УДК 517.51

О. О. Карлова, В. В. Михайлюк (Чернів. нац. ун-т)

СЛАБКІ ЛОКАЛЬНІ ГОМЕОМОРФІЗМИ ТА *B*-СПРИЯТЛИВІ ПРОСТОРИ

Let X and Y be topological spaces such that every mapping $f\colon X \to Y$ for which the set $f^{-1}(G)$ is an F_σ-set in X for any set G open in Y can be represented as a pointwise limit of continuous mappings $f_n\colon X \to Y$. The question of subspaces Z of the space Y for which mappings $f\colon X \to Z$ have the same property is investigated.

Пусть X и Y — такие топологические пространства, что произвольное отображение $f\colon X \to Y$, для которого каждый прообраз $f^{-1}(G)$ открытого в Y множества G является F_σ-множеством в X, можно представить в виде поточечной границы непрерывных отображений $f_n\colon X \to Y$. Исследуется, для каких подпространств Z пространства Y отображения $f\colon X \to Z$ имеют такое же свойство.

1. Нехай X та Y — топологічні простори. Символом $H_1(X, Y)$ будемо позначати сукупність усіх відображень f: $X \to Y$ першого класу Лебега, тобто таких, що для довільної відкритої в Y множини G прообраз $f^{-1}(G)$ є множиною типу F_σ в X. Сукупність усіх відображень f: $X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто поточкових границь послідовностей неперервних відображень, позначатимемо через $B_1(X, Y)$.

Згідно з теоремою Лебега – Гаусдорфа [1, с. 402] має місце рівність $H_1(X, Y) = B_1(X, Y)$, якщо X — метричний простір, а $Y = [0,1]^m$, де $m \leq \aleph_0$. Подальші дослідження зв'язків між першим берівським і першим лебегівським класами проводились багатьма математиками: С. Ролевичем, Ч. Стігаллом, Р. Ганселлом, М. Фосгерау, Л. Веселим та ін. З одержаних ними результатів випливає, що рівність $H_1(X, Y) = B_1(X, Y)$ є правильною, якщо:

1) X — метричний простір, Y — сепарабельна опукла підмножина банахового простору [2];

2) X — повний метричний простір, Y — банаховий простір [3];

3) X — нормальний простір, Y — повний сепарабельний метричний абсолютний ретракт [4];

4) X — метричний простір, Y — метричний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір [5];

5) X — нормальний простір, Y — метричний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір [6].

Нехай X — деякий топологічний простір. Топологічний простір Y будемо називати *B-сприятливим для простору* X, якщо має місце включення $H_1(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$. Сукупність усіх B-сприятливих для X просторів будемо позначати символом $\mathcal{B}(X)$. Якщо виконується включення $B_1(X, Y) \subseteq H_1(X, Y)$, то простір Y будемо називати *H-сприятливим для* X і символом $\mathcal{H}(X)$ позначати сукупність усіх H-сприятливих для X просторів. У випадку, коли має місце рівність $H_1(X, Y) = B_1(X, Y)$, простір Y називатимемо *BH-сприятливим для* X і позначатимемо сукупність усіх таких просторів через $\mathcal{BH}(X)$.

Зауважимо, що у випадках 1 – 5 простір значень Y є метризовним. Що стосується неметризовних просторів значень, то у [7] було встановлено, що строга індуктивна границя Y послідовності локально опуклих метризовних просторів є BH-сприятливим простором для спадково берівського сепарабельного метризовного простору X.

Нехай E — підпростір топологічного простору Y. Легко бачити, що якщо простір Y є H-сприятливим для H, то E також є H-сприятливим для X простором. Якщо ж $Y \in \mathcal{B}(X)$, то, взагалі кажучи, $E \notin \mathcal{B}(X)$, як показує приклад з [1, с. 400]. Справді, нехай $Y = [0,1]$ і $E = \{0,1\}$. Тоді $Y \in \mathcal{B}([0,1])$, але $E \notin \mathcal{B}([0,1])$, адже характеристична функція $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ одноточкової множини належить до першого класу Лебега, але не є першого класу Бера. Тому постало питання: які підпростори B-сприятливого простору Y будуть B-сприятливими?

У цій статті ми з'ясовуємо, що ретракт B-сприятливого простору буде B-сприятливим і кожна опукла підмножина з непорожньою внутрішністю, яка міститься в B-сприятливому топологічному векторному просторі, також буде B-сприятливою.

У роботі [8] було введено поняття слабкого локального гомеоморфізму і доведено, що для топологічного простору X, ліндельофового простору Y, топологічного простору Z, слабкого локального гомеоморфізму $\varphi\colon Z \to Y$ і відображення $f \in H_1(X,Y)$ існує відображення $g \in H_1(X,Z)$ таке, що $f = \varphi \circ g$. Цей результат ми називаємо *теоремою про підняття.*

Нагадаємо, що неперервне відображення $\varphi\colon X \to Y$ *є слабким локальним гомеоморфізмом*, якщо для довільної точки $y \in Y$ існують її відкритий окіл V і відкрита в X множина $U \subseteq \varphi^{-1}(V)$ такі, що $\varphi|_U\colon U \to V$ — гомеоморфізм. Будемо говорити, що простір Y *слабко накривається простором* Z, якщо існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi\colon Z \to Y$. Виявляється, що якщо простір Y слабко накривається B-сприятливим простором Z, то і простір Y є B-сприятливим. Таким чином, природним є питання про існування слабкого локального гомеоморфізму. В [9] було доведено, що довільна відкрита зв'язна підмножина нормованого сепарабельного простору слабко накривається самим простором. Тут ми покажемо, що для довільного відкритого ліндельофового лінійно зв'язного підпростору G топологічного векторного простору Y існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi\colon Y \to G$.

Насамкінець ми доведемо, що ліндельофовий простір Y, який слабко накривається метризовним сепарабельним лінійно зв'язним і локально лінійно зв'язним простором (тобто B-сприятливим для нормального простору X), також є метризовним сепарабельним лінійно зв'язним і локально лінійно зв'язним.

2. Нагадаємо, що *ретрактом* простору X [10, с. 12] називається множина E, для якої існує неперервне відображення (*ретракція*) $r\colon X \to E$ таке, що $r(x) = x$ при $x \in E$.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — B-сприятливий для X топологічний простір і E — ретракт простору Y. Тоді $E \in \mathcal{B}(X)$.*

Доведення. Нехай $f \in H_1(X,E)$. Тоді $f \in H_1(X,Y)$. Оскільки $Y \in \mathcal{B}(X)$, то існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $g_n\colon X \to Y$ така, що $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. З того, що множина E є ретрактом простору Y, випливає, що існує таке неперервне відображення $r\colon Y \to E$, що $r(y) = y$, якщо $y \in E$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $f_n = r \circ g_n$. Зрозуміло, що відображення $f_n\colon X \to E$ неперервні для кожного n. Крім того,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} r(g_n(x)) = r(f(x)) = f(x),$$

оскільки $f(x) \in E$. Отже, $f \in B_1(X,E)$.

Перейдемо тепер до випадку, коли E — опукла підмножина топологічного векторного простору Y. Почнемо з допоміжного твердження.

Лема 1. *Нехай Y — топологічний векторний простір, G — опуклий окіл нуля в Z і $q > 1$. Тоді $\overline{G} \subseteq qG$.*

Доведення. Нехай $z \in \overline{G}$ і $q = 1 + \delta$, де $\delta > 0$. Зрозуміло, що $U = -\delta G$ — також окіл нуля в Y. Тоді $(z + U) \bigcap G \neq \varnothing$, звідси випливає, що існують елементи $u \in G$ і $y \in G$ такі, що $y = z - \delta u$. Тоді

$$z = y + \delta u \in G + \delta G = (1+\delta) G = qG,$$

адже множина G є опуклою.

Твердження 2. *Нехай Y — топологічний векторний простір, E — опуклий окіл нуля в Y. Тоді формулою*

$$p(y) = \sup\{0 < t \leq 1 \colon ty \in \operatorname{int} E\},$$

визначається відображення $p \colon Y \to (0,1]$, яке є неперервним.

Доведення. Позначимо $G = \operatorname{int} E$, $G_0 = Y$ і $G_t = \frac{1}{t} G$. Очевидно, що множини G_t є опуклими і відкритими в просторі Y. У цих позначеннях функція p діє за правилом $p(y) = \sup\{0 < t \leq 1 \colon y \in G_t\}$. Те, що функцію p визначено на всьому просторі Y, безпосередньо випливає з радіальності множини G.

Покажемо, що для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ множини $p^{-1}((\varepsilon, 1])$ і $p^{-1}((0,\varepsilon))$ є відкритими в $(0,1]$. Зафіксуємо $0 < \varepsilon < 1$. Нерівність $p(y) > \varepsilon$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує таке $t > \varepsilon$, що $y \in G_t$. Таким чином, $p^{-1}((\varepsilon,1]) = \bigcup_{t > \varepsilon} G_t$. Звідси випливає, що множина $p^{-1}((\varepsilon,1])$ є відкритою в $(0,1]$. Нерівність $p(y) < \varepsilon$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує $s < \varepsilon$ таке, що $y \notin G_s$. Згідно з лемою 1 при $s < t$ точка y не належить до множини $\overline{G}_t$. Отже, $p^{-1}((0,\varepsilon)) = \bigcup_{t<\varepsilon} (Y \setminus \overline{G}_t)$. Тоді множина $p^{-1}((0,\varepsilon))$ також є відкритою в Y.

Зауважимо, що $p(y) = 1$, якщо $y \in E$. Крім того, якщо $0 < \lambda < p(y)$, то $\lambda y \in E$.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — B-сприятливий для X топологічний векторний простір, E — опукла підмножина простору Y така, що $\operatorname{int} E \neq \varnothing$. Тоді $E \in \mathcal{B}(X)$.*

Доведення. Оскільки зсуви в топологічному векторному просторі є гомеоморфізмами, то можна вважати, що $0 \in \operatorname{int} E$.

Нехай $f \in H_1(X, E)$. Тоді $f \in H_1(X, Y)$. Оскільки $Y \in \mathcal{B}(X)$, то існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $f_n \colon X \to Y$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. Згідно з твердженням 2 функція $p \colon Y \to (0,1]$, яка визначається формулою $p(y) = \sup\{0 < t \leq 1 \colon ty \in \operatorname{int} E\}$, є неперервною. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ покладемо

$$g_n(x) = \frac{n}{n+1} p(f_n(x)) f_n(x).$$

Оскільки $\frac{n}{n+1} p(f_n(x)) < p(f_n(x))$, то $g_n(x) \in E$, причому відображення $g_n \colon X \to E$ є неперервним для кожного n. Зафіксуємо $x \in X$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = p(f(x)) f(x) = f(x),$$

адже $p(f(x)) = 1$, оскільки $f(x) \in E$. Отже, $E \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — ліндельофовий простір, Z — B-сприятливий для X топологічний простір, який слабо накриває простір Y. Тоді $Y \in \mathcal{B}(X)$.*

Доведення. Нехай $f \in H_1(X, Y)$ і $\varphi: Z \to Y$ — слабкий локальний гомеоморфізм. З теореми про підняття випливає, що існує відображення $g \in H_1(X, Z)$ таке, що $f(x) = \varphi(g(x))$ для всіх $x \in X$. З того, що $Z \in \mathcal{B}(X)$, випливає, що $g \in B_1(X, Z)$. Тому існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $g_n: X \to Z$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ для кожного $x \in X$. Покладемо $f_n(x) = \varphi(g_n(x))$. Зрозуміло, що відображення $f_n: X \to Y$ є неперервним. Якщо $x \in X$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n(x)) = \varphi(g(x)) = f(x).$$

Отже, $f \in B_1(X, Y)$. Таким чином, $Y \in \mathcal{B}(X)$.

3. Нехай X — векторний простір, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ і $\mathbb{Q}_2^+$ — множина всіх додатних двійково-раціональних чисел. Послідовність $(V_n : n \in \mathbb{N}_0)$ непорожніх заокруглених підмножин V_n простору X називається *двійчастою*, якщо $V_0 = X$ і $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Кожному числу $r \in \mathbb{Q}_2^+$ співставимо підмножину U_r з простору X за правилом $U_r = \alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_n V_n$, якщо $r = (0, \alpha_1 \ldots \alpha_n)_2$, і $U_r = V_0$, якщо $r \geq 1$, де $(0, \alpha_1 \ldots \alpha_n)_2 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{2^k} = r$, $\alpha_k \in \{0, 1\}$ при $k = 1, \ldots, n-1$ і $\alpha_n = 1$. Сім'я $\left(U_n : r \in \mathbb{Q}_2^+\right)$ називається *двійчастою сім'єю*, породженою послідовністю $(V_n : n \in \mathbb{N}_0)$.

Для кожного $x \in X$ позначимо $A_x = \left\{r \in \mathbb{Q}_2^+ : x \in U_r\right\}$. Визначимо функцію $f: X \to \mathbb{R}$ таким чином:

$$f(x) = \inf A_x$$

і будемо називати її *функцією, породженою двійчастою послідовністю* (V_n) [11, с. 53].

Лема 2. *Нехай Y — гаусдорфовий топологічний векторний простір, V — відкритий заокруглений окіл нуля в Y і $U = V + V + V + V$. Тоді існує неперервна функція $f: Y \to [0, 1]$ така, що $f(y) = 1$, якщо $y \in V$, і $f(y) = 0$, якщо $y \in Y \setminus U$.*

Доведення. Позначимо $V_0 = Y$, $V_1 = U$, $V_2 = V + V$, $V_3 = V$ і виберемо для кожного $m \geq 4$ такий заокруглений окіл нуля V_m, що $V_m + V_m \subseteq V_{m-1}$. Розглянемо функцію $g: Y \to [0, 1]$, що породжена послідовністю $(V_m)_{m=1}^{\infty}$, і неперервне відображення $h: \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ таке, що $h\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ і $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Для кожного $y \in Y$ покладемо $f(y) = h\left(\max\left\{\frac{1}{4}, \min\left\{g(y), \frac{1}{2}\right\}\right\}\right)$. Зрозуміло, що функція $f: Y \to [0, 1]$ є неперервною. Якщо $y \in V = V_3$, то $g(y) < \frac{1}{4}$ і $f(y) = h\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Якщо ж $y \notin U = V_1$, то $g(y) \geq \frac{1}{2}$ і $f(y) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Теорема 3. *Нехай Y — гаусдорфовий топологічний векторний простір і G — відкритий непорожній ліндельофовий лінійно зв'язний підпростір простору*

Y. Тоді існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi: Y \to G$.

Доведення. Будемо вважати, що простір Y є ненульовим. Виберемо заокруглений окіл нуля V_0 в Y і точку $y_0 \in Y$ так, щоб $y_0 \notin V_0 + V_0 + V_0 + V_0$. Для кожної точки $y \in G$ виберемо відкритий заокруглений окіл нуля U_y такий, що $y + U_y + U_y + U_y + U_y \subseteq G$ і $\underbrace{U_y + \ldots + U_y}_{16 \text{ разів}} \subseteq V_0$. Оскільки простір G ліндельофовий, то існує послідовність точок y_n з G така, що $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(y_n + U_{y_n}\right)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $U_n = U_{y_n}$, $V_n = U_n + U_n + U_n + U_n$, $W_n = \underbrace{U_n + \ldots + U_n}_{16 \text{ разів}}$ і зафіксуємо довільну точку $y^* \in G$.

Згідно з лемою 2 для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $f_n: Y \to [0,1]$ така, що $f_n(y) = 1$, якщо $y \in U_n$, і $f_n(y) = 0$, якщо $y \notin V_n$. Розглянемо відображення $g_n: Y \to Y$, $g_n(y) = f_n(y) \cdot y$. Відображення g_n, очевидно, є неперервним, причому $g_n(y) \in V_n$ для всіх $y \in Y$, адже множина V_n є заокругленою.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$, згідно з лемою 2, існує неперервна функція $h_n: Y \to [0,1]$ така, що $h_n(y) = 1$, якщо $y \in V_n$, і $h_n(y) = 0$, якщо $y \notin W_n$.

Оскільки множина G є лінійно зв'язною, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існую неперервне відображення $\gamma_n: [0,1] \to G$ таке, що $\gamma_n(0) = y^*$ і $\gamma_n(1) = y_n$.

Для кожного $y \in Y$ покладемо

$$\psi_n(y) = \begin{cases} y_n + g_n(y), & \text{якщо} \quad y \in V_n, \\ \gamma_n(h_n(y)), & \text{якщо} \quad y \notin V_n. \end{cases}$$

Зауважимо, що $y_n + g_n(y) \in y_n + V_n \subseteq G$, тому $\psi_n(Y) \subseteq G$. Оскільки відображення g_n, γ_n і h_n є неперервними, то для того, щоб показати, що відображення $\psi_n: Y \to G$ є неперервним, досить перевірити, що для всіх $y \in \overline{V_n} \setminus V_n$ виконується рівність $y_n + g_n(y) = \gamma_n(h_n(y))$. Нехай $y \in \overline{V_n} \setminus V_n$. Оскільки $y \notin V_n$, то $g_n(y) = 0$, тобто $y_n + g_n(y) = y_n$. З іншого боку, $y \in \overline{V_n}$, тому $h_n(y) = 1$, отже, $\gamma_n(h_n(y)) = y_n$. Таким чином, відображення $\psi_n: Y \to G$ є неперервним.

Для всіх $n \in \mathbb{N}$ позначимо $A_n = ny_0 + U_n$ і $B_n = ny_0 + W_n$. Для кожного $y \in Y$ покладемо

$$\varphi(y) = \begin{cases} \psi_n(y - ny_0), & \text{якщо} \quad y \in B_n \quad \text{для деякого} \quad n, \\ y^*, & \text{якщо} \quad y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \end{cases}$$

Перевіримо, що відображення $\varphi: Y \to G$ є неперервним. Покажемо спочатку, що послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ є дискретною. Справді, нехай $y \in Y$ і $n \neq m$. Припустимо, що $(y + V_0) \cap (ny_0 + V_0) \neq \varnothing$ і $(y + V_0) \cap (my_0 + V_0) \neq \varnothing$. Тоді існують точки v_1, v_2, v_3, $v_4 \in V_0$ такі, що $y + v_1 = ny_0 + v_2$ і $y + v_3 = my_0 + v_4$. Тоді $(n - m)y_0 = v_1 - v_3 + v_4 - v_2 \in V_0 + V_0 + V_0 + V_0$, звідки $y_0 \in \frac{1}{n-m}(V_0 + V_0 + V_0 + V_0) \subseteq V_0 + V_0 + V_0 + V_0$, адже множина V_0 є заокругленою. А це суперечить вибору V_0. Таким чином, окіл $y + V_0$ перетинається щонайбільше з однією з множин $(ny_0 + V_0)$. Отже, послідовність $(ny_0 + V_n)_{n=1}^{\infty}$ є дискретною, а тому і послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ дискретна, бо $B_n \subseteq ny_0 + V_0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $y \in Y$ і U — відкритий окіл точки y, який перетинається не більше ніж з однією множиною з послідовності $(B_n)_{n=1}^{\infty}$. Якщо $U \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \varnothing$, то $\varphi|_U = y^*$. Якщо ж $U \cap B_k \neq \varnothing$ для деякого k, то $U \cap B_n = \varnothing$ для всіх $n \neq k$, $\varphi(y) = \psi_k(y - ky_0)$ при $y \in U \cap B_k$ і $\varphi(y) = y^*$ при $y \in U \setminus B_k$, тобто $\varphi|_U = \psi_k|_U$. Отже, відображення $\varphi\colon Y \to G$ є неперервним.

Якщо $y \in G$, то існує номер n такий, що $y \in y_n + U_n$. Тоді відображення $\varphi|_{A_n} = \psi|_{A_n}\colon A_n \to (y_n + U_n)$ є гомеоморфізмом, бо $\psi_n(ny_0 + y') = y_n + y'$ для всіх $y' \in U_n$. Таким чином, відображення $\varphi\colon Y \to G$ є слабким локальним гомеоморфізмом.

З результатів [7] і теореми 2 безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай Y — строга індуктивна границя зростаючої послідовності метризовних локально опуклих просторів і G — відкритий ліндельофовий лінійно зв'язний підпростір простору Y. Тоді G — B-сприятливий простір для спадково берівського сепарабельного метризовного простору X.*

Лема 3. *Нехай X — регулярний простір, $\{G_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — локально скінченне відкрите покриття простору X метризовними підпросторами G_n. Тоді простір X є метризовним.*

Доведення. Згідно з метризаційною теоремою Бінга [12, с. 418] у просторі G_n для кожного n існує σ-дискретна база $\mathcal{U}_n$. Нехай $\mathcal{U}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m}$, де система $\mathcal{U}_{n,m}$ є дискретною в G_n для кожного m.

Покажемо, що система $\mathcal{V}_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m}$ є локально скінченною в X для кожного m. Справді, нехай $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$. Позначимо $N_0 = \{n \in \mathbb{N}: x \in G_n\}$. Оскільки покриття $\{G_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ є локально скінченним, то множина N_0 скінченна. Для кожного $n \in N_0$ існує відкритий в G_n окіл U_n точки x, який перетинається не більше ніж з однією множиною з системи $\mathcal{U}_{n,m}$. Покладемо $V = \bigcap_{n \in N_0} U_n$. Оскільки множина N_0 є скінченною і всі U_n відкриті в G_n, а отже, і в X, то множина V є відкритою в X. Зрозуміло, що V перетинається не більш ніж з $|N_0|$ множинами з системи $\mathcal{U}_{n,m}$. Таким чином, для кожного m система $\mathcal{V}_m$ є локально скінченною в X.

Покладемо $\mathcal{V} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_m$ і покажемо, що $\mathcal{V}$ — база у просторі X. Нехай G — відкрита в X множина. Тоді $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap G_n)$. Оскільки для кожного n множини $G \cap G_n$ є відкритими в G_n, то існує така система $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{U}_n$, що $G \cap G_n = \bigcup \mathcal{A}_n$. За побудовою, $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, тому $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{V}$. Отже, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_n$.

Таким чином, $\mathcal{V}$ — σ-локально скінченна база у просторі X. Згідно з метризаційною теоремою Нагати – Смірнова [12, с. 416] простір X є метризовним.

Теорема 5. *Нехай Y — метризовний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір, X — ліндельофовий простір і $\varphi\colon Y \to X$ — слабкий локальний гомеоморфізм. Тоді X — метризовний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір.*

Доведення. Оскільки $\varphi: Y \to X$ — слабкий локальний гомеоморфізм, то для кожного $x \in X$ існують відкритий окіл U_x точки x і відкрита в Y множина V_x такі, що $\varphi|_{V_x}: V_x \to U_x$ — гомеоморфізм. З того, що простір X є ліндельофовим, випливає, що існує зліченне підпокриття $\mathcal{U} = \{U_{x_n}: n \in \mathbb{N}\}$ покриття $\{U_x: x \in X\}$. Згідно з [12, с. 444] простір X є паракомпактним, тому існує локально скінченне відкрите покриття $\mathcal{G} = \{G_x: n \in \mathbb{N}\}$, вписане в $\mathcal{U}$.

Оскільки для кожного n підпростір G_n гомеоморфний деякому метризовному підпростору Y, то G_n — метризовний підпростір простору X. Згідно з лемою 3 простір X є метризовним.

Лінійна зв'язність простору X випливає з того, що він є неперервним образом лінійно зв'язного простору.

Покажемо, що простір X є локально лінійно зв'язним. Нехай $x \in X$ і U — окіл точки x. Існує відкрита в Y множина $V \subseteq V_x$ така, що $\varphi|_V: V \to U \bigcap U_x$ — гомеоморфізм. Оскільки Y — локально лінійно зв'язний простір, то існує відкритий лінійно зв'язний окіл W точки $(\varphi|_V)^{-1}(x)$ такий, що $W \subseteq V$. Тоді $\varphi|_V(W)$ — відкритий лінійно зв'язний окіл точки x такий, що $\varphi|_V(W) \subseteq U$.

З того, що простір X є метризовним і ліндельофовим, випливає, що він є сепарабельним.

1. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.
2. *Rolewic S.* On inversion of non-linear transformations // Stud. Math. – 1958. – **17**. – P. 79 – 83.
3. *Stegall C.* Functions of the first Baire class with values in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – **111**. – P. 981 – 991.
4. *Hansell R.* Lebesgue's theorem on Baire class 1 functions // Topology with Appl., Szekszárd (Hungary). – 1993. – P. 251 – 257.
5. *Fosgerau M.* When are Borel functions Baire functions? // Fund. math. – 1993. – **143**. – P. 137 – 152.
6. *Veselý L.* Characterization of Baire-one functions between topological spaces // Acta Univ. carol. Math. et phys. – 1992. – **33**, № 2. – P. 143 – 156.
7. *Karlova O. O., Mykhaylyuk V. V.* On Baire one mappings and Lebesgue one mappings with values in inductive limits // Мат. студ. – 2006. – **25**, № 1. – С. 103 – 107.
8. *Карлова О. О.* Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191 – 192. – С. 52 – 60.
9. *Карлова О. О.* Про належність до першого класу Бера відображень зі значеннями в областях // Мат. студ. – 2005. – **23**, № 2. – С. 221 – 224.
10. *Борсук К.* Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 292 с.
11. *Маслюченко В. К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Одержано 15.12.06