} |X_0(t)| \le (|x_0| + LT)e^{LT}. \tag{11}$$

Несложно показать, что

$$|\xi_\varepsilon(t)| \le L\int_0^t |\xi_\varepsilon(s)|(1+|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(s, X_0(s))\,d\zeta_\varepsilon(s)\right|,$$

а

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(s, X_0(s))\,d\zeta_\varepsilon(s)\right| \le \sup_{0\le t\le T}|\xi_\varepsilon(t)|\Big(|b(t, X_0(t))| +$$

$$+\int_0^T\left|\frac{\partial b}{\partial s}(s, X_0(s))\right|ds + \int_0^T\left|\frac{\partial b}{\partial x}(s, X_0(s))\right|\left|\frac{\partial X_0(s)}{\partial s}\right|ds\Big).$$

С учетом (11) и условий 1 – 3 будем иметь

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(s, X_0(s))\,d\zeta_\varepsilon(s)\right| \le \sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|L(1+T+LT)(1+|x_0|+LT)e^{LT}.$$

Заметим, что $E|\eta(t)| < C_0 < \infty$.

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, получим

$$\sup_{0\le t\le T}|\xi_\varepsilon(t)| \le \sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|L_1(1+T+LT)\times$$

$$\times\exp\left\{LT(1+C_0) + \varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)| - E|\eta(s)|)\,ds\right\}. \tag{12}$$

Найдем оценку для

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_\varepsilon(t)\right| > R\right\}.$$

Обозначим событие

$$A = \left\{\omega:\ \sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)| - E|\eta(s)|)\,ds > r(\varepsilon)\right\}.$$

Тогда

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_\varepsilon(t)\right| > R\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\zeta_\varepsilon(t)\right| > \frac{R\exp\left\{-LT(1+C_0) - \varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)| - E|\eta(s)|)\,ds\right\}}{L_1(1+T+LT)},\ A\cup\overline{A}\right\} \le$$

$$\le C_3\exp\left\{-C_4\left(\frac{R\exp\left\{-LT(1+C_0) - \sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\right\}}{L_1(1+T+LT)}\right)^{\beta}\right\} + C_5\exp\left\{-C_6(r(\varepsilon))^{\gamma}\right\}. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение случайные процессы $\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$ и $\tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(t)$:

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t) = \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\xi_\varepsilon^{(1)}(s)\,ds +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\int_0^t b'_x(s, X_0(s))\xi_\varepsilon^{(1)}(s)\,d\zeta_\varepsilon(s) + \int_0^t b(s, X_0(s))\,d\zeta_\varepsilon(s),$$

$$\tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(t) = \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(s)\,ds +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\int_0^t b'_x(s, X_0(s))\tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(s)\,d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) + \int_0^t b(s, X_0(s))\,d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s),$$

где $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ — случайный процесс, имеющий такие же конечномерные распределения, что и $\zeta_\varepsilon(t)$, определенный в теореме 3.

Поскольку

$$Q_\varepsilon \le P\{f_1(t) - \varphi_1(\varepsilon) < \xi_\varepsilon^{(1)}(t) < f_2(t) + \varphi_1(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon^{(1)}(t)\right| > \varphi_1(\varepsilon)\right\}$$

и процессы $\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$ и $\tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(t)$ одинаково распределены, то

$$Q_\varepsilon \le P\{f_1(t) - \varphi_1(\varepsilon) < \tilde{\xi}_\varepsilon^{(1)}(t) < f_2(t) + \varphi_1(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon^{(1)}(t)\right| > \varphi_1(\varepsilon)\right\}.$$

Тогда

$$\left|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon^{(1)}(t)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t [a(s, X_0(s) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_\varepsilon(s)) - a(s, X_0(s)) - a'_x(s, X_0(s))\sqrt{\varepsilon}\,\xi_\varepsilon(s)]\,ds\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t [b(s, X_0(s) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_\varepsilon(s)) - b(s, X_0(s)) -\right.$$

$$\left. - b'_x(s, X_0(s))\sqrt{\varepsilon}\,\xi_\varepsilon(s)]\eta(s/\varepsilon)\,ds\right| +$$

$$+ \left|\int_0^t [\xi_\varepsilon(s) - \xi_\varepsilon^{(1)}(s)][a'_x(s, X_0(s)) + b'_x(s, X_0(s))\eta(s/\varepsilon)]\,ds\right| \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon}\,L\sup_{0\le t\le T}\xi_\varepsilon^{(2)}(t)\left(T + \varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}|\eta(s)|\,ds\right) +$$

$$+ \int_0^t |\xi_\varepsilon(s) - \xi_\varepsilon^{(1)}(s)|(|a'_x(s, X_0(s))| + |b'_x(s, X_0(s))\eta(s/\varepsilon)|)\,ds.$$

Согласно лемме Гронуолла

$$\sup_{0\le t\le T} |\xi_\varepsilon(t)-\xi_\varepsilon^{(1)}(t)| \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon}\, L \sup_{0\le t\le T} \xi_\varepsilon^{(2)}(t)\left(T+\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}|\eta(s)|ds\right)\exp\left\{LT+\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}|\eta(s)|ds\right\} \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon}\, L \sup_{0\le t\le T} \xi_\varepsilon^{(2)}(t)\left(T+C_0T+\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)|+E|\eta(s)|)ds\right)\times$$

$$\times \exp\left\{LT+C_0T+\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)|+E|\eta(s)|)ds\right\}.$$

Учитывая (12), аналогично тому, как сделано в (13), получаем

$$p_1 = P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_\varepsilon(t)-\xi_\varepsilon^{(1)}(t)\right| > \varphi_1(\varepsilon)\right\} \le$$

$$\le C_3\exp\left\{-C_4\left(\frac{\exp\left\{-\frac{3}{2}LT-\frac{1}{2}C_0T-C_0LT-\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\right\}\varphi_1(\varepsilon)}{\sqrt[4]{\varepsilon}\sqrt{L\left(T+C_0T+\sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\right)}\,L_1(1+T+LT)}\right)^{\beta}\right\}+$$

$$+\, C_5\exp\{-C_6(r(\varepsilon))^{\gamma}\}. \tag{14}$$

Несложно показать, что

$$\tilde\xi_\varepsilon^{(1)}(t) = \exp\left\{\int_0^t a'_x(s,X_0(s))\,ds+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\varepsilon}\int_0^t b'_x(s,X_0(s))\,d\tilde\zeta_\varepsilon(s)\right\}\int_0^t\exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau,X_0(\tau))\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\varepsilon}\int_0^s b'_x(\tau,X_0(\tau))\,d\tilde\zeta_\varepsilon(\tau)b(s,X_0(s))\,d\tilde\zeta_\varepsilon(s)\right\}.$$

$$\xi_0(t) = \exp\left\{\int_0^t a'_x(s,X_0(s))\,ds\right\}\times$$

$$\times\int_0^t\exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau,X_0(\tau))\,d\tau\right\}b(s,X_0(s))\,dw(s).$$

Далее, пусть процесс $\tilde\xi_\varepsilon^{(2)}(t)$ такой, что

$$\tilde\xi_\varepsilon^{(2)}(t) = \exp\left\{\int_0^t a'_x(s,X_0(s))\,ds\right\}\times$$

$$\times\int_0^t\exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau,X_0(\tau))\,d\tau\right\}b(s,X_0(s))\,d\tilde\zeta_\varepsilon(s).$$

Тогда

$$\tilde\xi_\varepsilon^{(1)}(t)-\tilde\xi_\varepsilon^{(2)}(t) = \exp\left\{\int_0^t a'_x(s,X_0(s))\,ds\right\}\times$$

$$\times \left(\exp\left\{ \sqrt{\varepsilon} \int_0^t b'_x(s, X_0(s)) d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) \right\} - 1 \right) \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} b(s, X_0(s))\, d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) +$$

$$+ \exp\left\{ \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\, ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t b'_x(s, X_0(s))\, d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) \right\} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} \left(\exp\left\{ -\sqrt{\varepsilon} \int_0^s b'_x(\tau, X_0(\tau)) d\zeta_\varepsilon(\tau) \right\} - 1 \right) \times$$

$$\times\, b(s, X_0(s))\, d\zeta_\varepsilon(s) = I_1 + I_2. \tag{15}$$

Для оценки первого слагаемого I_1 в (15) воспользуемся формулой интегрирования по частям и неравенством $e^x - 1 \le x e^x$, $x > 0$:

$$|I_1| \le e^{LT} \sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^t b'_x(s, X_0(s))\, d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) \right| \exp\left\{ \sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^t b'_x(s, X_0(s))\, d\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) \right| \right\} \times$$

$$\times \left| \exp\left\{ - \int_0^t a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} b(t, X_0(t))\, \tilde{\zeta}_\varepsilon(t) - \right.$$

$$- \int_0^t \zeta_\varepsilon(s) \exp\left\{ - \int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} \times$$

$$\left. \times [- a'_x(s, X_0(s))\, b(s, X_0(s)) + b'_s(s, X_0(s))\, a(s, X_0(s))]\, ds \right| \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \le t \le T} \left| \tilde{\xi}_\varepsilon^{(2)}(t) \right| e^{2LT} L_1^2 (1 + LT)(1 + LT +$$

$$+ L_1 T) \exp\left\{ \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \le t \le T} \left| \tilde{\zeta}_\varepsilon(t) \right| L_1 (1 + LT) \right\}.$$

Перейдем к оценке I_2. Поскольку

$$\exp\left\{ -\sqrt{\varepsilon} \int_0^s b'_x(\tau, X_0(\tau)) d\zeta_\varepsilon(\tau) \right\} - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\sqrt{\varepsilon}\, \zeta_\varepsilon(s)\, b'_x(s, X_0(s)) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\varepsilon} \int_0^s b''_{xs}(\tau, X_0(\tau))\, a(\tau, X_0(\tau))\, \zeta_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{\varepsilon})^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(-\zeta_\varepsilon(s)\, b'_x(s, X_0(s)) \right)^i \times$$

$$\times \left(\int_0^s b''_{xs}(\tau, X_0(\tau))\, a(\tau, X_0(\tau))\, \zeta_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right)^{k-i}.$$

то

$$\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\,d\tau\right\} b(s, X_0(s)) \times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\sqrt{\varepsilon}\int_0^s b'_x(\tau, X_0(\tau))d\zeta_\varepsilon(\tau)\right\}-1\right)d\zeta_\varepsilon(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\varepsilon})^k}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\,d\tau\right\} b(s, X_0(s)) \times$$

$$\times\left(-\zeta_\varepsilon(s)\, b'_x(s, X_0(s))\right)^i\left(\int_0^s b''_{xs}(\tau, X_0(\tau))\, a(\tau, X_0(\tau))\,\zeta_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right)^{k-1} d\zeta_\varepsilon(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\varepsilon})^k}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \int_0^t \frac{1}{i+1}\exp\left\{-\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\,d\tau\right\} b(s, X_0(s)) \times$$

$$\times\left(-b'_x(s, X_0(s))\right)^i\left(\int_0^s b''_{xs}(\tau, X_0(\tau))\, a(\tau, X_0(\tau))\,\zeta_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right)^{k-1} d\zeta_\varepsilon^{i+1}(s).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, с учетом условий 1 – 4 получаем

$$|I_2| \le \exp\left\{2LT + \sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|(L + LL_1T)\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\varepsilon})^k}{k!}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|^{k+1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k} C_k^i\frac{1}{i+1}T^{k-1}L^k L_1^{k-i}\left(1 + 2TLL_1 + kTL_1 + \frac{kL_1}{T}\right) \le$$

$$\le \exp\left\{2LT + \sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|(L + LL_1T)\right\}\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|^2\times$$

$$\times(1 + 2TLL_1 + TL_1 + L_1/T)(L + LL_1T)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\varepsilon})^{k-1}}{(k-1)!}\sup_{0\le t\le T}\left|\zeta_\varepsilon(t)\right|^{k-1}(L + LL_1T)^{k-1} =$$

$$= \exp\left\{2LT + 2\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|(L + LL_1T)\right\}\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|^2\times$$

$$\times(1 + 2LL_1T + L_1T + L_1/T)(L + LL_1T).$$

Далее, аналогично предыдущему

$$p_2 = P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\xi_\varepsilon^{(1)}(t) - \tilde\xi_\varepsilon^{(2)}(t)\right| > 2\varphi_2(\varepsilon)\right\} \le$$

$$\le P\{|I_1| > \varphi_2(\varepsilon)\} + P\{|I_2| > \varphi_2(\varepsilon)\} \le$$

$$\le C_3\exp\left\{-C_4\left(\frac{\sqrt{\varphi_2(\varepsilon)}\exp\left\{-LT - \frac{1}{2}L_1(1+LT)\left(C_0T + \sqrt{\varepsilon}\,r(\varepsilon)\right)\right\}}{\sqrt[4]{\varepsilon}\,L_1\left((1+LT)\,L_1(1 + LT + L_1T)\right)^{1/2}}\right)^{\beta}\right\} +$$

$$+ \; C_3 \exp\left\{ -C_4 \left(\frac{\sqrt{\varphi_2(\varepsilon)} \exp\left\{ -LT - (L + LL_1T)\left(C_0T + \sqrt{\varepsilon}\, r(\varepsilon)\right) \right\}}{\sqrt[4]{\varepsilon}\left((1 + 2LL_1T + L_1T + L_1/T)(L + LL_1T)\right)^{1/2}} \right)^{\beta} \right\} +$$

$$+ \; 2C_5 \exp\{-C_6 (r(\varepsilon))^{\gamma}\}. \tag{16}$$

Поскольку для $\xi_0(t)$ справедливо представление

$$\xi_0(t) = \exp\left\{ \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\, ds \right\} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{ -\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} b(s, X_0(s))\, dw(s),$$

то

$$\tilde{\xi}^{(2)}_{\varepsilon}(t) - \xi_0(t) = \exp\left\{ \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\, ds \right\} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{ -\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} b(s, X_0(s))\, d[\tilde{\zeta}_{\varepsilon}(s) - w(s)] =$$

$$= \exp\left\{ \int_0^t a'_x(s, X_0(s))\, ds \right\} (\tilde{\zeta}_{\varepsilon}(t) - w(t)) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\int_0^t a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} b(t, X_0(t)) -$$

$$- \int_0^t (\tilde{\zeta}_{\varepsilon}(s) - w(s)) \exp\left\{ -\int_0^s a'_x(\tau, X_0(\tau))\, d\tau \right\} \times$$

$$\times \Big(-a'_x(s, X_0(s))\, b(s, X_0(s)) + b'_x(s, X_0(s))\, a(s, X_0(s)) \Big)\, ds.$$

Из последнего соотношения следует оценка

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \tilde{\xi}^{(2)}_{\varepsilon}(t) - \xi_0(t) \right| \le e^{2LT} \sup_{0 \le t \le T} |\tilde{\zeta}_{\varepsilon}(t) - w(t)| (L + (L + L_1)L_1 T).$$

Применив теорему 1, получим

$$p_3 = P\left\{ \sup_{0 \le t \le T} \left| \tilde{\xi}^{(2)}_{\varepsilon}(t) - \xi_0(t) \right| > \varphi_3(\varepsilon) \right\} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{3}{\varepsilon} C_1 \right) \exp\left(-\frac{C_2 \beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + C\left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{r/2 - 1} E\left| \int_0^1 \eta(s)\, ds \right|^r. \tag{17}$$

Очевидно,

$$P\left\{ \sup_{0 \le t \le T} \left| \tilde{\xi}_{\varepsilon}(t) - \xi_0(t) \right| > \varphi_1(\varepsilon) + 2\varphi_2(\varepsilon) + \varphi_3(\varepsilon) \right\} \le \sum_1^3 p_i.$$

Положим

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon) + 2\varphi_2(\varepsilon) + \varphi_3(\varepsilon),$$

$$S_1 = P\{f_1(t) - \varphi(\varepsilon) < \xi_\varepsilon(t) < f_2(t) + \varphi(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} + \sum_1^3 p_i,$$

$$S_2 = P\{f_1(t) + \varphi(\varepsilon) < \xi_\varepsilon(t) < f_2(t) - \varphi(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} - \sum_1^3 p_i.$$

Несложно установить, что $S_1 \ge Q_\varepsilon \ge S_2$, и, очевидно, $S_1 > Q_\varepsilon > S_2$. Тогда будем иметь

$$|Q_\varepsilon - Q_0| \le S_1 - S_2 \le 2\sum_1^3 p_i +$$

$$+ P\{f_1(t) - \varphi(\varepsilon) < \xi_0(t) < f_2(t) + \varphi(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} -$$

$$- P\{f_1(t) + \varphi(\varepsilon) < \xi_0(t) < f_2(t) - \varphi(\varepsilon),\ 0 \le t \le T\} \le$$

$$\le 2\sum_1^3 p_i + P\left\{-\varphi(\varepsilon) < \sup_{0\le t\le T}\left(\xi_0(t) - f_2(t)\right) < \varphi(\varepsilon)\right\} +$$

$$+ P\left\{-\varphi(\varepsilon) < \sup_{0\le t\le T}\left(f_1(t) - \xi_0(t)\right) < \varphi(\varepsilon)\right\} \le$$

$$\le 2\sum_1^3 p_i + 2\left(A + R\ln\sqrt{\left(\sum\nolimits_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\right)^{-1}}\right)\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon) + \left(\sum_1^3 \varphi_i(\varepsilon)\right)^{1/A_1} \tag{18}$$

где константы A, A_1, R не зависят от ε. При этом для оценки второго и третьего слагаемых в (10) мы сделали замену времени в компонентах стохастического интеграла $\int_0^t b(s, X_0(s))\,dw(s)$ и применили лемму из [8].

Подставив в соотношение (18) оценки для p_i, $i = \overline{1,3}$, (14), (16) и (17), получим необходимую оценку (10).

Замечание. Методы доказательств теорем 3 и 4 можно применить и в случае выполнения условий теоремы 2.

Работа выполнена в рамках программы № 8 Министерства образования Украины. Руководитель программы профессор Н. А. Перестюк.

1. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1970. – **15**, № 3. – С. 498–509.
2. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216 с.
3. *Утев С. А.* Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 5. – С. 205–209.
4. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарносвязанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
5. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1967. – 496 с.
6. *Веретенников А. Ю.* Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – **32**, № 2. – С. 299–302.
7. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под влиянием случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
8. *Воробьева И. Л.* О вероятности нахождения решения стохастического дифференциального уравнения в криволинейных границах // Марковские случайные процессы и их применение. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. – С. 14–24.

Получено 09.11.92