УДК 517.349

О. И. Кузнецова, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов Фурье

Доказана сильная суммируемость Карлемана рядов Фурье непрерывных на m-мерном торе функций, частичные суммы которых построены по полиэдрам некоторого класса.

Доведена сильна сумовність Карлемана рядів Фур'є неперервних на m-вимірному торі функцій, часткові суми яких побудовані за поліедрами деякого класу.

В настоящей статье изучается поведение частичных сумм Фурье, построенных по полиэдрам некоторого класса, непрерывных на m-мерном торе $T^m = [-\pi, \pi)^m$ функций.

Пусть V — полиэдр в R^m, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой, такой, что продолжения всех его граней не проходят через начало координат. Предположим также, что коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей, определяющих грани полиэдра, являются алгебраическими числами; W — множество полиэдров с указанными свойствами;

$$S_{nV}(f, x) = \sum_{k \in nV \cap Z^m} c_k(f) e^{ikx} \tag{1}$$

— n-я частичная сумма ряда Фурье функции f, построенная по полиэдру V ($c_k(f)$ — k-й коэффициент Фурье функции f, Z^m — целочисленная решетка в R^m, $nV = \{x \in R^m, x/n \in V\}$ — гомотетет V).

Функция ψ, определенная на полуоси $(0, \infty)$, принадлежит классу Ψ, если она положительна, не убывает и

$$\lim_{u \to 0} \psi(u) = \psi(0) = 0.$$

Следуя [1], полагаем

$$h_n(f, \psi, V, x) = (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \psi(|f(x) - S_{lV}(f, x)|).$$

Легко показать (см., например, [2]), что если $\varphi, \psi \in \Psi$ и

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} < \infty,$$

то из равенства

$$\lim_{n \to \infty} h_n(f, \psi, V, x) = 0, \tag{2}$$

выполняемого в некоторой точке $x_0 \in T^m$ или равномерно на множестве $E \subset T^m$, вытекает справедливость аналогичного равенства для функции φ соответственно в точке x_0 или равномерно на E. Поэтому достаточно рассматривать функции вида $e^{\varphi} - 1$, $\varphi \in \Psi$.

При $m = 1$, $\varphi(x) = ax$, $a > 0$, равенство (2) доказано Карлеманом [3].

Теорема 1. *Пусть полиэдр $V \in W$.* I. *Если $\varphi \in \Psi$ такова, что*

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} \varphi(u) u^{-1/m} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^m)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, x) = 0.$$

II. *Если же*

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} \varphi(u) u^{-1/m} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^m)$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} h_n(F, \exp(\varphi)-1, V, 0) = \infty.$$

Для случая, когда V — параллелепипед с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, эта теорема доказана Л. Д. Гоголадзе [1], в общем случае — она анонсирована в [4].

Заметим, что вторая часть теоремы справедлива для любого полиэдра V, $\operatorname{int} V \ni 0$, и следует из оценки нормы оператора взятия частичной суммы (см., например, [5])

$$\| S_{nV} \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \| S_{nV}(f) \|_{C(T^m)} \geqslant c \ln^m n.$$

Для доказательства первой части теоремы нам понадобятся следующие результаты.

Лемма. *Для любого полиэдра $V \in W$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что при любом $n \in N$ множества $(n + dn^{-m-1})V \setminus nV$ не содержат точек решетки Z^m.*

В самом деле, пусть $\Gamma = \{x \in R^m, \Sigma\alpha_i x_i = 1\}$ — одна из гиперплоскостей, определяющих полиэдр V. Из теоремы о совместных приближениях алгебраических чисел [6, с. 118] следует, что либо $\Sigma\alpha_i k_i - n = 0$ для некоторых $k \in Z^m$ и $n \in N$, либо существует постоянная c_Γ такая, что для любых $k \in Z^m$, $n \in N$

$$|\Sigma\alpha_i k_i - n| \geqslant c_\Gamma q^{-m-1},$$

где $q = \max\limits_i |k_i|$. Для $k \in (n+1)V \setminus nV$ $q \leqslant c_1 n$. Поскольку расстояние от точки k до грани $n\Gamma$ равно $|\Sigma\alpha_i k_i - n| (\Sigma\alpha_i^2)^{-1/2}$, полагаем

$$d = c_1^{-m-1} \min_\Gamma c_\Gamma (\Sigma\alpha_i^2)^{-1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть полиэдр $V \in W$. Для любых $p > 0$ и $f \in L_\infty(T^m)$*

$$(n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} |S_{lV}(f, 0)|^p \leqslant c^p (p+1)^{mp} \| f \|_\infty^p, \tag{3}$$

где $c = c(m, V)$ — некоторая постоянная, не зависящая от f, n и p ($\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup} |f|$).

Отметим, что для параллелепипедов с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, это утверждение приведено в [7].

Доказательство. 1. $p \geqslant 1$. В этом случае

$$I \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f\| \leqslant 1} (n+1)^{-1/p} \left(\sum_{l=0}^{n} |S_{lV}(f, 0)|^p \right)^{1/p} = (n+1)^{-1/p} \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_{\varepsilon} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l S_{lV}(f, 0) \right|,$$

где ε_l, $0 \leqslant l \leqslant n$,— любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{l=0}^{n} |\varepsilon_l|^q \leqslant 1 \quad \text{при } p > 1, \ q = \frac{p}{p-1},$$

$$|\varepsilon_l| \leqslant 1 \quad \text{при } p = 1.$$

Заметив, что $c_k(f) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{T^m} f(x) e^{-ikx} dx$, внесем сумму в (1) под знак интеграла и возьмем sup по f; имеем

$$I = (n+1)^{-1/p} \sup_{\varepsilon} \int\limits_{T^m} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l \sum_{k \in lV \cap Z^m} e^{ikx} \right| dx.$$

Положим

$$\lambda_l = (n+1)^{-1/p} \sum_{j=l}^{n} \varepsilon_j, \quad 0 \leqslant l \leqslant n, \ \lambda_{n+1} = 0.$$

Тогда

$$I = \sup_{\varepsilon} \int_{T^m} \Big| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} \Big| dx.$$

Легко показать, что

$$\sum_{l=0}^{n} |\lambda_l - \lambda_{l+1}| \leqslant 1 \tag{4}$$

и для любых $s, l, 1 \leqslant s \leqslant n+1, 0 \leqslant l \leqslant n+1-s$,

$$|\lambda_l - \lambda_{l+s}| \leqslant \left(\frac{s}{n+1}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Исходя из последовательности λ_l, построим непрерывную на отрезке [0, 1] функцию λ. Пусть $d > 0$ — постоянная из леммы. Определим на отрезке $[0, 1 + dn^{-m-2}]$ функцию $\tilde{\lambda}$ следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda_l \ \text{при} \ \frac{l-1+dn^{-m-1}}{n} \leqslant t \leqslant \frac{l}{n}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

$$\tilde{\lambda}(0) = \lambda_0, \quad \tilde{\lambda}(1 + dn^{-m-2}) = 0$$

и линейна на оставшихся промежутках. Положим теперь

$$\lambda\left(\frac{t}{1 + dn^{-m-2}}\right) = \tilde{\lambda}(t).$$

Пусть $\rho(y) = \rho_V(y) = \inf\{\rho > 0, \ y \in \rho V\}$. Тогда

$$\int_{T^m} \Big| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} \Big| dx = \int_{T^m} \Big| \sum_{k \in nV} \tilde{\lambda}\left(\frac{\rho(k)}{n}\right) e^{ikx} \Big| dx =$$

$$= \int_{T^m} \Big| \sum_{k \in nV} \lambda\left(\frac{\rho(k)}{n + dn^{-m-1}}\right) e^{ikx} \Big| dx.$$

Оценка последнего интеграла для непрерывной функции λ, $\lambda(1) = 0$, проведена в [8]. Из нее следует

$$I \leqslant c(m, V) \sup_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{d\lambda}(r)| \frac{\ln^{m-1}(2 + |r|)}{1 + |r|} dr, \tag{6}$$

где $\widehat{d\lambda}(r) = \int_0^1 e^{-irt} d\lambda(t)$ — преобразование Фурье $d\lambda$. Если перейти в (6) от функции λ к функции $\mu(t) = \lambda(t) + \lambda(0)(t-1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то нетрудно показать, что

$$I \leqslant c_1(m, V) \sup_{\varepsilon} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(r)| \ln^{m-1}(2 + |r|) dr + 1 \right]. \tag{7}$$

По построению в силу (4), (5) μ — функция ограниченной вариации, $V(\mu) \leqslant 2$, кроме того, $\mu \in \mathrm{Lip}\, \frac{1}{p(m+2)}$ с константой, не зависящей от n. Оценивая интеграл в (7) аналогично тому, как это сделано при доказательстве следствия 2 из [9], получаем

$$I \leqslant c_2(m, V) \Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} 2^{j/2} \| \mu(t + 2^{-j-2}) -$$

$$-\mu(t-2^{-j-2})\|_C\|\mu(t+2^{-j-2})-\mu(t-2^{-j-2})\|_L]=$$

$$=O(1)+O(1)\sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1}\, 2^{-\frac{j}{2(m+2)p}}=O(p^m),$$

что и требовалось доказать.

2. $0<p<1$. Применим неравенство Иенсена

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}|S_{lV}(f,\ 0)|^p\right)^{1/p}\leqslant(n+1)^{-1}\sum_{l=0}^{n}|S_{lV}(f,\ 0)|.$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $E_{nV}(f)=\inf\limits_{T}\|f-T\|_{C(T^m)}$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром в nV.

Теорема 3. *Для любых $f\in C(T^m)$, $V\in W$, $p>0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{l=n_0}^{n}|f(x)-S_{lV}(f,\ x)|^p\leqslant c^p(p+1)^{mp}\sum_{l=[n_0/2]}^{n}E_{lV}^p(f), \tag{8}$$

$$n,\ n_0=1,\ 2,\ \dots,\ c=c(m,\ V).$$

Оценки вида (8) известны, поэтому приведем лишь схему доказательства. Пусть n_0, n заданы. Выберем q, r так, чтобы $2^{q-1}\leqslant n_0<2^q$, $2^r\leqslant n<2^{r+1}$. Тогда

$$\sum_{l=n_0}^{n}|f-S_{lV}(f)|^p=\left(\sum_{l=n_0}^{2^q-1}+\sum_{j=q}^{r-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}+\sum_{l=2^r}^{n}\right)|f-S_{lV}(f)|^p.$$

Оценим среднюю сумму. Пусть $\tilde{T}_j$ — полином наилучшего приближения со спектром в 2^jV, т. е. $\|f-\tilde{T}_j\|=E_{2^jV}(f)$. Тогда

$$\sum_{j=q}^{r-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}|f-S_{lV}(f)|^p\leqslant 2^p\sum_{j=q}^{r-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}(|f-\tilde{T}_j|^p+|S_{lV}(f-\tilde{T}_j)|^p)\leqslant$$

$$\leqslant c^p(p+1)^{mp}\sum_{j=q}^{r-1}2^jE_{2^jV}^p(f)\leqslant c^p(p+1)^{mp}\sum_{l=2^{q-1}}^{2^{r-1}-1}E_{lV}^p(f).$$

Здесь мы воспользовались неравенством (3) и монотонностью $E_{lV}(f)$. Оставшиеся суммы оцениваются аналогично.

Доказательство теоремы 1. I. В силу сделанного в начале статьи замечания теорему достаточно доказать для функции $\exp(u^{1/m})-1$. Пусть $n_0\in N$, $n_0<n$;

$$(n+1)^{-1}\sum_{l=n_0}^{n}\exp(|f(x)-S_{lV}(f,\ x)|^{1/m})-1=$$

$$=(n+1)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{l=n_0}^{n}|f(x)-S_{lV}(f,\ x)|^{s/m}\leqslant$$

$$\leqslant(n+1)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_1^s}{s!}\left(\frac{s}{m}+1\right)^s\sum_{l=[n_0/2]}^{n}E_{lV}^{s/m}(f)\leqslant$$

$$\leqslant(n+1)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=[n_0/2]}^{n}(c_2E_{lV}^{1/m})^s.$$

Выбирая n_0 достаточно большим и устремляя n к ∞, получаем искомый результат.

Замечание. Арифметические условия на границу полиэдра можно ослабить. Они используются лишь в теореме 2 при построении функции λ, для которой интеграл (7) есть $O(p^m)$. Вопрос, можно ли доказать теорему 1 в общем случае, остается открытым.

1. *Гоголадзе Л. Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Тбилиси, 1984.— 256 с.
2. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости почти всюду // Мат. сб.— 1988.— **135**, № 2.— С. 158—168.
3. *Carleman T.* A theorem concerning Fourier series // Proc. London Math. Soc.—1923.—**21**.— P. 483—492.
4. *Кузнецова О. И.* О сильной суммируемости кратных рядов Фурье // Докл. расшир. заседаний сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.—1988.—3, № 2.—С. 65—68.
5. *Подкорытов А. Н.* Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1982.— № 7.— С. 110—111.
6. *Шмидт В.* Диофантовы приближения.— М. : Мир, 1983.— 232 с.
7. *Гоголадзе Л. Д.* О сильных средних типа Марцинкевича // Сообщ. АН ГССР.— 1981.— **102**, № 2.— С. 293—295.
8. *Подкорытов А. Н.* Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1980.— № 1.— С. 51—58.
9. *Подкорытов А. Н.* О суммировании кратных рядов Фурье.— Л., 1978.— 11 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3066—78.

Получено 09.10.91

УДК 517.95

В. В. Курта, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О поведении решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях

Сформулированы аналоги известной в теории аналитических функций теоремы Фрагмена — Линделефа для решений широкого класса квазилинейных уравнений эллиптического типа. Приведены примеры, иллюстрирующие точность полученных результатов для решений уравнения вида $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u)$, где $f(x, u)$ — локально ограниченная в $\mathbb{R}^{n+1}$ функция,

$$f(x, 0) = 0,\ uf(x, u) \geqslant a\,|u|^{1+q},\ a > 0,\ \alpha > 1,\ \alpha - 1 > q \geqslant 0,\ n \geqslant 2.$$

Сформульовані аналоги відомої в теорії аналітичних функцій теореми Фрагмена — Ліндельофа для розв'язків широкого класу квазілінійних рівнянь еліптичного типу. Наведені приклади, що ілюструють точність одержаних результатів для розв'язків рівняння вигляду $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u)$, де $f(x, u)$ — локально обмежена в $\mathbb{R}^{n+1}$ функція,

$$f(x, 0) = 0,\ uf(x, u) \geqslant a\,|u|^{1+q},\ a > 0,\ \alpha > 1,\ \alpha - 1 > q \geqslant 0,\ n \geqslant 2.$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $A_i(x, \eta, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— измеримые локально ограниченные функции, определенные на множестве $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такие, что

$$(\xi A) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x, \eta, \xi) \geqslant 0. \tag{1}$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, u, \nabla u). \tag{2}$$