УДК 517.9

Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСАМИ

For linear differential inclusions with pulses at fixed times, we establish sufficient conditions for the existence of periodic R-solutions.

Для лінійних диференціальних включень з імпульсами у фіксовані моменти часу встановлено достатні умови існування періодичних R-розв'язків.

Пусть $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$ — метрическое пространство непустых компактных (и выпуклых) подмножеств $\mathbb{R}^n$. Метрика в этих пространствах определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу:

$$h(A,B) = \min\big\{r \geq 0\colon A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\big\},$$

где $S_r(a) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x-a\| \leq r\big\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $|F|$ модуль множества F :

$$|F| = \max_{f \in F} \|f\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, если $F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, и спектральная норма матрицы, если $F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{n\times n})$.

Рассмотрим линейное неоднородное периодическое дифференциальное включение с импульсным воздействием вида

$$\dot{x} \in \mathcal{A}(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \mathcal{B}_i x + P_i, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $\mathcal{A}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{comp}\left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F\colon \mathbb{R} \to$ $\to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — измеримые T-периодические многозначные отображения, $\big|\mathcal{A}(t)\big| \leq$ $\leq \alpha(t)$, $\big|F(t)\big| \leq \mu(t)$ ($\alpha(t)$, $\mu(t)$ суммируемы на $[0,T]$); $\mathcal{B}_i$ — компактные множества $(n\times n)$-матриц, множества $P_i \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и моменты τ_i таковы, что

$$\mathcal{B}_{i+r} = \mathcal{B}_i, \qquad P_{i+r} = P_i, \qquad \tau_{i+r} = \tau_i + T$$

при всех $i \in \mathbb{Z}$ и некотором натуральном r.

Предполагается также, что $0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_r < T$ и $\det(E + B_i) \neq 0$ для всех $B_i \in \mathcal{B}_i$, $i = \overline{1,r}$.

Определение 1. *Функция* $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *называется решением включения* (1), (2), *если она абсолютно непрерывна и почти всюду удовлетворяет включению* (1) *на промежутках, не содержащих* τ_i, *имеет разрывы первого рода в точках* $t = \tau_i$ *со скачками* $\Delta x(\tau_i)$, *удовлетворяющими условию* (2).

В теории дифференциальных включений наряду с обычными решениями большой интерес представляют R-решения [1, 2], свойства которых во многих случаях аналогичны свойствам решений дифференциальных уравнений.

Определение 2. *Многозначное отображение $R\colon \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ называется R-решением, порожденным импульсным дифференциальным включением* (1), (2), *если $R(t)$ абсолютно непрерывно на промежутках, не содержащих τ_i, и для почти всех $t \neq \tau_i$*

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}h\left(R(t+\Delta),\bigcup_{x\in R(t)}\left\{x+\int\limits_t^{t+\Delta}(\mathcal{A}(s)x+F(s))ds\right\}\right)=0,$$

а при $t=\tau_i$ отображение $R(t)$ удовлетворяет условию скачка

$$R(\tau_i+0)=\bigcup_{x\in R(\tau_i)}\left\{x+\mathcal{B}_ix+P_i\right\}. \qquad (3)$$

Интеграл от многозначного отображения здесь и в дальнейшем понимается в смысле Ауманна [3].

Рассмотрим вопрос о существовании периодических R-решений импульсного дифференциального включения (1), (2). Исследованию условий существования периодических решений импульсных дифференциальных уравнений посвящено много работ (см., например, [4, 5]). Существование обычных периодических решений импульсных дифференциальных включений рассматривалось в [6, 7]. В работе [8] вопрос о существовании периодических R-решений импульсного дифференциального включения был рассмотрен для включений вида (1), (2) с однозначными матрицами $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{B}_i$, при этом получены необходимые и достаточные условия существования таких решений.

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $\Phi_A(t,s)$ — матрицант системы (1), соответствующий измеримой ветви $A(t)$ многозначного отображения $\mathcal{A}(t)$, т. е. решение матричной задачи Коши

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X, \qquad X(s,s)=E. \qquad (4)$$

Лемма 1. *Множество матрицантов $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)=\left\{\Phi_A(t,s)\colon A(t)\in\mathcal{A}(t)\right\}$ является непустым компактом в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ при любых фиксированных $t,\ s\in\mathbb{R},\ t\geq s$.*

Доказательство. Выберем произвольные вещественные t и s такие, что $t \geq s$. Множество $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ непусто, так как в силу теоремы А. Ф. Филиппова [9] существует суммируемая ветвь многозначного отображения $\mathcal{A}(t)$, а в силу теоремы Каратеодори для линейных систем существует решение матричной задачи (4).

Покажем, что множество $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ ограничено. Представим матрицу $\Phi_A(t,s)$ в виде [10]

$$\Phi_A(t,s)=E+\int\limits_s^t A(t_1)dt+\int\limits_s^t A(t_1)\int\limits_s^{t_1}A(t_2)dt_2dt_1+\ldots.$$

Тогда получаем следующую последовательность оценок:

$$\|\Phi_A(t,s)\| \le 1 + \int\limits_s^t \|A(t_1)\|dt + \int\limits_s^t \|A(t_1)\| \int\limits_s^{t_1} \|A(t_2)\|dt_2dt_1 + \ldots$$

$$\ldots \le 1 + \int\limits_s^t \alpha(t_1)dt + \int\limits_s^t \alpha(t_1) \int\limits_s^{t_1} \alpha(t_2)dt_2dt_1 + \ldots.$$

Использовав метод полной математической индукции, покажем, что для любого $\tilde{t} \in (s,t]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_s^{\tilde{t}} \alpha(t_1) \int\limits_s^{t_1} \alpha(t_2) \ldots \int\limits_s^{t_{k-1}} \alpha(t_k)dt_k \ldots dt_2dt_1 \le \frac{\gamma^k(\tilde{t},s)}{k!}, \tag{5}$$

где

$$\gamma(\tilde{t},s) = \int\limits_s^{\tilde{t}} \alpha(t_1)dt_1.$$

При $k=1$ неравенство (5) выполняется. Предположим, что оно выполняется при $k=m$. Тогда при $k=m+1$ имеем

$$\int\limits_s^{\tilde{t}} \alpha(t_1) \int\limits_s^{t_1} \alpha(t_2) \ldots \int\limits_s^{t_m} \alpha(t_{m+1})dt_{m+1} \ldots dt_2dt_1 \le$$

$$\le \int\limits_s^{\tilde{t}} \alpha(t_1) \frac{\gamma^m(t_1,s)}{m!} dt_1 = \frac{\gamma^{m+1}(\tilde{t},s)}{(m+1)!},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\|\Phi_A(t,s)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k(t,s)}{k!} = e^{\gamma(t,s)} \tag{6}$$

и ограниченность множества $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ доказана.

Покажем теперь, что множество $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ замкнуто, т. е. предел любой сходящейся последовательности матриц $\Phi_{A_k}(t,s) \in \Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ также принадлежит множеству $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$. В силу эквивалентности дифференциального уравнения интегральному уравнению Вольтерра справедливо представление

$$\Phi_{A_k}(t,s) = E + \int\limits_s^t A_k(\sigma)\Phi_{A_k}(\sigma,s)d\sigma. \tag{7}$$

Аналогично (6) имеем $\left\|\Phi_{A_k}(\sigma,s)\right\| \le e^{\gamma(t,s)}$ для всех $\sigma \in [s,t]$. Поскольку

$$\big\|\Phi_{A_k}(t_2,s)-\Phi_{A_k}(t_1,s)\big\|=$$

$$=\left\|\int\limits_{t_1}^{t_2}A_k(\sigma)\Phi_{A_k}(\sigma,s)d\sigma\right\|\leq\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha(\sigma)e^{\gamma(t,s)}d\sigma\right|=e^{\gamma(t,s)}\big|\gamma(t_2,s)-\gamma(t_1,s)\big|,$$

где функция $\gamma(\sigma,s)$ абсолютно непрерывна на $[s,t]$, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $t_1,\,t_2\in[s,t]$: $|t_2-t_1|<\delta$ выполняется неравенство

$$\big|\gamma(t_2,s)-\gamma(t_1,s)\big|\leq\varepsilon e^{-\gamma(t,s)},$$

а значит,

$$\big\|\Phi_{A_k}(t_2,s)-\Phi_{A_k}(t_1,s)\big\|<\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность функций $\Phi_{A_k}(\sigma,s)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $[s,t]$, поэтому по теореме Арцела из нее можно выделить равномерно сходящуюся к непрерывной матричной функции $\Phi_*(\sigma,s)$ подпоследовательность.

Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется k_0 такое, что для всех $k>k_0$ имеет место неравенство $\big\|\Phi_{A_k}(\sigma,s)-\Phi_*(\sigma,s)\big\|<\dfrac{\varepsilon}{\gamma(t,s)}$ для всех $\sigma\in[s,t]$.

Поскольку

$$\int\limits_s^t A_k(\sigma)\Phi_{A_k}(\sigma,s)d\sigma=\int\limits_s^t A_k(\sigma)[\Phi_{A_k}(\sigma,s)-\Phi_*(\sigma,s)]d\sigma+\int\limits_s^t A_k(\sigma)\Phi_*(\sigma,s)d\sigma,$$

где

$$\left\|\int\limits_s^t A_k(\sigma)[\Phi_{A_k}(\sigma,s)-\Phi_*(\sigma,s)]d\sigma\right\|\leq\int\limits_s^t\alpha(\sigma)\|\Phi_{A_k}(\sigma,s)-\Phi_*(\sigma,s)\|d\sigma<\varepsilon,$$

и в силу теоремы А. А. Ляпунова [11] существует подпоследовательность $A_{k_1}(\sigma)$ последовательности $A_k(\sigma)$, слабо сходящаяся к матрице $A_*(\sigma)\in\mathcal{A}(\sigma)$ на $[s,t]$, то

$$\int\limits_s^t A_{k_1}(\sigma)\Phi_*(\sigma,s)d\sigma\to\int\limits_s^t A_*(\sigma)\Phi_*(\sigma,s)d\sigma\quad\text{при}\quad k_1\to\infty.$$

Переходя к пределу в (7), получаем

$$\Phi_*(t,s)=E+\int\limits_s^t A_*(\sigma)\Phi_*(\sigma,s)d\sigma,$$

т. е. $\Phi_*(t,s)=\Phi_{A_*}(t,s)\in\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)\in\mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^{n\times n})$.

Лемма доказана.

Пусть $\Phi_{AB_i}(t,s)$ — матрицант системы (1), (2), соответствующий матрицам $A(t) \in \mathcal{A}(t)$, $B_i \in \mathcal{B}_i$, т. е. решение матричной задачи Коши для системы с импульсным воздействием

$$\dot{X} = A(t)X, \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} = B_i X, \quad X(s,s) = E.$$

В силу результатов [4] для матрицанта $\Phi_{AB_i}(t,s)$ имеем

$$\Phi_{AB_i}(t,s) = \Phi_A(t,\tau_k)(E+B_k)\Phi_A(\tau_k,\tau_{k-1})\ldots(E+B_p)\Phi_A(\tau_p,s), \tag{8}$$

$$\tau_p < s \leq \tau_{p+1}, \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}.$$

Лемма 2. *Множество матрицантов* $\Phi_{\mathcal{A}\mathcal{B}_i}(t,s) = \big\{\Phi_{AB_i}(t,s)\colon A(t) \in \mathcal{A}(t),$ $B_i \in \mathcal{B}_i\big\}$ *является непустым компактом в пространстве* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *при любых фиксированных* t, $s \in \mathbb{R}$, $t \geq s$.

Доказательство. Выберем произвольные вещественные t и s такие, что $t \geq s$. Для множеств F, $G \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n\times n})$ определим умножение следующим образом:

$$F \cdot G = \{f \cdot g\colon f \in F, g \in G\}.$$

Очевидно, что $F \cdot G \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n\times n})$. Действительно, $F \cdot G$ непусто в силу непустоты множеств F и G, $F\cdot G$ ограничено, так как для любой матрицы $M \in F\cdot G$ существуют $f_0 \in F$ и $g_0 \in G$ такие, что $M = f_0 \cdot g_0$, а значит,

$$\|M\| \leq \|f_0\|\,\|g_0\| \leq |F|\,|G| < \infty.$$

Покажем, что множество $F \cdot G$ замкнуто. Выберем произвольную последовательность матриц $M_k \in F \cdot G$, сходящуюся к матрице $M_* \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Требуется доказать, что $M_* \in F \cdot G$. В силу определения умножения множеств для любого k найдутся $f_k \in F$ и $g_k \in G$ такие, что справедливо представление $M_k = f_k \cdot g_k$. Поскольку множества F и G компактны, существуют подпоследовательности последовательностей $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$, сходящиеся к $f_* \in F$ и $g_* \in G$ соответственно. Тогда $M_* = f_* g_* \in F \cdot G$, что и требовалось доказать.

Используя представление (8) для матрицанта, запишем множество $\Phi_{\mathcal{A}\mathcal{B}_i}(t,s)$ в виде

$$\Phi_{\mathcal{A}\mathcal{B}_i}(t,s) = \Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau_k)(E+\mathcal{B}_k)\Phi_{\mathcal{A}}(\tau_k,\tau_{k-1})\ldots(E+\mathcal{B}_p)\Phi_{\mathcal{A}}(\tau_p,s),$$

$$\tau_p < s \leq \tau_{p+1}, \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}.$$

В силу леммы 1 и компактности множеств $\mathcal{B}_i$ множество $\Phi_{\mathcal{A}\mathcal{B}_i}(t,s) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n\times n})$.

Лемма доказана.

Обычное решение $x(t,x_0)$, $x(t_0,x_0) = x_0$ линейного импульсного дифференциального включения (1), (2) представимо в виде

$$x(t,x_0) = \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t,\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi_{AB_i}(t,\tau_i)p_i,$$

где $A(t) \in \mathcal{A}(t)$, $f(t) \in F(t)$ — измеримые ветви, $B_i \in \mathcal{B}_i$, $p_i \in P_i$ [4].

Пучок решений (интегральная воронка) $X(t, X_0)$, $X(t_0, X_0) = X_0 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ включения (1), (2) определяется формулой

$$X(t, X_0) =$$

$$= \bigcup_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \left\{ \Phi_{AB_i}(t, t_0)X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t, \tau)F(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0\le\tau_i<t} \Phi_{AB_i}(t, \tau_i)P_i \right\}. \quad (9)$$

Лемма 3. *Пучок решений*

$$X(t, X_0) = \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t)} \left\{ \Phi_A(t, t_0)X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_A(t, s)F(s)\, ds \right\} \quad (10)$$

линейного неоднородного дифференциального включения (1) *является непустым компактом для любого фиксированного* $t \in \mathbb{R}$, $t \ge t_0$.

Доказательство. Выберем произвольное $t \in \mathbb{R}$, $t \ge t_0$. Множество $X(t, X_0)$ непусто, так как в силу теоремы А. Ф. Филлипова [9] существуют суммируемые ветви многозначных отображений $\mathcal{A}(t)$ и $F(t)$ и, кроме того, множество X_0 непусто. Любой элемент x множества $X(t, X_0)$ представим в виде

$$x = x(t, x_0) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_A(t, s)f(s)ds,$$

$$x_0 \in X_0, \quad A(s) \in \mathcal{A}(s), \quad f(s) \in F(s),$$

поэтому имеет место оценка

$$\|x\| \le e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}|X_0| + \int\limits_{t_0}^{t} \mu(s)e^{\int_{s}^{t} \alpha(\tau)d\tau}ds \le e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}\left(|X_0| + \int\limits_{t_0}^{t} \mu(s)ds\right) = K, \quad (11)$$

т. е. множество $X(t, x_0)$ ограничено.

Покажем замкнутость, т. е. что предел любой сходящейся последовательности точек $x_k \in X(t, X_0)$ также принадлежит множеству $X(t, X_0)$. Так как $x_k \in X(t, X_0)$, существуют $x_0^k \in X_0$, $A_k(s) \in \mathcal{A}(s)$ и $f_k(s) \in F(s)$ такие, что x_k является значением решения задачи Коши

$$\dot{x} = A_k(s)x + f_k(s), \quad x(t_0) = x_0^k$$

в момент времени t. В силу эквивалентности дифференциального уравнения интегральному уравнению Вольтерра справедливо представление

$$x_k = x_k(t) = x_0^k + \int\limits_{t_0}^{t} A_k(s)x_k(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds. \quad (12)$$

Аналогично (11) имеем $\|x_k(s)\| \le K$ для всех $s \in [t_0, t]$. Поскольку

$$\|x_k(s_2) - x_k(s_1)\| = \left\| \int\limits_{s_1}^{s_2} [A_k(s)x_k(s) + f_k(s)]ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{s_1}^{s_2} [K\alpha(s) + \mu(s)]ds \right| = |\phi(s_2) - \phi(s_1)|,$$

где $\phi(\tau) = \displaystyle\int_{t_0}^{\tau} \big[K\alpha(s) + \mu(s)\big] ds$ — абсолютно непрерывная на $[t_0, t]$ функция, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых s_1, $s_2 \in [t_0, t]$: $|s_2 - s_1| < \delta$ выполняется неравенство $|\phi(s_2) - \phi(s_1)| < \varepsilon$, а значит,

$$\|x_k(s_2) - x_k(s_1)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность функций $x_k(s)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $[t_0, t]$, поэтому по теореме Арцела из нее можно выделить равномерно сходящуюся к непрерывной функции $x_*(s)$ подпоследовательность.

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_0 такое, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $\|x_k(s) - x_*(s)\| < \dfrac{\varepsilon}{\gamma(t, t_0)}$ для всех $s \in [t_0, t]$.

Так как

$$\int\limits_{t_0}^{t} A_k(s)x_k(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} A_k(s)\big[x_k(s) - x_*(s)\big]ds + \int\limits_{t_0}^{t} A_k(s)x_*(s)ds,$$

где

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} A_k(s)[x_k(s) - x_*(s)]ds \right\| \leq \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(s)\|x_k(s) - x_*(s)\|ds < \varepsilon,$$

и в силу теоремы А. А. Ляпунова существует подпоследовательность $A_{k_1}(s)$ последовательности $A_k(s)$, слабо сходящаяся к матрице $A_*(s) \in \mathcal{A}(s)$ на $[t_0, t]$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} A_{k_1}(s)x_*(s)ds \to \int\limits_{t_0}^{t} A_*(s)x_*(s)ds \quad \text{при} \quad k_1 \to \infty.$$

Кроме того, $x_0^{k_1} \in X_0 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, следовательно, существует подпоследовательность $\{x_0^{k_2}\}$, сходящаяся к некоторому вектору $x_0^* \in X_0$. Также в силу теоремы А. А. Ляпунова существует подпоследовательность последовательности $f_{k_2}(s)$, слабо сходящаяся к функции $f_*(s) \in F(s)$ на $[t_0, t]$.

Переходя к пределу в (12), получаем

$$x_* = x_*(t) = x_0^* + \int\limits_{t_0}^{t} A_*(s)x_*(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} f_*(s)ds,$$

т. е. x_* является значением решения дифференциального включения (1) в момент времени t, т. е. $x_* \in X(t, X_0)$. Таким образом, компактность множества $X(t, X_0)$ доказана.

Лемма доказана.

В силу леммы 3 и компактности множеств $\mathcal{B}_i$ и P_i с учетом того, что при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо представление

$$X(t, x_0) = \Phi_A(t, \tau_i + 0) X(\tau_i + 0, x_0) + \int\limits_{\tau_i + 0}^{t} \Phi_A(t, \tau) F(\tau) d\tau, \tag{13}$$

а

$$X(\tau_i + 0, x_0) = \bigcup_{x \in X(\tau_i, x_0)} \{x + \mathcal{B}_i x + P_i\}, \tag{14}$$

интегральная воронка $X(t, X_0)$ включения (1), (2) является компактным множеством при каждом фиксированном $t \geq t_0$.

Кроме того, множество $X(t, X_0)$ удовлетворяет условиям определения 2, т. е. $X(t, X_0) - R$-решение включения (1), (2). Поскольку правая часть включения (1) липшицева по x, с учетом результатов [1] и условия скачка (14) множество $X(t, X_0)$ является единственным R-решением включения (1), (2).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *R-решение включения* (1), (2) *существует, единственно и совпадает с интегральной воронкой $X(t, X_0)$, определяемой равенством* (9).

Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании периодических R-решений включения (1), (2). В силу T-периодичности правых частей включения (1), (2) существование T-периодических R-решений непосредственно связано с существованием в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ решений уравнения

$$R_0 = \bigcup_{\substack{A(t) \in \mathcal{A}(t) \\ B_i \in \mathcal{B}_i}} \{\Phi_{AB_i}(T, 0) R_0 + G_{AB_i}\}, \tag{15}$$

где

$$G_{AB_i} = \int\limits_0^T \Phi_{AB_i}(T, \tau) F(\tau) d\tau + \sum_{0 \leq \tau_i < T} \Phi_{AB_i}(T, \tau_i) P_i \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2. *Пусть для любых $A(t) \in \mathcal{A}(t)$, $B_i \in \mathcal{B}_i$ выполняется неравенство*

$$\|\Phi_{AB_i}(T, 0)\| < 1.$$

Тогда включение (1), (2) *имеет единственное T-периодическое R-решение.*

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $\psi\colon \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\psi(R) = \bigcup_{\substack{A(t) \in \mathcal{A}(t) \\ B_i \in \mathcal{B}_i}} \{\Phi_{AB_i}(T, 0) R + G_{AB_i}\}$$

и покажем, что данный оператор является оператором сжатия. Выберем произвольные множества R_1, $R_2 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, тогда $h(\psi(R_1), \psi(R_2)) = \sup(d_1, d_2)$, где

$$d_1 = \rho\left(\Phi_{AB_i}(T, 0) r_1 + g_{AB_i}, \bigcup_{\substack{A(t) \in \mathcal{A}(t) \\ B_i \in \mathcal{B}_i}} \{\Phi_{AB_i}(T, 0) R_2 + G_{AB_i}\}\right), \quad r_1 \in R_1,$$

$$d_2 = \rho\left(\Phi_{AB_i}(T,0)r_2 + g_{AB_i}, \bigcup_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \{\Phi_{AB_i}(T,0)R_1 + G_{AB_i}\}\right), \quad r_2 \in R_2,$$

$\rho(x,Y) = \min\limits_{y\in Y}\|x-y\|$ — расстояние от точки $x \in R^n$ до множества $Y \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Оценим d_1. Выберем $r_2 \in R_2$ так, что $\|r_1 - r_2\| = \rho(r_1, R_2)$. Тогда

$$d_1 \le \|\Phi_{AB_i}(T,0)r_1 + g_{AB_i} - [\Phi_{AB_i}(T,0)r_2 + g_{AB_i}]\| \le$$

$$\le \|\Phi_{AB_i}(T,0)\|\rho(r_1,R_2) \le \|\Phi_{AB_i}(T,0)\|h(R_1,R_2).$$

Аналогично $d_2 \le \|\Phi_{AB_i}(T,0)\|h(R_1,R_2)$. Таким образом,

$$h(\psi(R_1),\psi(R_2)) \le h(R_1,R_2) \sup_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \|\Phi_{AB_i}(T,0)\|.$$

Покажем, что $\sup_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \|\Phi_{AB_i}(T,0)\| < 1$.

Поскольку в силу леммы 2 множество матрицантов $\Phi_{\mathcal{AB}_i}(T,0)$ компактно в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{n\times n})$, $\|\cdot\|$ — непрерывная функция, по теореме Вейерштрасса

$$\sup_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \|\Phi_{AB_i}(T,0)\| = \max_{\substack{A(t)\in\mathcal{A}(t)\\ B_i\in\mathcal{B}_i}} \|\Phi_{AB_i}(T,0)\| < 1.$$

Таким образом, $\psi(R)$ — оператор сжатия и по теореме Банаха [12] он имеет единственную неподвижную точку $R_0 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, т. е. уравнение (15) имеет единственное решение.

Следовательно, включение (1), (2) имеет единственное T-периодическое R-решение.

***Пример* 1.** Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = ux + 1, \quad u \in [-2,-1], \quad u = \mathrm{const},$$

$$\Delta x|_{t=m} = x, \quad m \in \mathbb{Z},$$

которую можно записать в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in \mathcal{A}x + 1, \quad \mathcal{A} = \{u\colon u \in [-2,-1]\}, \tag{16}$$

$$\Delta x|_{t=m} = x, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Правая часть является 1-периодической. Начальные множества 1-периодических R-решений определяются уравнением (15), которое в данном случае имеет вид

$$R_0 = \bigcup_{u\in[-2,-1]} \left\{2e^u R_0 + \frac{e^u - 1}{u}\right\}. \tag{17}$$

Поскольку $\|\Phi_u(1,0)\| = 2e^u < 1$ для всех $u \in [-2,-1]$, в силу теоремы 2 уравнение (17) имеет единственное решение $R_0 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R})$. Учитывая, что R_0 — связное множество в $\mathbb{R}$, имеем $R_0 = [a,b]$. Тогда уравнение (17) сводится к следующему:

$$[a,b] = \left[2e^{-2}a - \frac{e^{-2}-1}{2},\ \ 2e^{-1}b - (e^{-1}-1)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2e^{-2}a - \frac{e^{-2}-1}{2}, \\ b = 2e^{-1}b - (e^{-1}-1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{e^2-1}{2(e^2-2)}, \\ b = \dfrac{e-1}{e-2}. \end{cases}$$

Таким образом, $R_0 = \left[\dfrac{e^2-1}{2(e^2-2)}, \dfrac{e-1}{2(e-2)}\right]$. Следовательно, включение (16) имеет единственное 1-периодическое R-решение $R\left(t, \left[\dfrac{e^2-1}{e^2-2}, \dfrac{e-1}{2(e-2)}\right]\right)$.

1. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. – 206 с.
2. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
3. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1 – 12.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
5. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 275 p.
6. *Erbe L., Krawcewicz W.* Existence of solutions to boundary value problems for impulsive second order differential inclusions // Rocky Mt. J. Math. – 1992. – **22**, № 2. – P. 519 – 539.
7. *Watson P. J.* Impulsive differential inclusions // Nonlinear World. – 1997. – **4**, № 4. – P. 395 – 402.
8. *Плотникова Н. В.* Периодические решения линейных импульсных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 495 – 515.
9. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **169**. – С. 194 – 252.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
11. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – № 6. – С. 465 – 478.
12. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.

Получено 09.10.06,
после доработки — 22.05.07