УДК 517.51

S. A. Stasgk (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

NAYLUÇÎEE m-ÇLENNOE TRYHONOMETRYÇESKOE PRYBLYÛENYE KLASSOV $B^r_{p,\theta}$ FUNKCYJ MALOJ HLADKOSTY

We obtain an exact-order estimate of the best m-term trigonometric approximation of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions of low smoothness in the space L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Одержано точну за порядком оцінку найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Бесова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$.

В настоящей работе исследуется наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций d переменных в пространстве L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$, при $d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r < \frac{d}{p}$. Установленная точная по порядку оценка указанной величины дополняет результаты, полученные Р. А. ДеВором и В. Н. Темляковым [1]. Более подробно об этом будет идти речь в комментариях к результату работы, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, обозначает d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi; \pi]$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, для которых

$$\|f\|_p = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad 1 \le p < \infty.$$

Для $f \in L_1(\pi_d)$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$f_0(x) = \hat{f}(0), \quad f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max|k_j| < 2^s \\ k_j \in \mathbb{Z},\, j = \overline{1,d}}} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$, а

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)}\, dt$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Прежде чем привести определение рассматриваемых классов функций сделаем следующее замечание. В последующих рассуждениях мы будем использовать определения классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, и $H^r_p \equiv B^r_{p,\infty}$ в так называемом декомпозиционном виде. С точностью до абсолютных постоянных эти определения эквивалентны исходным, которые даны в [2] и [3] соответственно для классов $B^r_{p,\theta}$ и H^r_p.

Итак, в принятых обозначениях классы $B^r_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$, можно определить следующим образом (см., например, [4]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in Z_+} 2^{rs\theta} \|f_s(\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s \in Z_+} 2^{rs} \|f_s(\cdot)\|_p \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \tag{2}$$

Как отмечалось выше, $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, где H^r_p — известные классы С. М. Никольского [3]. Отметим, что с точки зрения оценок некоторых аппроксимативных характеристик классы $B^r_{p,\theta}$ и H^r_p исследовались в работах [1] и [5 – 8], в которых можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

Пусть Θ_m — набор из m d-мерных целочисленных векторов, т. е. $\Theta_m = \{n_k = (n_{k_1}, \ldots, n_{k_d}),\ n_k \in Z^d,\ k = \overline{1, m}\}$. Положим

$$P(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_{n_k} e^{i(n_k, x)}$$

и для $f \in L_q(\pi_d)$ рассмотрим величину

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m, \cdot)} \|f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)\|_q,$$

которую называют наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции f.

Для функционального класса $F \subset L_q(\pi_d)$ полагаем

$$\sigma_m(F)_q = \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \tag{3}$$

Величина $\sigma_m(f)_2$ для функций одной переменной была введена С. Б. Стечкиным [9] при формулировке критерия абсолютной сходимости ортогональных рядов. Первые оценки величины $\sigma_m(f)_\infty$ для некоторых конкретных функций были получены Р. С. Исмагиловым [10]. Несколько позже исследования величин $\sigma_m(F)_q$ для тех или иных функциональных классов проводились в работах многих авторов (см., например, [1, 11 – 17]), где можно ознакомиться с более подробной информацией по данному вопросу.

Сформулируем некоторые утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

Теорема A [4]. *Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные константы $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что для каждой функции $f \in L_p(\pi_d)$ справедлива оценка*

$$C_1(p) \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s \in Z_+} |f_s(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2(p) \|f\|_p. \tag{4}$$

Соотношение (4) является аналогом известного утверждения Литтлвуда – Пэли.

Теорема B [3]. *Пусть*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k \, e^{i(k,x)},$$

где $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *тогда при* $1 \le p < q \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|t\|_q \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/p-1/q} \|t\|_p. \qquad (5)$$

Неравенство (5) установлено С. М. Никольским и называется „неравенством разных метрик".

Лемма A [15]. *Пусть* $2 < q < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $P(\Theta_N, x)$ *и для любого* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Theta_M, x)$, *для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Theta_N,\cdot) - P(\Theta_M,\cdot)\|_q \le C(q)\sqrt{NM^{-1}}\,\|P(\Theta_N,\cdot)\|_2,$$

причем $\Theta_M \subset \Theta_N$.

Полученные оценки будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Если для положительных функций $\mu_1 = \mu_1(n)$, $\mu_2 = \mu_2(n)$ натурального аргумента выполняется неравенство $\mu_1(n) \le C_1\mu_2(n)$, где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная, то это соотношение будем записывать в виде $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$. Если же имеют место соотношения $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ и $\mu_2(n) \ll \ll \mu_1(n)$, то будем писать $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$. Отметим, что постоянные C_j, $j = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от параметров, определяющих классы, метрики L_q и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Прежде чем перейти непосредственно к формулировке и доказательству основного результата работы сделаем следующие замечания.

Основная трудность при доказательстве полученного нами утверждения состоит в установлении оценок сверху величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$. Метод, разработанный Р. А. ДеВором и В. Н. Темляковым [1] для доказательства оценок сверху величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$, не позволяет получить соответствующие оценки сверху этой величины в случае малой гладкости. Поэтому мы используем метод, предложенный Э. С. Белинским [14] в одномерном случае при исследовании величин наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов $B^r_{p,\theta}$.

Отметим также, что поскольку в формулируемом ниже утверждении параметр θ принимает и предельное значение $\theta = \infty$, согласно принятым обозначениям в этом утверждении содержится соответствующий результат и для классов С. М. Никольского H^r_p.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда при* $d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r < \frac{d}{p}$ *выполняется порядковое соотношение*

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}\left(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Поскольку правая часть (6) не зависит от θ, а при $1 \le$

$\le \theta \le \infty$ имеют место вложения $B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\infty}$, оценку сверху в (6) будем устанавливать для классов $B^r_{p,\infty}$, а снизу — для классов $B^r_{p,1}$.

Докажем сначала оценку сверху. Пусть m — произвольное натуральное число, а $n \in N$ таково, что $2^{dn} < m \le 2^{d(n+1)}$. Пусть $f \in B^r_{p,\infty}$. Известно [4], что в этом случае

$$f(x) = \sum_{s \in Z_+} f_s(x), \tag{7}$$

и при этом, как видно из (2),

$$\| f_s(\cdot)\|_p \le 2^{-rs}. \tag{8}$$

Приближающий полином, доставляющий для f требуемую оценку приближения, будем подбирать в виде

$$P(\Theta_m, x) = \sum_{s=0}^{n-1} f_s(x) + \sum_{n \le s < qn/2} P(\Theta_{N_s}, x), \tag{9}$$

где полиномы $P(\Theta_{N_s}, x)$ будут построены для каждого „блока“ $f_s(x)$ согласно лемме А, а числа N_s подберем в виде

$$N_s = \left[2^{nd} 2^{s\left(\frac{d}{p} - r\right)} 2^{-\frac{qn}{2}\left(\frac{d}{p} - r\right)} \right] + 1, \tag{10}$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Убедимся, что при таком выборе чисел N_s полином (9) содержит по порядку не больше, чем m гармоник. Действительно,

$$\sum_{s=0}^{n-1} \#\left\{k = (k_1, \ldots, k_d) : 2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s,\ j = \overline{1,d}\right\} +$$

$$+ \sum_{n \le s < qn/2} N_s \ll 2^{dn} + \left(\frac{q}{2} - 1\right)n + 2^{dn} 2^{-\frac{qn}{2}\left(\frac{d}{p} - r\right)} \sum_{n \le s < qn/2} 2^{s\left(\frac{d}{p} - r\right)} \ll$$

$$\ll 2^{dn} + \left(\frac{q}{2} - 1\right)n + 2^{dn} 2^{-\frac{qn}{2}\left(\frac{d}{p} - r\right)} 2^{\frac{qn}{2}\left(\frac{d}{p} - r\right)} \ll 2^{dn} \asymp m,$$

где $\#M$ обозначает количество элементов множества M.

Таким образом, учитывая разложение (7), согласно (9), неравенству Минковского, а также теореме А будем иметь

$$\| f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)\|_q \ll \left\| \left(\sum_{n \le s < qn/2} \left| f_s(\cdot) - P(\Theta_{N_s}, \cdot)\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{qn/2 \le s < \infty} f_s(\cdot) \right\|_q = I_1 + I_2. \tag{11}$$

Для оценки слагаемого I_2 воспользуемся неравенствами Минковского, разных метрик и (8). В результате получим

$$I_2 \le \sum_{qn/2\le s<\infty} \| f_s(\cdot)\|_q \ll \sum_{qn/2\le s<\infty} 2^{ds\left(\frac1p-\frac1q\right)}\| f_s(\cdot)\|_p \le$$

$$\le \sum_{qn/2\le s<\infty} 2^{-s\left(r-d\left(\frac1p-\frac1q\right)\right)} \asymp 2^{-\frac{qdn}{2}\left(\frac rd-\frac1p+\frac1q\right)} \asymp m^{-\frac q2\left(\frac rd-\frac1p+\frac1q\right)}. \qquad (12)$$

Чтобы оценить слагаемое I_1, воспользуемся последовательно неравенством Минковского, леммой А и неравенством разных метрик. Подставляя вместо N_s их значения из (10), имеем

$$I_1 = \left\| \sum_{n\le s<qn/2} \left| f_s(\cdot) - P(\Theta_{N_s},\cdot)\right|^2 \right\|_{q/2}^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\le s<qn/2} \| f_s(\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)\|_q^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n\le s<qn/2} \frac{2^{ds}}{N_s}\| f_s(\cdot)\|_2^2\right)^{1/2} \ll \left(\sum_{n\le s<qn/2} \frac{2^{ds}2^{2ds(1/p-1/2)}}{N_s}\| f_s(\cdot)\|_p^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n\le s<qn/2} \frac{2^{2ds/p}2^{-2rs}}{N_s}\right)^{1/2} \le 2^{-\frac{dn}{2}}2^{\frac{qn}{4}\left(\frac dp - r\right)}\left(\sum_{n\le s<qn/2} 2^{s\left(\frac dp - r\right)}\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{dn}{2}} 2^{\frac{qn}{4}\left(\frac dp-r\right)} 2^{\frac{qn}{4}\left(\frac dp - r\right)} = 2^{-\frac{qdn}{2}\left(\frac rd - \frac1p+\frac1q\right)} \asymp m^{-\frac q2\left(\frac rd-\frac1p+\frac1q\right)}. \qquad (13)$$

Таким образом, подставляя (12) и (13) в (11), получаем требуемую оценку сверху для величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$.

Перейдем к доказательству в (6) оценки снизу. Для этого воспользуемся двойственным соотношением, которое вытекает из более общего результата С. М. Никольского (см., например, [18, с. 25])

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P\in L^\perp(\Theta_m)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \left|\int_{\pi_d} f(x)P(x)\,dx\right|, \qquad (14)$$

где $\frac1p+\frac1{q'}=1$, а $L^\perp(\Theta_m)$ — множество функций, ортогональных подпространству тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из множества Θ_m.

Пусть m — произвольное натуральное число, а $n\in\mathbb{N}$, как и при установлении оценки сверху, выберем из условия $2^{dn} < m \le 2^{d(n+1)}$. Рассмотрим функцию

$$F_{q,n}(x) = \sum_{\substack{|k_j|<2^{[qn/2]}\\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,x)}, \qquad (15)$$

на основании которой построим функцию $P(x)$ из (14).

Пусть Θ_m — произвольный набор из m векторов с целочисленными координатами. Положим

$$g(x) = F_{q,n}(x) - \sum^{*}_{k\in\Theta_m} e^{i(k,x)},$$

где $\sum^{*}_{k\in\Theta_m} e^{i(k,x)}$ — полином, содержащий только те слагаемые функции $F_{q,n}(x)$, которые имеют „номера" из Θ_m.

Поскольку (см., например, [10])

$$\Big\|\sum_{\substack{|k_j|<2^l\\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,\cdot)}\Big\|_q \asymp 2^{dl\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1<q<\infty, \qquad (16)$$

при $1<q'<2$ согласно (16) находим

$$\|g\|_{q'} \le \|F_{q,n}\|_{q'} + \Big\|\sum^{*}_{k\in\Theta_m} e^{i(k,\cdot)}\Big\|_2 \ll 2^{\frac{dqn}{2}\left(1-\frac{1}{q'}\right)} +$$

$$+\sqrt{m} \asymp 2^{dn/2} + 2^{dn/2} \asymp 2^{dn/2}.$$

Отсюда следует, что функция

$$P_1(x) = C_2\, 2^{-dn/2}\Big(\sum_{\substack{|k_j|<2^{[qn/2]}\\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,x)} - \sum^{*}_{k\in\Theta_m} e^{i(k,x)}\Big) \qquad (17)$$

с соответствующей постоянной $C_2>0$ удовлетворяет условиям, содержащимся в (14).

В качестве $f(x)$ из (14) выберем функцию

$$f_{p,n}(x) = C_3\, 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} F_{q,n}(x), \quad C_3>0, \qquad (18)$$

и покажем, что с некоторой постоянной $C_3>0$ она принадлежит классу $B^r_{p,1}$. Действительно, исходя из (1), (15) и (16), получаем

$$\|f_{p,n}\|_{B^r_{p,1}} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{rs}\|(f_{p,n})_s\|_p \ll 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} \sum_{s=0}^{[qn/2]} 2^{rs}\|(F_{q,n})_s\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} \sum_{s=0}^{[qn/2]} 2^{rs} 2^{ds\left(1-\frac{1}{p}\right)} \asymp 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} 2^{\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} = 1.$$

Таким образом, подставляя (17) и (18) в (14), имеем

$$\sigma_m(f_{p,n})_q \ge \inf_{\Theta_m}\Big|\int_{\pi_d} f_{p,n}(x)P_1(x)\,dx\Big| \gg 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)} 2^{-\frac{dn}{2}}\left(\|F_{q,n}\|_2^2 - m\right) \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{qn}{2}\left(r-\frac{d}{p}+d\right)}\,2^{-\frac{dn}{2}}\,2^{\frac{qdn}{2}} = 2^{-\frac{dqn}{2}\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \asymp m^{-\frac{q}{2}\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Оценка снизу установлена.

Теорема доказана.

Прокомментируем полученный результат. В первую очередь отметим, что в случае $d = 1$ соотношение (6) доказано Э. С. Белинским [14].

Кроме того, порядок величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$, в частности, при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r > \frac{d}{p}$ получен в работе [1] и имеет вид

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \qquad (19)$$

Таким образом, сопоставляя (6) и (19), видим отличие в оценках приближения величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$ при переходе через так называемый критический показатель гладкости $r = \frac{d}{p}$.

Представляется интересным также сравнение полученной нами оценки для $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$ с наилучшим m-членным ортогональным тригонометрическим приближением классов $B^r_{p,\theta}$. Напомним определение этой величины и сформулируем соответствующий результат.

Пусть $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, содержащее m элементов, т. е. $\#\Lambda_m = m$. Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, положим

$$S_{\Lambda_m}(f, x) = \sum_{k \in \Lambda_m} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

и рассмотрим величину

$$e^{\perp}_m(f)_q = \inf_{\Lambda_m} \left\| f(\cdot) - S_{\Lambda_m}(f, \cdot) \right\|_q.$$

Если $F \subset L_q(\pi_d)$ — некоторый класс функций, то полагаем

$$e^{\perp}_m(F)_q = \sup_{f \in F} e^{\perp}_m(f)_q.$$

Величину $e^{\perp}_m(F)_q$ называют наилучшим m-членным ортогональным тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q. Заметим, что согласно определениям $\sigma_m(F)_q$ и $e^{\perp}_m(F)_q$ связаны неравенством $\sigma_m(F)_q \le e^{\perp}_m(F)_q$.

В [7] получен следующий результат.

Теорема V. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p, q) \ne (1, 1), (\infty, \infty)$. *Тогда при* $r > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$ *справедливо соотношение*

$$e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+}, \tag{20}$$

где $a_+ = \max\{a;\, 0\}$.

Таким образом, сопоставляя (6) и (20), видим, что поведение величин $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$ и $e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q$ (в смысле их порядковых значений) при выполнении условий доказанной теоремы различно при $m \to \infty$.

1. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. and Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
2. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
3. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Там же. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
4. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
5. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **142**, № 4. – P. 569 – 587.
6. *Jiang Yanjie, Liu Yongping.* Average widths and optimal recovery of multivariate Besov classes in $L_p(R^d)$ // J. Approxim. Theory. – 2000. – **102**, № 1. – P. 155 – 170.
7. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 513 – 523.
8. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Там же. – № 10. – С. 1348 – 1366.
9. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 2. – С. 37 – 40.
10. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
11. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 5. – С. 1127 – 1130.
12. *Кашин Б. С.* Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 187 – 191.
13. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 301 – 305.
14. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
15. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
16. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
17. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
18. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 27.03.09,
после доработки — 26.10.09