УДК 512.552.12

А. І. Гаталевич (Львів. нац. ун-т)

ПРАВЕ КІЛЬЦЕ БЕЗУ З ТАЛІЄЮ Є ПРАВИМ КІЛЬЦЕМ ЕРМІТА

We study noncommutative rings, in which the Jacobson radical contains a completely prime ideal. We prove that the right Bezout ring in which the Jacobson radical contains a completely prime ideal, is the right Hermite ring. We describe a new class of the Bezout rings that are not rings of elementary divisors.

Исследуются некоммутативные кольца, в которых радикал Джекобсона содержит вполне простой идеал. Доказано, что правое кольцо Безу, в котором радикал Джекобсона содержит вполне простой идеал, является правым кольцом Эрмита. Описан новый класс колец Безу, не являющихся кольцами элементарных делителей.

У роботі [1] показано, що комутативне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить простий ідеал, є кільцем Ерміта. В даний час активно досліджуються так звані „кільця з талією", а саме, некомутативні кільця, в яких радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал. У даній роботі доведено, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал, є правим кільцем Ерміта. Також показано, що дистрибутивне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал, до того ж інших двобічних ідеалів, окрім тривіальних, в кільці не існує, не є кільцем елементарних дільників.

Під кільцем у даній роботі будемо розуміти асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Праве кільце Безу — це кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним. Матриця A над кільцем R має канонічну діагональну редукцію, якщо існують такі зворотні матриці P і Q над R відповідних розмірів, що $PAQ = D$, діагональна матриця $D = (d_{ij},)$, до того ж $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq d_{ii}R \cap Rd_{ii}$ [2]. Якщо над кільцем R довільна матриця має канонічну діагональну редукцію, то кільце R називають кільцем елементарних дільників. Якщо над кільцем R довільна $(1 \times \times 2)$-матриця має канонічну діагональну редукцію, то кільце R називають правим кільцем Ерміта [2].

Рядок $(a_1, \ldots, a_n)$, де $a_i \in R$, називається унімодулярним, якщо $a_1R + \ldots \ldots + a_nR = R$. Кільце R має стабільний ранг n (позначають ст. р.$(R) = n$), якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ над R існують такі елементи $b_1, \ldots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним. При цьому таке число n є найменшим з усіх можливих [3].

Через $J(R)$ будемо позначати радикал Джекобсона кільця R.

Теорема 1. *Нехай R — праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал. Тоді R — праве кільце Ерміта.*

Доведення. Нехай P — такий цілком простий ідеал кільця R, що $P \subseteq J(R)$. Зауважимо, що якщо $P = 0$, то R — область Безу. А згідно з [4] R — праве кільце Ерміта.

Спочатку покажемо, що довільний унімодулярний рядок над кільцем R може бути доповнений до унімодулярної матриці.

Розглянемо фактор-кільце $\overline{R} = R/P$, і нехай для елементів $a, b \in R$ виконується умова $aR + bR = R$. Тоді $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$.

Оскільки $\overline{R}$ — область Безу, то R — праве кільце Ерміта, а отже, згідно з [5] рядок $(\overline{a}, \overline{b})$ над кільцем $\overline{R}$ можна доповнити до оборотної матриці

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{C} \cdot \overline{A} = \overline{I}, \tag{1}$$

де $\overline{I}$ — одинична матриця над кільцем $\overline{R}$, а матриця $\overline{C}$ має вигляд $\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} \\ \overline{z} & \overline{u} \end{pmatrix}$.

Тоді згідно з (1) отримуємо

$$ax + bz = 1 + p_1, \quad ay + bu = p_2, \quad cx + dz = p_3, \quad cy + du = 1 + p_4$$

для деяких елементів $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$. Оскільки $P \subseteq J(R)$, то елементи $1 + p_1$ і $1 + p_2$ є оборотними. А отже, існує така унімодулярна матриця W, що $ACW = I$. Аналогічно встановлюємо, що $VCA = I$ для деякої матриці V. Отже, A — унімодулярна матриця, що і потрібно було довести.

Далі покажемо, що ст. р.$(R/P) = 2$.

Справді, нехай $\overline{R} = R/P$ і $aR + bR + cR = R$ для елементів $a, b, c \in R$. Тоді $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки R/P — праве кільце Ерміта, то згідно з [5] ст. р.$(R/P) = 2$. Отже, існують такі елементи $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$, що

$$(\overline{a} + \overline{cx})\overline{R} + (\overline{b} + \overline{cy})\overline{R} = \overline{R}.$$

Звідси

$$(a + cx)u + (b + cy)v = 1 + p, p \in P \subseteq J(R).$$

А оскільки $1 + p \in U(R)$, то $(a + cx)R + (b + cy)R = R$, тобто ст. р.$(R) = 2$.

Далі покажемо, що саме кільце R є правим кільцем Ерміта.

Нехай для довільних елементів $a, b \in R$ існує такий елемент $d \in R$, що $aR + bR = dR$. Тоді $a = da_0, b = db_0, d = au + bv$ для деяких елементів $a_0, b_0, u, v \in R$. Звідси $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$ та $a_0R + b_0R + c_0R = R$ для деякого такого елемента $c_0 \in R$, що $dc_0 = 0$.

Оскільки ст. р.$(R) = 2$, то $(a_0 + c_0x)R + (b_0 + c_0y)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$.

Враховуючи доведене вище, легко бачити, що існує унімодулярна матриця вигляду

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + c_0x & b_0 + c_0y \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(d, 0)P = (a, b)$, а звідси і $(a, b)P^{-1} = (d, 0)$. Тобто R є правим кільцем Ерміта, що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

З доведеної теореми і того факту, що стабільний ранг правого кільця Ерміта не перевищує 2 [5], одержуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай R — праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал. Тоді ст. р.$(R) = 2$.*

Теорема 2. *Нехай R — дистрибутивне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона містить цілком простий ідеал, до того ж інших двобічних ідеалів у кільці R не існує. Тоді R не є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Припустимо, що R є кільцем елементарних дільників і $a \in I \backslash \{0\}$, де I — цілком простий ідеал, що належить радикалу Джекобсона $J(R)$. Тоді матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ має діагональну редукцію. Тому існують такі зворотні матриці $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}) P, Q \in GL_2(R)$, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $z, b \in R$ і $Rz \cap zR \supseteq RbR$.

Зауважимо, що згідно з рівністю (2) $RaR = RbR + RzR = RzR$.

Можливі такі випадки:

1) $RbR = \{0\}$;

2) $RbR = I$;

3) $RbR = J(R)$;

4) $RbR = R$.

Оскільки $RaR \supseteq RbR$ і $a \in P$, випадки 3, 4 неможливі.

Якщо ж $RbR = \{0\}$, то тоді $b = 0$.

Запишемо рівність (2) у вигляді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Тоді $ap_{12} = 0, ap_{22} = 0$. Оскільки $Rp_{12} + Rp_{22} = R$ і R є дистрибутивним кільцем, то згідно з [6] одержуємо $p_{12}R + p_{22}R = R$ і $p_{12}u + p_{22}v = 1$. Звідси $ap_{12}u + ap_{22}v = a \cdot 1 = 0$, що неможливо, оскільки $a \in I \setminus \{0\}$.

Отже, $RbR = I$.

З огляду на те, що $a \in I \setminus \{0\}$, маємо $RaR = I$, а оскільки $RaR = RzR$ і $Rz \cap zR \supseteq RbR$, то це можливо лише у випадку, коли $RzR = zR = Rz = I$.

Розглянемо ідеал z^2R. Оскільки $z^2R \subset zR = I$, то $zR = z^2R$, тобто $z = z^2u$ для деякого $u \in R$. Звідси $z(1 - zu) = 0$.

Оскільки $RzR = I \subseteq J(R)$, то $1 - zu \in U(R)$ і $z = 0$, що суперечить умові $RzR = RaR = I$.

Теорему доведено.

1. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231 – 248.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules // Ibid. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
3. *Vaserstein Z. N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Funct. Anal. and Appl. – 1971. – **5**. – P. 102 – 110.
4. *Amitsur S. A.* Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. – 1963. – **15**. – P. 59 – 69.
5. *Zabasky B. V.* Diagonalizabity theorem for matrices over rings with finite stable range // Alg. Discr. Math. – 2005. – **1**. – P. 134 – 148.
6. *Brungs H. H.* Rings with distributative lattice of right ideals // J. Algebra. – 1976. – **40**. – P. 392 – 400.

Одержано 22.06.09