УДК 519.21

Г. В. Рябов (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

ФИНИТНАЯ АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ГАУССОВСКИХ МЕР НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

A notion of finite absolute continuity for measures on infinite-dimensional spaces is studied. For Gaussian product-measures on $\mathbb{R}^\infty$ and Gaussian measures on a Hilbert space, criteria for the finite absolute continuity are obtained. Some cases are considered, where the condition of the finite absolute continuity of the Gaussian measures means the equivalence of these measures.

Вивчається поняття фінітної абсолютної неперервності для мір на нескінченновимірних просторах. Для гауссівських продакт-мір на $\mathbb{R}^\infty$ та гауссівських мір на гільбертовому просторі отримано критерії фінітної абсолютної неперервності. Розглянуто випадки, коли умова фінітної абсолютної неперервності гауссівських мір рівносильна умові їх еквівалентності.

1. Введение. Абсолютная непрерывность мер на бесконечномерных пространствах изучалась многими авторами. Для некоторых видов мер удалось получить критерии абсолютной непрерывности. В случае продакт-мер на $\mathbb{R}^\infty$ таким критерием является теорема Какутани [1, 2]. Для гауссовских мер на банаховом пространстве критерий абсолютной непрерывности дается теоремой Гаека – Фельдмана [1, 2]. В работе [3] введено понятие финитной абсолютной непрерывности, представляющее собой некоторую альтернативу понятию абсолютной непрерывности. В этой работе доказано, что условие финитной абсолютной непрерывности меры ν относительно меры μ, которое слабее, чем условие существования квадратично интегрируемой плотности ν относительно μ, достаточно для существования разложения Ито – Винера меры ν относительно меры μ. Приведем соответствующее определение. Пусть L — линейное топологическое пространство, μ и ν — вероятностные меры на σ-алгебре борелевских подмножеств L, имеющие слабые моменты всех порядков, $\mathcal{P}_n$ — семейство всех многочленов на L степени не выше n.

Определение [3]. *Мера* ν *называется финитно абсолютно непрерывной относительно* μ, *если*

$$\forall\, n \geq 0 \quad \exists\, C_n > 0 \quad \forall\, Q(u) \in \mathcal{P}_n :$$

$$\left|\int Q(u)\nu(du)\right| \leq C_n\left(\int Q^2(u)\mu(du)\right)^{1/2}$$

(*обозначаем* $\nu <<_0 \mu$).

Замечания. **1.** Определение имеет смысл только в случае $\dim L = +\infty$, так как если $\dim L < +\infty$ и мера μ такова, что из равенства $Q = 0 \pmod{\mu}$ следует равенство $Q \equiv 0$ для любого многочлена Q, то любая мера ν, имеющая все моменты, будет финитно абсолютно непрерывной относительно μ.

2. Если $\nu \ll \mu$ и плотность $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ интегрируема с квадратом по мере μ, то $\nu \ll_0 \mu$ и последовательность $\{C_n;\, n \geq 0\}$ можно выбрать ограниченной (по поводу замечаний 1 и 2 см. [3]).

3. Финитная абсолютная непрерывность сохраняется при сдвигах: если $a \in$

* Выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (проект GP\F13\0095).

$\in L$, $f_a(u) = u + a$ — сдвиг на вектор a, $\mu_a = \mu \circ f_a^{-1}$, $\nu_a = \nu \circ f_a^{-1}$ — образы мер μ и ν при сдвиге a, то $\nu \ll_0 \mu$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $a \in L$ $\nu_a \ll_0 \mu_a$. Действительно, пусть $\nu \ll_0 \mu$ и $Q(u) \in \mathcal{P}_n$ — многочлен степени не выше n. Тогда $Q(u-a) \in \mathcal{P}_n$ и

$$\left|\int Q(u)\nu_a(du)\right| = \left|\int Q(u-a)\nu(du)\right| \le$$

$$\le C_n\left(\int Q^2(u-a)\mu(du)\right)^{1/2} = C_n\left(\int Q^2(u)\mu_a(du)\right)^{1/2}.$$

В настоящей статье исследуется связь между финитной абсолютной непрерывностью и абсолютной непрерывностью гауссовских мер на некоторых бесконечномерных пространствах и приводятся критерии финитной абсолютной непрерывности гауссовских мер на этих пространствах.

2. Финитная абсолютная непрерывность продакт-мер. Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ пространство всех последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с ограниченной метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Пусть $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ — последовательности вероятностных мер на $\mathbb{R}$, $\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k$, $\nu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \nu_k$ — продакт-меры на $\mathbb{R}^\infty$, имеющие все моменты (т. е. для всех $k \ge 1$ меры μ_k и ν_k имеют все моменты). Обозначим

$$M(m;\mu_k) = \int_{\mathbb{R}} u^m \mu_k(du),$$

$$D(m;\mu_k) = M(2m;\mu_k) - M(m;\mu_k)^2, \qquad m \ge 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $\nu \ll_0 \mu$. *Тогда*

$$\forall\, m \ge 1: \quad \sum_{\substack{k=1 \\ D(m;\mu_k) \ne 0}}^{\infty} \frac{(M(m;\mu_k) - M(m;\nu_k))^2}{D(m;\mu_k)} < +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим $Q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^m$, $Q(x) \in \mathcal{P}_m$. Тогда

$$\left(\int Q(x)\nu(dx)\right)^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 M(m;\nu_k)^2 +$$

$$+ 2a_0 \sum_{k=1}^{n} a_k M(m;\nu_k) + 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k<j}}^{n} a_k a_j M(m;\nu_k) M(m;\nu_j), \tag{1}$$

$$\int Q^2(x)\mu(dx) = a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 M(2m;\mu_k) +$$

$$+\ 2a_0\sum_{k=1}^{n}a_kM(m;\mu_k)\ +\ 2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n}a_ka_jM(m;\mu_k)M(m;\mu_j). \qquad (2)$$

Из условия $\nu \ll_0 \mu$ следует, что

$$\exists\, C_m>0 \quad \forall\, Q(x)\ge \mathcal{P}_m: \quad \left(\int Q(x)\nu(dx)\right)^2 \le C_m\int Q^2(x)\mu(dx). \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), для всех $n\ge 1$ и всех действительных $a_0,\ldots,a_n$ получаем

$$a_0^2(C_m-1)+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big(C_mM(2m;\mu_k)-M(m;\nu_k)^2\Big)+$$

$$+\ 2a_0\sum_{k=1}^{n}a_k^2\big(C_mM(m;\mu_k)-M(m;\nu_k)\big)+$$

$$+\ 2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n}a_ka_j\Big(C_mM(m;\mu_k)M(m;\mu_j)-M(m;\nu_k)M(m;\nu_j)\Big)\ \ge\ 0.$$

Поэтому для каждого $n\ge 1$ матрица

$$A_n=\{a_{ij}^{(n)}\}_{i,j=0}^{n},$$

где

$$a_{00}^{(n)}=C_m-1,$$

$$a_{0j}^{(n)}=a_{j0}^{(n)}=C_mM(m;\mu_j)-M(m;\nu_j),\quad j=\overline{1,n},$$

$$a_{ii}^{(n)}=C_mM(2m;\mu_i)-M(m;\nu_i)^2,\quad i=\overline{1,n},$$

$$a_{ij}^{(n)}=a_{ji}^{(n)}=C_mM(m;\mu_i)M(m;\mu_j)-M(m;\nu_i)M(m;\nu_j),\quad i,j=\overline{1,n},\quad i<j,$$

будет неотрицательно определенной. Следовательно, для каждого $n\ge 1$ $\det A_n\ge 0$. Каждый столбец в матрице A_n есть разность двух столбцов. Раскладывая $\det A_n$ в сумму определителей по всем столбцам, имеем

$$\det A_n=\left(\prod_{k=1}^{n}D(m;\mu_k)\right)C_m^{n+1}-$$

$$-\ C_m^n\left(\prod_{k=1}^{n}D(m;\mu_k)+\sum_{k=1}^{n}\big(M(m;\mu_k)-M(m;\nu_k)\big)^2\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}D(m;\mu_j)\right)\ \ge\ 0.$$

Если рассматривать многочлен $Q(x)=a_0+\sum\limits_{\substack{k=1\\D(m;\mu_k)\ne 0}}^{n}a_kx_k^m$, то

$$\forall\, n\ge 1:\qquad C_m\ \ge\ 1+\sum_{\substack{k=1\\D(m;\mu_k)\ne 0}}^{n}\frac{\big(M(m;\mu_k)-M(m;\nu_k)\big)^2}{D(m;\mu_k)},$$

что и доказывает теорему.

***Замечание* 4.** Пусть $\nu \ll_0 \mu$ и для некоторого k $D(1;\mu_k) = 0$, т. е. $\mu_k = \delta_{M(1;\mu_k)}$. В этом случае $\nu_k = \mu_k$. Действительно, предположим, что $\nu_k\{M(1;\mu_k)\} < 1$, и рассмотрим одномерный многочлен $Q(x) = Q(x_k) = (x_k - M(1;\mu_k))^2$. Тогда

$$\int Q^2(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} Q^2(x_k)\mu_k(dx_k) = Q^2(M(1;\mu_k)) = 0.$$

Из условия $\nu \ll_0 \mu$ следует, что $\int Q(x)\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}} Q(x_k)\nu_k(dx_k) = 0$, что невозможно, поскольку $Q(x_k) > 0$ на множестве $\mathbb{R}\setminus\{M(1;\mu_k)\}$ положительной меры ν_k.

Из замечания 1 к определению финитной абсолютной непрерывности следует, что на $\mathbb{R}$ можно построить такие взаимно сингулярные меры μ и ν, что $\nu \ll_0 \mu$ и $\mu \ll_0 \nu$. Приведем пример эквивалентных мер μ и ν на $\mathbb{R}^\infty$ таких, что $\nu \not\ll_0 \mu$ и $\mu \not\ll_0 \nu$.

Пример. Пусть $\{p_k;\, k \ge 1\}$ и $\{p'_k;\, k \ge 1\}$ — две последовательности действительных чисел, таких, что для всех $k \ge 1$ $0 < p_k < 1$, $0 < p'_k < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p'_k < +\infty.$$

Пусть $q_k = 1 - p_k$, $q'_k = 1 - p'_k$, $k \ge 1$,

$$\mu_{2k-1} = p_k\delta_0 + q_k\delta_1, \qquad \mu_{2k} = p'_k\delta_0 + q'_k\delta_1,$$
$$\nu_{2k-1} = p'_k\delta_0 + q'_k\delta_1, \qquad \nu_{2k} = p_k\delta_0 + q_k\delta_1$$

— вероятностные меры на $\mathbb{R}$ и для всех $m \ge 1$ $\mu_m \sim \nu_m$,

$$\frac{d\nu_{2k-1}}{d\mu_{2k-1}}(x) = \frac{p'_k}{p_k}\mathbb{1}_0(x) + \frac{q'_k}{q_k}\mathbb{1}_1(x),$$

$$\frac{d\nu_{2k}}{d\mu_{2k}}(x) = \frac{p_k}{p'_k}\mathbb{1}_0(x) + \frac{q_k}{q'_k}\mathbb{1}_1(x), \qquad k \ge 1.$$

Рассмотрим $\mu = \bigotimes_{m=1}^{\infty}\mu_m$ и $\nu = \bigotimes_{m=1}^{\infty}\nu_m$ — вероятностные продакт-меры на $\mathbb{R}^\infty$. Покажем, что $\mu \sim \nu$. По теореме Какутани [1, 2], для этого надо установить, что сходится бесконечное произведение $\prod_{m=1}^{\infty} H(\mu_m, \nu_m)$, где $H(\mu_m, \nu_m)$ — интеграл Хеллингера, который вычисляется по формуле

$$H(\mu_m, \nu_m) = \int \sqrt{\frac{d\mu_m}{d\lambda}(x)}\sqrt{\frac{d\nu_m}{d\lambda}(x)}\,\lambda(dx),$$

λ — такая вероятностная мера, что $\mu_m << \lambda$ и $\nu_m << \lambda$. В данном случае

$$H(\mu_m, \nu_m) = \int \sqrt{\frac{d\nu_m}{d\mu_m}(x)}\,\mu_m(dx),$$

$$H(\mu_{2k-1}, \nu_{2k-1}) = H(\mu_{2k}, \nu_{2k}) = \sqrt{p_k p'_k} + \sqrt{q_k q'_k}.$$

Тогда

$$\prod_{m=1}^{\infty} H(\mu_m, \nu_m) = \prod_{k=1}^{\infty} H(\mu_{2k-1}, \nu_{2k-1}) H(\mu_{2k}, \nu_{2k}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_k p_k'} + \sqrt{q_k q_k'}\right)^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_k p_k'} + \sqrt{(1-p_k)(1-p_k')}\right)^2 =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + 2 p_k p_k' - p_k - p_k' + 2\sqrt{p_k p_k'}\sqrt{q_k q_k'}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\sqrt{p_k q_k'} - \sqrt{p_k' q_k}\right)^2\right).$$

Последнее произведение сходится, так как из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_k q_k'} - \sqrt{p_k' q_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k q_k' + p_k' q_k - 2\sqrt{p_k p_k'}\sqrt{q_k q_k'}\right).$$

Поэтому $\mu \sim \nu$.

Если $\nu \ll_0 \mu$, то согласно теореме 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(p_k - p_k')^2}{p_k q_k} + \frac{(p_k - p_k')^2}{p_k' q_k'} \right) < +\infty. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\int \left(\frac{d\nu}{d\mu}(x)\right)^2 \mu(dx) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\nu_{2k-1}}{d\mu_{2k-1}}(x)\right)^2 \mu_{2k-1}(dx) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\nu_{2k}}{d\mu_{2k}}(x)\right)^2 \mu_{2k}(dx) \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p_k'^2}{p_k} + \frac{q_k'^2}{q_k} \right) \left(\frac{p_k^2}{p_k'} + \frac{q_k^2}{q_k'} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(p_k - p_k')^2}{p_k q_k} \right) \left(1 + \frac{(p_k - p_k')^2}{p_k' q_k'} \right).$$

Таким образом, $\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ и $\nu \ll_0 \mu$ тогда и только тогда, когда выполняется (4).

Аналогично проверяется, что $\mu \ll_0 \nu$ тогда и только тогда, когда выполняется (4). Подбирая последовательности $\{p_k;\, k \ge 1\}$ и $\{p_k';\, k \ge 1\}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k' < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(p_k-p'_k)^2}{p_k q_k}+\frac{(p_k-p'_k)^2}{p'_k q'_k}\right) = +\infty$$

(например, $p_k = 1/k^4$, $p'_k = 1/k^2$), получаем примеры мер μ и ν на $\mathbb{R}^\infty$ таких, что $\mu \sim \nu$ и $\nu \not\ll_0 \mu$, $\mu \not\ll_0 \nu$.

Далее будем рассматривать гауссовские продакт-меры на $\mathbb{R}^\infty$ и гауссовские меры на гильбертовом пространстве. В этих случаях меры либо эквивалентны, либо сингулярны, а в случае эквивалентности плотность интегрируема с квадратом. Таким образом, в случае гауссовских мер μ и ν из эквивалентности $\nu \sim \mu$ следует финитная абсолютная непрерывность $\nu \ll_0 \mu$.

3. Гауссовские продакт-меры на $\mathbb{R}^\infty$. Пусть $\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty}\mu_k$, $\nu = \bigotimes_{k=1}^{\infty}\nu_k$ — гауссовские продакт-меры на $\mathbb{R}$:

$$\mu_k \sim N(a_k, t_k), \qquad \nu_k \sim N(b_k, s_k).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mu_k \sim \nu_k$ *для всех* $k \geq 1$. *Тогда* $\nu \ll_0 \mu$ *в том и только в том случае, когда* $\nu \sim \mu$.

Доказательство. Предположим, что $\nu \ll_0 \mu$. Докажем эквивалентность мер μ' и ν', полученных из μ и ν сдвигом на $(-a_1, -a_2, \ldots)$, так что $\mu'_k \sim N(0, t_k)$, $\nu'_k \sim N(b_k - a_k, s_k)$, $\mu'_k \sim \nu'_k$ для всех $k \geq 1$. Тогда

$$H(\mu'_k, \nu'_k) = \begin{cases}\left(\dfrac{4t_k s_k}{(t_k+s_k)^2}e^{\frac{b_k-a_k}{t_k+s_k}}\right)^{1/4}, & t_k,\ s_k > 0,\\ 1, & t_k = s_k = 0.\end{cases}$$

Для эквивалентности $\nu' \sim \mu'$ достаточно, чтобы произведение $\prod_{k=1}^{\infty} H(\mu'_k, \nu'_k)$ сходилось. Для этого, в свою очередь, надо, чтобы

$$\sum_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\frac{(b_k-a_k)^2}{t_k+s_k} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\frac{(t_k-s_k)^2}{(t_k+s_k)^2} < +\infty,$$

так как $\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\frac{4t_k s_k}{(t_k+s_k)^2} = \prod_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{(t_k-s_k)^2}{(t_k+s_k)^2}\right).$

Из условия $\nu' \ll_0 \mu'$ по теореме 1 получаем

$$\sum_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\frac{(b_k-a_k)^2}{t_k} < +\infty, \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0}}^{\infty}\frac{(t_k-s_k-(b_k-a_k)^2)^2}{t_k^2} < +\infty,$$

$$\frac{t_k-s_k-(b_k-a_k)^2}{t_k} \to 0, \quad k\to\infty, \qquad \frac{(b_k-a_k)^2}{t_k} \to 0, \quad k\to\infty, \tag{6}$$

поэтому

$$\frac{t_k - s_k}{t_k} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{7}$$

$$\frac{(t_k - s_k)^2}{t_k^2} = \frac{(t_k - s_k - (b_k - a_k)^2)^2}{t_k^2} + 2\frac{t_k - s_k}{t_k}\frac{(b_k - a_k)^2}{t_k} - \left(\frac{(b_k - a_k)^2}{t_k}\right)^2. \tag{8}$$

В силу (5) – (7) ряд, состоящий из членов правой части равенства (8), сходится. Поэтому

$$\sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{(t_k - s_k)^2}{t_k^2} < +\infty.$$

Отсюда и из (5) получаем сходимость нужных рядов.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k$, $\nu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \nu_k$ *— гауссовские продакт-меры на* $\mathbb{R}^\infty$. *Тогда* $\mu \sim \nu$ *в том и только в том случае, когда* $\nu \ll_0 \mu$ *и* $\mu \ll_0 \nu$.

Доказательство. Пусть $\nu \ll_0 \mu$ и $\mu \ll_0 \nu$. Согласно теореме 2, чтобы доказать эквивалентность $\nu \sim \mu$, достаточно проверить, что $\mu_k \sim \nu_k$ для всех $k \geq 1$. Пусть $\mu_k \sim N(a_k, t_k)$, $\nu_k \sim N(b_k, s_k)$. В замечании к теореме 1 показано, что из $\nu \ll_0 \mu$ следует, что если для некоторого $k \geq 1$ $t_k = 0$, то $\mu_k = \nu_k$. Для мер μ_k и ν_k возможны следующие варианты:

а) $t_k > 0$, $s_k > 0$; в этом случае $\mu_k \sim \nu_k$;

б) $t_k = 0$; в этом случае условие $\nu \ll_0 \mu$ влечет равенство $\mu_k = \nu_k$;

в) $s_k = 0$; в этом случае условие $\mu \ll_0 \nu$ влечет равенство $\mu_k = \nu_k$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k$, $\nu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \nu_k$ *— гауссовские продакт-меры на* $\mathbb{R}^\infty$, $\mu_k \sim N(0, t_k)$, $\nu_k \sim N(b_k, s_k)$. *Тогда* $\nu \ll_0 \mu$ *в том и только в том случае, когда выполнены условия*:

1) *если для некоторого* $k \geq 1$ $t_k = 0$, *то* $\nu_k = \mu_k$ (*т. е.* $s_k = b_k = 0$);

2) $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{b_k^2}{t_k} < +\infty, \quad \sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{(t_k - s_k)^2}{t_k^2} < +\infty.$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\nu \ll_0 \mu$. В замечании к теореме 1 показано, что условие 1 выполняется. Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{b_k^2}{t_k} < +\infty, \qquad \sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{(t_k - s_k - b_k^2)^2}{t_k^2} < +\infty.$$

Так же, как в доказательстве теоремы 2, из сходимости этих рядов получаем $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ t_k \neq 0}}^{\infty} \frac{(t_k - s_k)^2}{t_k^2} < +\infty.$

Достаточность. Выделим в подпоследовательность $\{t_{l_n};\, n \geq 1\}$ все нули последовательности $\{t_k;\ k \geq 1\}$:

$$t_{l_n} = 0 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Подпоследовательность ненулевых значений $\{t_k;\ k \geq 1\}$ обозначим $\{t_{k_n};\ n \geq 1\}$. Пусть ν_0, μ_0 — проекции мер μ и ν на $\mathbb{R}_0^\infty = \mathbb{R}_{l_1} \times \mathbb{R}_{l_2} \times \ldots$. В силу условия 1 ν_0 и μ_0 совпадают и являются мерами, сосредоточенными в нуле. Поэтому достаточно проверить финитную абсолютную непрерывность $\nu_1 \ll_0 \mu_1$, где ν_1, μ_1 — проекции мер μ и ν на $\mathbb{R}_1^\infty = \mathbb{R}_{k_1} \times \mathbb{R}_{k_2} \times \ldots$, $\nu = \nu_0 \otimes \nu_1$, $\mu = \mu_0 \otimes \mu_1$. Поскольку $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ t_k \neq 0}}^{\infty} \dfrac{(t_k - s_k)^2}{t_k^2} < +\infty$, множество t_{k_n} таких, что $s_{k_n} = 0$, конечно. Пусть это будет множество $\{t_{k_1'}, \ldots, t_{k_m'}\}$. Подпоследовательность t_{k_n} таких, что $s_{k_n} > 0$, обозначим через $\{t_{k_n''},\ n \geq 1\}$. Пусть ν_1', ν_1'' — проекции меры ν_1 на $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_{k_1'} \times \ldots \times \mathbb{R}_{k_m'}$ и $\mathbb{R}_{-m}^\infty = \mathbb{R}_{k_1''} \times \mathbb{R}_{k_2''} \times \ldots$ соответственно, μ_1', μ_1'' — проекции меры μ_1 на $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_{k_1'} \times \ldots \times \mathbb{R}_{k_m'}$ и $\mathbb{R}_{-m}^\infty = \mathbb{R}_{k_1''} \times \mathbb{R}_{k_2''} \times \ldots$ соответственно, $\nu_1 = \nu_1' \otimes \nu_1''$, $\mu_1 = \mu_1' \otimes \mu_1''$, ν_1' и μ_1' — гауссовские меры на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^m$, причем μ_1' невырождена на $\mathbb{R}^m$. Поэтому для каждого $n \geq 0$ существует $C_n > 0$ такое, что для любого многочлена $Q(x)$ на $\mathbb{R}^m$ степени не выше n

$$\int |Q(x)|\nu_1'(dx) \leq C_n \int |Q(x)|\mu_1'(dx). \tag{9}$$

Далее, $\nu_1'' = \bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \nu_{k_n''}$, $\mu_1'' = \bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{k_n''}$ и для всех $n \geq 1$ $\nu_{k_n''} \sim \mu_{k_n''}$. Из условия 2 по теореме Какутани получаем, что $\nu_1'' \sim \mu_1''$. Пусть $\rho(x) = \dfrac{d\nu_1''}{d\mu_1''}(x)$, $x \in \mathbb{R}_{-m}^\infty$. Каждый вектор $x \in \mathbb{R}_1^\infty$ единственным образом представляется в виде $x = x_m + x_{-m}$, где $x_m \in \mathbb{R}^m$, $x_{-m} \in \mathbb{R}_{-m}^\infty$.

Пусть $P(x) = P(x_m, x_{-m})$ — многочлен на $\mathbb{R}_1^\infty$ степени не выше n. Используя (9), получаем цепочку неравенств

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_1^\infty} P(x)\nu_1'(dx) \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}_{-m}^\infty} P(x_m, x_{-m})\nu_1''(dx_{-m})\nu_1'(dx_m) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}_{-m}^\infty} P(x_m, x_{-m})\rho(x_{-m})\mu_1''(dx_{-m})\nu_1'(dx_m) \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_{-m}^\infty} P^2(x_m, x_{-m})\mu_1''(dx_{-m}) \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_{-m}^\infty} \rho^2(x_{-m})\mu_1''(dx_{-m}) \right)^{1/2} \nu_1'(dx_m) \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^\infty_{-m}} \rho^2(x_{-m}) \mu_1''(dx_{-m}) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^\infty_{-m}} P^2(x_m, x_{-m}) \mu_1''(dx_{-m}) \nu_1'(dx_m) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^\infty_{-m}} \rho^2(x_{-m}) \mu_1''(dx_{-m}) \right)^{1/2} \times$$

$$\times\ C_{2n}^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^\infty_{-m}} P^2(x_m, x_{-m}) \mu_1''(dx_{-m}) \mu_1'(dx_m) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(C_{2n} \int_{\mathbb{R}^\infty_{-m}} \rho^2(x_{-m}) \mu_1''(dx_{-m}) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^\infty_1} P^2(x) \mu_1(dx) \right)^{1/2},$$

что и доказывает финитную абсолютную непрерывность $\nu \ll_0 \mu$.

Теорема доказана.

4. Гауссовские меры на гильбертовом пространстве. Пусть μ и ν — гауссовские меры на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mu \sim N(a_1, S_1)$, $\nu \sim N(a_2, S_2)$. Согласно теореме Гаека – Фельдмана [1, 2], меры μ и ν либо эквивалентны, либо сингулярны, и

1) $\mu \sim \nu$ в том и только в том случае, когда $N(a_1, S_1) \sim N(a_2, S_1)$ и $N(a_2, S_1) \sim N(a_2, S_2)$;

2) $N(0, S) \sim N(a, S)$ тогда и только тогда, когда $a \in \sqrt{S}(H)$;

3) $N(0, S_1) \sim N(0, S_2)$ тогда и только тогда, когда существует такой ограниченный неотрицательно определенный обратимый оператор T, что $S_2 = \sqrt{S_1} T \sqrt{S_1}$, $T - I \in \mathcal{L}_{(2)}(H)$. Здесь $\mathcal{L}_{(2)}(H)$ — пространство всех операторов Гильберта – Шмидта на H.

В [3] доказано следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $\mu \sim N(0, S)$, $\nu \sim N(a, S)$. *Тогда* $\nu \ll_0 \mu$ *в том и только в том случае, когда* $a \in \sqrt{S}(H)$ (*т. е.* $\nu \sim \mu$).

Теорема 4. *Пусть* $\mu \sim N(0, S_1)$, $\nu \sim N(0, S_2)$. *Тогда* $\nu \ll_0 \mu$ *в том и только в том случае, когда существует такой ограниченный неотрицательно определенный оператор* T, *что* $S_2 = \sqrt{S_1} T \sqrt{S_1}$, $T - I \in \mathcal{L}_{(2)}(H)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{e_n;\ n \geq 1\}$ — ортонормированный базис в $(\ker S_1)^\perp$, состоящий из собственных векторов оператора S_1, которые соответствуют положительным собственным числам $\{\lambda_n;\ n \geq 1\}$. Обозначим $\alpha_{ij} = (S_2 e_i, e_j)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = a_0 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x, e_i)(x, e_j)$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, убеждаемся в неотрицательности определителя

$$\begin{vmatrix} C-1 & C\lambda_1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{n-1n} & C\lambda_n-\alpha_{nn} \\ C\lambda_1-\alpha_{11} & 3C\lambda_1^2-\alpha_{11}^2 & -\alpha_{11}\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{11}\alpha_{n-1n} & C\lambda_1\lambda_n-\alpha_n\alpha_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_{n-1n} & -\alpha_{11}\alpha_{n-1n} & -\alpha_{12}\alpha_{n-1n} & \cdots & C\lambda_{n-1}\lambda_n-\alpha_{n-1n}^2 & -\alpha_{n-1}\alpha_{nn} \\ C\lambda_n-\alpha_{nn} & C\lambda_1\lambda_n-\alpha_{11}\alpha_{nn} & -\alpha_{12}\alpha_{nn} & \cdots & -\alpha_{n-1n}\alpha_{nn} & 3C\lambda_n^2-\alpha_{nn}^2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\forall\, n \ge 1: \quad C \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha_{ij}-\lambda_i)^2}{2\lambda_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{\alpha_{ij}^2}{\lambda_i\lambda_j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{ij}-\lambda_i\delta_{ij})^2}{\lambda_i\lambda_j} < +\infty.$$

Определим $(Te_i, e_j) = \dfrac{(S_2e_i, e_j)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}$ на $(\ker S_1)^{\perp}$ и $T = I$ на $\ker S_1$ (T — искомый оператор).

Достаточность. Пусть $S_2 = \sqrt{S_1}\,T\sqrt{S_1}$, где T — ограниченный неотрицательно определенный оператор, $T - I \in \mathcal{L}_{(2)}(H)$. Проекции мер μ и ν на $\ker S_1$ совпадают — это меры, сосредоточенные в нуле. Поэтому надо проверить финитную абсолютную непрерывность $\nu' \ll_0 \mu'$, где ν' и μ' — проекции μ и ν на $(\ker S_1)^{\perp}$.

Пусть $\{e_n;\, n \ge 1\}$ — ортонормированный базис в $(\ker S_1)^{\perp}$, состоящий из собственных векторов оператора S_1. Число e_j, для которых $Te_j = 0$, конечно, так как $T - I \in \mathcal{L}_{(2)}(H)$. Обозначим

$$H_1 = \text{л.о.}\{e_j;\, Te_j = 0\}, \qquad H_2 = (\ker S_1)^{\perp} \ominus H_1.$$

Пусть μ_1', μ_2' — проекции меры μ' на H_1 и H_2, $\mu' = \mu_1' \otimes \mu_2'$. Пусть ν_1' — проекция меры ν' на H_1. Существует такой набор гауссовских мер $\{\nu_u';\, u \in H_1\}$, заданных на H_2, что

$$\nu'(A) = \int_{H_1} \nu_u'(A_u)\,\nu_1'(du), \tag{10}$$

где A — борелевское подмножество $(\ker S_1)^{\perp}$, A_u — сечение множества A вектором $u \in H_1$. Для всех $u \in H_1$ $\nu_u' \sim \mu_2'$. Пусть $\rho_u(v) = \dfrac{d\nu_u'}{d\mu_2'}(v)$. Далее, μ_1' и ν_1' — гауссовские меры на конечномерном пространстве H_1, причем μ_1' невырождена на H_1. Поэтому для каждого $n \ge 1$ найдется такая константа $C_n > 0$, что для всех многочленов $Q(u)$ на H_1 степени не выше n

$$\int_{H_1} |Q(u)|\,\nu_1'(du) \le C_n \int_{H_1} |Q(u)|\,\mu_1'(du). \tag{11}$$

Теперь пусть $P(x) = P(u, v)$ — многочлен на $(\ker S_1)^{\perp} = H_1 \oplus H_2$ степени не выше n. В силу (10) и (11) получаем цепочку неравенств

$$\left|\int\limits_{(\ker S_1)^{\perp}} P(u,v)\nu'(du,dv)\right| = \left|\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2} P(u,v)\nu'_u(dv)\nu'_1(du)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2} P(u,v)\rho_u(v)\mu'_2(dv)\nu'_1(du)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{H_1}\left(\int\limits_{H_2} P^2(u,v)\mu'_2(dv)\right)^{1/2}\left(\int\limits_{H_2}\rho_u(v)^2\mu'_2(dv)\right)^{1/2}\nu'_1(du) \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2}\rho_u(v)^2\mu'_2(dv)\nu'_1(du)\right)^{1/2}\left(\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2} P^2(u,v)\mu'_2(dv)\nu'_1(du)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_{2n}^{1/2}\left(\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2}\rho_u(v)^2\mu'_2(dv)\nu'_1(du)\right)^{1/2}\left(\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2} P^2(u,v)\mu'_2(dv)\mu'_1(du)\right)^{1/2} =$$

$$= \left(C_{2n}\int\limits_{H_1}\int\limits_{H_2}\rho_u(v)^2\mu'_2(dv)\nu'_1(du)\right)^{1/2}\left(\int\limits_{(\ker S_1)^{\perp}} P^2(u,v)\mu'(du,dv)\right)^{1/2},$$

что и доказывает финитную абсолютную непрерывность $\nu' \ll_0 \mu'$.

Теорема доказана.

***Замечание* 5.** Критерии финитной абсолютной непрерывности для гауссовских мер в теоремах 3 и 4 представляют собой ослабление соответствующих критериев эквивалентности для гауссовских мер. Например, пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H,

$$S_1 x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(x,e_k)e_k, \quad S_2 x = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}(x,e_k)e_k, \quad \mu \sim N(0,S_1), \quad \nu \sim N(0,S_2).$$

Тогда оператор T из теоремы 4 — это проектор на подпространство, порожденное векторами $\{e_n\}_{n=2}^{\infty}$. T необратим, $\nu \perp \mu$, но $\nu \ll_0 \mu$.

1. *Го X.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
3. *Дороговцев А. А.* Измеримые функционалы и финитно абсолютно непрерывные меры на банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 9. – С. 1194 – 1204.

Получено 15.12.06