УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. тех. ун-т)

СТРУКТУРА СКІНЧЕННОЇ ІНВЕРСНОЇ НАПІВГРУПИ З НУЛЕМ, КОЖНИЙ СТАБІЛЬНИЙ ПОРЯДОК ЯКОЇ Є ФУНДАМЕНТАЛЬНИМ АБО АНТИФУНДАМЕНТАЛЬНИМ

We find necessary and sufficient conditions for any stable order on a finite inverse semigroup with zero to be fundamental or antifundamental.

Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы любой стабильный порядок на конечной инверсной полугруппе с нулем был фундаментальным или антифундаментальным.

Вступ. У зв'язку з деякими проблемами, що виникали в теорії зображень напівгруп, В. В. Вагнером [1] було введено важливе поняття фундаментального стабільного порядку, а також дано характеристику фундаментального стабільного порядку на напівгрупі. Однак ця характеристика виявилася не зовсім зручною для використання. Згодом Б. М. Шайном у роботі [2] було знайдено іншу (простішу) характеристику, яку в подальшому було використано у роботах [3 – 6]. Різноманітні проблеми, що стосуються фундаментальних порядків на симетричних напівгрупах, систематично вивчав М. Г. Могилевський. Зокрема, у статті [5] доведено, що будь-який стабільний порядок на симетричній інверсній напівгрупі є фундаментальним або антифундаментальним. У статті [8] з'ясовано структуру напівгрупи Манна скінченної довжини, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним. Зрозуміло, що проблема пошуку необхідних і достатніх умов для того, щоб стабільні порядки на інверсній напівгрупі вичерпувалися фундаментальними й антифундаментальними, є цілком актуальною. В даній статті такі необхідні і достатні умови знайдено (див. теорему 1) для скінченної інверсної напівгрупи з нулем. Крім того (див. теорему 2), охарактеризовано напіврешітку ідемпотентів скінченної інверсної напівгрупи з нулем, всі стабільні порядки якої вичерпуються фундаментальними й антифундаментальними. Роботу можна вважати продовженням і розвитком (для скінченного випадку) результатів, одержаних у [7, 8]. Основним результатом статті є теорема 1.

1. Основна термінологія і позначення. Нехай S — довільна напівгрупа, а $\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\operatorname{rank}: S \to \mathbb{N}_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких $a, b \in S$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(ab) \le \min(\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b))$. Число $\operatorname{rank}(x)$ називають рангом елемента x.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напівґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\operatorname{rank}(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напівґратці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [9]).

Частковий порядок η на довільній напівгрупі S називається фундаментальним (див. [1, 2] або [3, с. 289]), якщо існує гомоморфізм f напівгрупи S у напівгрупу $PT(X)$ усіх часткових перетворень деякої множини X такий, що виконується еквівалентність $\langle a, b\rangle \in \eta \Leftrightarrow f(a) \subseteq f(b)$. Легко показати, що за цих умов частковий порядок η є стабільним, а гомоморфізм f — ізоморфізмом. Надалі частковий порядок будемо називати просто порядком. Якщо τ — фундаментальне відношення порядку на напівгрупі S, то відношення порядку τ^{-1} називають антифундаментальним. Огляд результатів про фундаментальні порядки на інверсних напівгрупах можна знайти в [3].

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми. Кажуть, що елемент $b \in E$ є об'єднанням атомів, якщо існує підмножина C множини атомів така, що $\sup C = b$. Якщо елементи $x, y \in E$ непорівнянні, тобто утворюють антиланцюг, то цей факт позначають через $x \| y$.

Нетривіальна інверсна напівгрупа з нулем називається примітивною, якщо кожний її ненульовий ідемпотент є примітивним.

Напівгрупа називається перестановною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Якщо S — інверсна напівгрупа, то через $E(S)$ позначають напіврешітку всіх ідемпотентів напівгрупи S.

Цілком 0-проста інверсна напівгрупа називається напівгрупою Брандта. Нехай G — група, I — довільна непорожня множина. Нехай, крім того, $B = B(G, I) = I \times G \times I \cup \{0\}$, де $0 \notin I \times G \times I$. Визначимо операцію множення на множині B таким чином: $(i, g, j) \cdot (j, h, l) = (i, gh, l)$, а всі інші добутки дорівнюють 0. Тоді $B(G, I)$ є напівгрупою Брандта і будь-яку напівгрупу Брандта можна (з точністю до ізоморфізму) зобразити в такій формі.

Всі інші необхідні означення з теорії напівгруп можна знайти в [10].

2. Основна теорема. У цьому пункті ми сформулюємо і доведемо основний результат статті.

Теорема 1. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем. Наступні умови є еквівалентними:*

1) *будь-який стабільний порядок на S є фундаментальним або антифундаментальним;*

2) *ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є напівгрупою Брандта і кожний ненульовий ідемпотент напівгрупи S є об'єднанням атомів у напіврешітці $E(S)$;*

3) *максимальні стабільні порядки на S вичерпуються ω і ω^{-1} (де ω — канонічний порядок на S).*

Для доведення імплікації 1) $\Rightarrow$ 2) нам потрібно довести кілька лем.

Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем 0. Легко показати, що ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є примітивною інверсною напівгрупою. Відомо, (див., наприклад, [11, с. 99]), що примітивна інверсна напівгрупа є ортогональною сумою напівгруп Брандта. Це означає, що $I_1 = \bigcup B_i$, де $\{B_i \mid i \in J\}$ — сім'я піднапівгруп Брандта, причому якщо $i \neq k$, то $B_i \cap B_k = B_i \cdot B_k = \{0\}$.

Лема 1. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем 0. Якщо ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є ортогональною сумою сім'ї $\{B_i \mid i \in J\}$ напівгруп Брандта, то для будь-якого B_i з цієї сім'ї B_i є ідеалом напівгрупи S.*

Доведення. Нехай $b \in B_i$, а x — довільний елемент з напівгрупи S. Покажемо, що $bx \in B_i$. Припустимо протилежне, тобто $bx \notin B_i$, тоді $bx \neq 0$. Оскільки $bx \in I_1$, то існує піднапівгрупа B_k (де $k \neq i$, $B_k \subseteq I_1$), яка є напівгрупою Брандта, така, що $bx \in B_k$. Тоді $bx(bx)^{-1} \in B_k$, звідки $bb^{-1}bxx^{-1}b^{-1} \in B_k$. Оскільки $bb^{-1} \in B_i$, а $bxx^{-1}b^{-1} \in B_k$, то $bb^{-1}bxx^{-1}b^{-1} = 0$. Отже, $bxx^{-1}b^{-1} = 0$.

Звідси випливає, що $bx = 0$. Суперечність. Тобто $bx \in B_i$. Аналогічно обґрунтовуємо, що $xb \in B_i$.

Лему доведено.

Далі, при доведенні наступної леми нам знадобиться такий результат.

Твердження 1 [3, с. 303]. *Стабільний порядок η на інверсній напівгрупі S є фундаментальним тоді і лише тоді, коли $\eta \subseteq \omega$, де ω — канонічний порядок на напівгрупі S.*

Лема 2. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем. Якщо кожний стабільний порядок на S є фундаментальним або антифундаментальним, то ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є напівгрупою Брандта.*

Доведення. Легко перевірити, що ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є примітивною інверсною напівгрупою. Отже, $I_1 = \bigcup B_i$, де $\{B_i \mid i \in J\}$ — сім'я підпівгруп Брандта, причому якщо $i \neq k$, то $B_i \bigcap B_k = B_i \cdot B_k = \{0\}$. Припустимо, що ідеал I_1 не є напівгрупою Брандта. Тоді існують B_j і B_g, які належать сім'ї $\{B_i \mid i \in J\}$, такі, що $B_j \neq \{0\}$, $B_g \neq \{0\}$ і $B_j \neq B_g$. Далі, розглянемо бінарне відношення $\Omega = (B_j \times B_g) \bigcup \Delta$, де Δ — відношення рівності на S. Покажемо, що бінарне відношення Ω є стабільним порядком. Очевидно, що Ω є стабільним (тут ми використовуємо лему 1) і рефлексивним бінарним відношенням. Нехай тепер $\langle x, y \rangle \in \Omega$ і $\langle y, x \rangle \in \Omega$. Якщо $\langle x, y \rangle \in \Delta$, то $x = y$. Якщо ж $\langle x, y \rangle \in B_j \times B_g$ і $\langle y, x \rangle \in B_j \times B_g$, то $x \in B_j \bigcap B_g = \{0\}$ і $y \in B_j \bigcap B_g = \{0\}$, звідки $x = y = 0$. Отже, бінарне відношення Ω є антисиметричним. Доведемо тепер транзитивність бінарного відношення Ω. Нехай $\langle x, y \rangle \in \Omega$ і $\langle y, z \rangle \in \Omega$. Якщо $\langle x, y \rangle \in \Delta$ або $\langle y, z \rangle \in \Delta$, то $\langle x, z \rangle \in \Omega$. Якщо $\langle x, y \rangle \in B_j \times B_g$ і $\langle y, z \rangle \in B_j \times B_g$, то, очевидно, $\langle x, z \rangle \in B_j \times B_g$. Отже, бінарне відношення Ω є стабільним порядком на S. Далі, нехай $\langle b, c \rangle \in B_j \times B_g$, до того ж $b \neq 0$ і $c \neq 0$. Очевидно, що $\langle b, c \rangle \notin \omega$ і $\langle b, c \rangle \notin \omega^{-1}$, де ω — канонічний порядок на S. Таким чином, $\Omega \not\subset \omega$ і $\Omega \not\subset \omega^{-1}$. Отже, згідно з твердженням 1, Ω не є фундаментальним і не є антифундаментальним стабільним порядком на S. Суперечність. Таким чином, ідеал I_1 є напівгрупою Брандта.

Лему доведено.

Зауваження. З леми 2, а також леми 10 (див. нижче) безпосередньо випливає, що будь-який стабільний порядок на скінченній примітивній інверсній напівгрупі S є фундаментальним або антифундаментальним тоді і лише тоді, коли S є напівгрупою Брандта. Далі будемо вважати, що скінченна інверсна напівгрупа не є примітивною, тобто вона містить принаймні один елемент, ранг якого ≥ 2.

Нам потрібно довести ще кілька лем.

Лема 3 [8, с. 53]. *Якщо в напівґратці P скінченної довжини існує ненульовий елемент, який не є об'єднанням атомів, то існує елемент $c \in P$, який покриває точно один ненульовий елемент.*

Лема 4. *Нехай E — напівґратка скінченної довжини. Крім того, нехай $e \prec f$, до того ж f покриває точно один елемент. Якщо $x < f$, то $x \leq e$.*

Доведення. Розглянемо максимальний ланцюжок, що з'єднує x і f. Нехай z — такий елемент цього ланцюжка, що $z \prec f$. Оскільки f покриває лише один елемент (а саме e), то $z = e$. Отже, $x \leq z = e \prec f$.

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай V — напівгратка скінченної довжини. Крім того, нехай $e \prec f$, де $e \neq 0$, до того ж f покриває точно один елемент. Якщо $xe = 0$, то $xf = 0$.*

Доведення. Очевидно, що $xf \leq f$. Припустимо, що $xf = f$, тоді $xfe = fe$. Звідси випливає $0 = xe = e$, що суперечить умові. Отже, $xf < f$. Згідно з лемою 4 $xf \leq e$. Тому $xf \leq xe = 0$. Отже, $xf = 0$.

Лему доведено.

Зауважимо, що порядки, що розглядатимуться в лемах 6 – 8, є канонічними.

Лема 6. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини з нулем 0. Крім того, нехай ідемпотенти e і f такі, що $e \prec f$ $(e \neq 0)$, до того ж f покриває точно один ідемпотент. Якщо $xey = 0$, то $xfy = 0$.*

Доведення. Нехай $xey = 0$, тоді $x^{-1}xeyy^{-1} = 0$, а отже, $x^{-1}xyy^{-1}e = 0$. Звідси згідно з лемою 5 $0 = x^{-1}xyy^{-1}f = x^{-1}xfyy^{-1}$. З останньої рівності випливає, що $xx^{-1}xfyy^{-1}y = 0$, тобто $xfy = 0$.

Лему доведено.

Далі, нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини з нулем 0. Крім того, нехай ідемпотенти $e, f \in S$ такі, що $0 \neq e \prec f$. Розглянемо бінарне відношення $\rho = \{\langle xfy, xey\rangle \mid x \in S\}$. Через ρ^t позначимо транзитивне замикання бінарного відношення ρ.

Лема 7. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини з нулем 0. Крім того, нехай ідемпотенти e і f такі, що $0 \neq e \prec f$, до того ж f покриває точно один ідемпотент. Якщо $\langle b, 0\rangle \in \rho^t$, то $b = 0$.*

Доведення. Оскільки $\langle b, 0\rangle \in \rho^t$, то існують елементи $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ такі, що $\langle b, c_1\rangle \in \rho$, $\langle c_1, c_2\rangle \in \rho, \ldots, \langle c_{n-1}, c_n\rangle \in \rho$, $\langle c_n, 0\rangle \in \rho$. Якщо $\langle c_n, 0\rangle \in \rho$, то на підставі леми 6 $c_n = 0$. Аналогічно $c_{n-1} = c_{n-2} = \ldots = c_2 = c_1 = b = 0$.

Лему доведено.

За умов попередньої леми справедлива така лема.

Лема 8. *Якщо $\langle a, b\rangle \in \rho^t$, то $b \leq a$ (тут через $\leq$ позначено канонічний порядок на S).*

Доведення. Оскільки ρ^t — транзитивне замикання бінарного відношення ρ, то існують елементи $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \in S$ такі, що $\langle a, s_1\rangle \in \rho$, $\langle s_1, s_2\rangle \in \rho, \ldots, \langle s_{n-1}, s_n\rangle \in \rho$, $\langle s_n, b\rangle \in \rho$. Внаслідок того, що $e \prec f$, для будь-яких $x, y \in S$ має місце нерівність $xey \leq xfy$. Отже, $b \leq s_n \leq s_{n-1} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_1 \leq a$. Таким чином, $b \leq a$.

Лему доведено.

Лема 9. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини з нулем 0. Крім того, нехай $e, f \in E(S)$ такі, що $0 \neq e \prec f$, до того ж f покриває точно один ідемпотент. Тоді бінарне відношення $\Sigma = (\{0\} \times I_1) \cup \rho^t \cup \Delta$ (де $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$, $\rho = \{\langle xfy, xey\rangle \mid x, y \in S\}$, а Δ — відношення рівності) є стабільним порядком на S.*

Доведення. Очевидно, що Σ — рефлексивне, а ρ — стабільне бінарне відношення. Легко показати, що транзитивне замикання стабільного бінарного відношення є стабільним бінарним відношенням. Отже, ρ^t — стабільне бінарне відношення. Таким чином, Σ є стабільним бінарним відношенням. Покажемо, що Σ — антисиметричне бінарне відношення. Отже, нехай $\langle a, b\rangle \in \Sigma$ і $\langle b, a\rangle \in \Sigma$. Розглянемо можливі випадки.

Випадок A. $\langle a, b\rangle \in \{0\}\times I_1$ і $\langle b, a\rangle \in \rho^t$. Тоді $a = 0$. Якщо $\langle b, 0\rangle \in \rho^t$, то згідно з лемою 7 $b = 0$. Отже, $a = b = 0$.

Випадок B. $\langle a, b\rangle \in \rho^t$ і $\langle b, a\rangle \in \rho^t$. Тоді згідно з лемою 8 $b \le a$ і $a \le b$. Звідси $a = b$.

Випадок C. $\langle a, b\rangle \in \rho^t$ і $\langle b, a\rangle \in \{0\}\times I_1$. Тоді $b = 0$. Якщо $\langle a, 0\rangle \in \rho^t$, то за лемою 7 $a = 0$. Отже, $a = b = 0$.

Інші випадки є тривіальними. Таким чином, бінарне відношення Σ є антисиметричним.

Тепер покажемо транзитивність бінарного відношення Σ. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1: $\langle 0, a\rangle \in \{0\}\times I_1$ і $\langle a, b\rangle \in \rho^t$. Оскільки $\langle a, b\rangle \in \rho^t$, то за лемою 8 $b \le a$. Оскільки $a \in I_1$, то $b \in I_1$. Отже, $\langle 0, b\rangle \in \{0\}\times I_1 \subset \Sigma$.

Випадок 2: $\langle a, b\rangle \in \rho^t$ і $\langle b, c\rangle \in \rho^t$. Оскільки ρ^t є транзитивним бінарним відношенням, то $\langle a, c\rangle \in \rho^t$.

Випадок 3: $\langle 0, a\rangle \in \{0\}\times I_1$ і $\langle a, b\rangle \in \{0\}\times I_1$. Тоді $b \in I_1$, а отже, $\langle 0, b\rangle \in$ $\in \{0\}\times I_1$.

Випадок 4: $\langle a, b\rangle \in \rho^t$ і $\langle b, c\rangle \in \{0\}\times I_1$. Оскільки $b = 0$, то $\langle a, 0\rangle \in \rho^t$. Тоді згідно з лемою 7 $a = 0$, до того ж $c \in I_1$. Звідси $\langle a, c\rangle \in \{0\}\times I_1$. Отже, бінарне відношення Σ є транзитивним.

Таким чином, бінарне відношення Σ є рефлексивним, транзитивним, антисиметричним і стабільним. Іншими словами, Σ — стабільний порядок на S.

Лему доведено.

Тепер можна обґрунтувати імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2) (див. формулювання основної теореми). По-перше, згідно з лемою 2 ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le 1\}$ є напівгрупою Брандта. Покажемо тепер, що кожний ненульовий ідемпотент напівгруп S є об'єднанням атомів у напівґратці $E(S)$. Припустимо протилежне. Тоді згідно з лемою 3 існує ідемпотент $f \in E(S)$, який покриває точно один ненульовий ідемпотент, наприклад e. Розглянемо бінарне відношення $\Sigma = (\{0\} \times I_1) \cup \rho^t \cup \Delta$, де $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le 1\}$ і $\rho = \{\langle xfy, xey\rangle \mid x, y \in S\}$. За лемою 9 бінарне відношення Σ є стабільним порядком на S. Далі, нехай $a \in I_1$ і $a \ne 0$, тоді $\langle 0, a\rangle \in \Sigma$. Крім того, $\langle f, e\rangle \in \Sigma$. Очевидно, що $\langle 0, a\rangle \in \omega$ і $\langle f, e\rangle \notin \omega$, де ω — канонічний порядок на S. Отже, $\Sigma \not\subset \omega$ і $\Sigma \not\subset \omega^{-1}$. Таким чином, згідно з твердженням 1 стабільний порядок Σ не є фундаментальним і не є антифундаментальним. Ця суперечність доводить справедливість імплікації 1) $\Rightarrow$ 2).

Доведення імплікації 2) $\Rightarrow$ 1) розіб'ємо на ряд лем. Спочатку перелічимо всі стабільні порядки на напівгрупі Брандта, структурна група якої допускає лише тривіальний стабільний порядок. Цей результат можна вважати математичним фольклором.

Лема 10. *Якщо $B \in B(G, I)$ — напівгрупа Брандта, структурна група G якої допускає лише тривіальний стабільний порядок, то стабільні порядки напівгрупи B вичерпуються такими: Δ, $(\{0\} \times B) \cup \Delta$, $(B \times \{0\}) \cup \Delta$, де 0 — нуль напівгрупи Брандта, а Δ — відношення рівності на ній.*

Доведення. Нехай Ω — стабільний порядок на напівгрупі B. Якщо $((i_1, g_1, j_1), (i_2, g_2, j_2)) \in \Omega$, то $i_1 = i_2$ і $j_1 = j_2$. Справді, припустимо, що $i_1 \neq i_2$, тоді $((i_1, e, i_1)(i_1, g_1, j_1), (i_1, e, i_1)(i_2, g_2, j_2)) \in \Omega$. Одержуємо $((i_1, g_1, j_1), 0) \in \Omega$. Оскільки напівгрупа Брандта є 0-простою, то з останнього співвідношення випливає

$$B \times \{0\} \subseteq \Omega. \tag{1}$$

Аналогічно, якщо $((i_2, e, i_2)(i_1, g_1, j_1), (i_2, e, i_2)(i_2, g_2, j_2)) \in \Omega$, то $(0, (i_2, g_2, j_2)) \in \Omega$. Звідси одержуємо

$$\{0\} \times B \subseteq \Omega. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає, що для будь-якого ненульового $b \in B$ $(b, 0) \in \Omega$ і $(0, b) \in \Omega$. Суперечність. Отже, $i_1 = i_2$. Аналогічно можна довести, що $j_1 = j_2$.

Далі, нехай Ω — стабільний порядок на напівгрупі $B = B(G, I)$. Визначимо бінарне відношення Ω^* на групі G таким чином: $(g_1, g_2) \in \Omega^*$ тоді і лише тоді, коли знайдуться $u, v \in I$ такі, що $((u, g_1, v), (u, g_2, v)) \in \Omega$. Легко перевірити, що бінарне відношення Ω^* є стабільним порядком на групі G. Але за умовою стабільні порядки на групі G вичерпуються тривіальним порядком. Отже, $\Omega^* = \Delta_G$, де Δ_G — відношення рівності на групі G. Таким чином, якщо $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ і $(b_1, b_2) \in \Omega$, то $b_1 = b_2$. Тепер ми можемо обґрунтувати вичерпність списку стабільних порядків, який наведений у формулюванні леми. По-перше, очевидно, що Δ, $(\{0\} \times B) \cup \Delta$ і $(B \times \{0\}) \cup \Delta$ є стабільними порядками на напівгрупі Брандта B. Нехай Ω — стабільний порядок на B. Якщо $b \neq 0$ і $(0, b) \in \Omega$, то $\{0\} \times B \subseteq \Omega$. Як зазначено вище, з умови $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ і $(b_1, b_2) \in \Omega$ випливає, що $b_1 = b_2$. Отже, $\Omega = (\{0\} \times B) \cup \Delta$. Аналогічно, якщо $b \neq 0$ і $(b, 0) \in \Omega$, то $\Omega = (B \times \{0\}) \cup \Delta$. Якщо ж для будь-якого $b \neq 0$ $(b, 0) \notin \Omega$ і $(0, b) \notin \Omega$, то $\Omega = \Delta$.

Лему доведено.

Далі, нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини з нулем. Для довільного $b \in S$ через $R_1(b)$ позначимо множину $\{x \in S \mid x \leq b \text{ і } \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$.

Лема 11. *Нехай P — скінченна напівґратка, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів. Тоді для будь-якого $a \in P$ існує $\sup(R_1(a))$, до того ж $\sup(R_1(a)) = a$.*

Доведення. Нехай $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ — сукупність верхніх меж множини $R_1(a)$. Легко перевірити, що елемент $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k$ є точною верхньою межею множини $R_1(a)$. Отже, $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k \leq a$. Далі, за умовою існує підмножина A множини атомів напівґратки P така, що $\sup A = a$. Очевидно, що $A \subseteq R_1(a)$. Звідси $a = \sup A \leq \sup(R_1(a)) = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k$. Отже, $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k = a$.

Лему доведено.

Лема 12. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем, кожний ідемпотент якої є об'єднанням атомів у напівґратці $E(S)$. Тоді для будь-яких $e, f \in E(S)$ з умови $R_1(e) = R_1(f)$ випливає $e = f$.*

Доведення. Насамперед зазначимо, що $R_1(e) \subseteq E(S)$ і $R_1(f) \subseteq E(S)$. Напівґратка $E(S)$ задовольняє всі умови попередньої леми. Таким чином, $e =$

$= \sup_E(\mathcal{R}_1(e)) = \sup_E(\mathcal{R}_1(f)) = f$, де через $\sup_E(\mathcal{R}_1(e))$ і $\sup_E(\mathcal{R}_1(f))$ позначено точну верхню межу відповідно множин $\mathcal{R}_1(e)$ і $\mathcal{R}_1(f)$ у напіврешітці $E(S)$. (Зазначимо, що $\sup(\mathcal{R}_1(e))$ у напівгрупі S може і не існувати.)

Лему доведено.

Лема 13. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем. Якщо $\mathcal{R}_1(a) = \mathcal{R}_1(b)$, то $\mathcal{R}_1(aa^{-1}) = \mathcal{R}_1(bb^{-1})$ і $\mathcal{R}_1(a^{-1}a) = \mathcal{R}_1(b^{-1}b)$.*

Доведення. У статті [7] (теорема 1) доведено, що функція $\mathcal{F}: x \mapsto \mathcal{R}_1(x)$ є гомоморфізмом з напівгрупи S у наднапівгрупу $P(I_1)$. Отже, $\mathcal{R}_1(aa^{-1}) = \mathcal{R}_1(a)\cdot\mathcal{R}_1(a^{-1}) = \mathcal{R}_1(b)\cdot\mathcal{R}_1(b^{-1}) = \mathcal{R}_1(bb^{-1})$. Аналогічно доводиться рівність $\mathcal{R}_1(a^{-1}a) = \mathcal{R}_1(b^{-1}b)$.

Лему доведено.

Лема 14. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем, кожний ненульовий ідемпотент якої є об'єднанням атомів у напіврешітці $E(S)$, і Ω — стабільний порядок на S. Якщо елементи $a, b \in S$ такі, що $\mathcal{R}_1(a) = \mathcal{R}_1(b)$ і $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $a = b$.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{R}_1(a) = \mathcal{R}_1(b)$, то за лемою 13 $\mathcal{R}_1(a^{-1}a) = \mathcal{R}_1(b^{-1}b)$ і $\mathcal{R}_1(aa^{-1}) = \mathcal{R}_1(bb^{-1})$. З останніх двох рівностей згідно з лемою 12 маємо $a^{-1}a = b^{-1}b$ і $aa^{-1} = bb^{-1}$. Оскільки $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $\langle ab^{-1}, bb^{-1}\rangle \in \Omega$. Покажемо, що $\langle ab^{-1}, bb^{-1}\rangle \in H$ (де H — відношення Гріна). Дійсно, $ab^{-1}(ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}ba^{-1} = aa^{-1}aa^{-1} = aa^{-1} = bb^{-1}$. Аналогічно $(ab^{-1})^{-1}ab^{-1} = ba^{-1}ab^{-1} = bb^{-1}bb^{-1} = bb^{-1}$. Клас $H_{bb^{-1}}$ є скінченною групою. Відомо (див., наприклад, [12]), що стабільні порядки на скінченній групі вичерпуються тривіальним порядком. Оскільки бінарне відношення $\Omega \cap (H_{bb^{-1}} \times H_{bb^{-1}})$ є стабільним порядком на групі $H_{bb^{-1}}$ і $\langle ab^{-1}, bb^{-1}\rangle \in \Omega \cap (H_{bb^{-1}} \times H_{bb^{-1}})$, то $ab^{-1} = bb^{-1}$. Звідси $ab^{-1}b = b$. Замінюючи в останній рівності $b^{-1}b$ на $a^{-1}a$, одержуємо $a = b$.

Лему доведено.

Лема 15. *Нехай S — довільна інверсна напівгрупа. Якщо $a \le c$, $b \le c$ і $aa^{-1} = bb^{-1}$, то $a = b$.*

Доведення. Оскільки $a \le c$ і $b \le c$, то існують ідемпотенти e і f такі, що $a = ce$ і $b = cf$. Далі, $aa^{-1} = ce(ce)^{-1} = cec^{-1}$ і $bb^{-1} = cf(cf)^{-1} = cfc^{-1}$. З останніх рівностей випливає $cec^{-1} = cfc^{-1}$. Звідси $a = ce = cc^{-1}ce = cec^{-1}c = cfc^{-1}c = cc^{-1}cf = cf = b$.

Лему доведено.

Лема 16. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем, кожний ненульовий ідемпотент якої є об'єднанням атомів у напіврешітці $E(S)$, і Ω — стабільний порядок на S. Якщо $\langle a, b\rangle \in \Omega$ і $\mathcal{R}_1(a) \subset \mathcal{R}_1(b)$ (строге включення), то $a < b$.*

Доведення. Покажемо, що $\mathcal{R}_1(a) = \mathcal{R}_1(aa^{-1}b)$. Оскільки $\mathcal{R}_1(a) \subset \mathcal{R}_1(b)$, то $\mathcal{R}_1(aa^{-1})\cdot\mathcal{R}_1(a) \subseteq \mathcal{R}_1(aa^{-1})\cdot\mathcal{R}_1(b)$. Згідно з теоремою 1 зі статті [7] функція $\mathcal{F}: z \mapsto \mathcal{R}_1(z)$ є гомоморфізмом із напівгрупи S у глобальну наднапівгрупу $P(I_1)$. Отже, $\mathcal{R}_1(aa^{-1}a) \subseteq \mathcal{R}_1(aa^{-1}b)$ або $\mathcal{R}_1(a) \subseteq \mathcal{R}_1(aa^{-1}b)$. Тепер обґрунтуємо зворотне включення. Отже, нехай $x \in \mathcal{R}_1(aa^{-1}b)$, тоді $x \le aa^{-1}b$. Звідси

$x(aa^{-1}b)^{-1} = xx^{-1}$ або $xb^{-1}aa^{-1} = xx^{-1}$. З останньої рівності маємо $xx^{-1}aa^{-1} = xx^{-1}$. Далі, очевидно, що $xx^{-1}a \in R_1(a)$. Оскільки за умовою $R_1(a) \subset R_1(b)$, то $xx^{-1}a \le b$. Крім того, $x \le aa^{-1}b \le b$. Позаяк $xx^{-1}a(xx^{-1}a)^{-1} = xx^{-1}aa^{-1}xx^{-1} = xx^{-1}$, то з останніх трьох співвідношень згідно з лемою 15 отримуємо $x = xx^{-1}a$. Оскільки $xx^{-1}a \le a$, то $x \in R_1(a)$. Отже, $R_1(aa^{-1}b) \subseteq R_1(a)$. Таким чином, $R_1(aa^{-1}b) = R_1(a)$. Далі, за умовою $\langle a, b\rangle \in \Omega$, тому $\langle a, aa^{-1}b\rangle \in \Omega$. Отже, згідно з лемою 14 $a = aa^{-1}b$. Звідси маємо $a < b$.

Лему доведено.

Лема 17. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем, ідеал якої I_1 є напівгрупою Брандта, і Ω — стабільний порядок на S. Тоді якщо $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то множини $R_1(a)$ і $R_1(b)$ порівнянні, тобто $R_1(a) \subseteq R_1(b)$ або $R_1(b) \subseteq R_1(a)$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто множини $R_1(a)$ і $R_1(b)$ не порівнянні. Тоді існують $x \in R_1(a)$, $x \notin R_1(b)$ і $y \in R_1(b)$, $y \notin R_1(a)$. Якщо $x \in R_1(a)$ і $x \notin R_1(b)$, то $x \ne 0$. Аналогічно $y \ne 0$. Далі, оскільки $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $\langle xx^{-1}a, xx^{-1}b\rangle \in \Omega$. Позаяк $xx^{-1}a = x$, то $\langle x, xx^{-1}b\rangle \in \Omega$.

Розглянемо можливі випадки.

1) $x = xx^{-1}b$. Тоді $x \le b$, а отже, $x \in R_1(b)$. Суперечність.

2) $x \ne xx^{-1}b$. A. Якщо $xx^{-1}b \ne 0$, то $\langle x, xx^{-1}b\rangle \in \Omega \bigcap (I_1 \times I_1)$, що суперечить лемі 10. B. Якщо ж $xx^{-1}b = 0$, то

$$\langle x, 0\rangle \in \Omega. \tag{3}$$

Далі, позаяк $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $\langle yy^{-1}a, yy^{-1}b\rangle \in \Omega$. Оскільки $yy^{-1}b = y$, то $\langle yy^{-1}a, y\rangle \in \Omega$.

Розглянемо можливі випадки.

3) $yy^{-1}a = y$. Тоді $y \le a$, а отже, $y \in R_1(a)$. Суперечність.

4) $yy^{-1}a \ne y$. C. Якщо $yy^{-1}a \ne 0$, то $\langle yy^{-1}a, y\rangle \in \Omega \bigcap (I_1 \times I_1)$, що суперечить лемі 10. D. Якщо ж $yy^{-1}a = 0$, то

$$\langle 0, y\rangle \in \Omega. \tag{4}$$

З (3) і (4) випливає, що $\langle x, y\rangle \in \Omega$, до того ж $x \ne y$, що суперечить лемі 10. Таким чином, множини $R_1(a)$ і $R_1(b)$ є порівнянними.

Лему доведено.

Тепер можна обґрунтувати імплікацію 2) $\Leftarrow$ 1).

Нехай Ω — нетривіальний стабільний порядок на S. Нам потрібно довести (враховуючи твердження 1), що $\Omega \subseteq \omega$ або $\Omega \subseteq \omega^{-1}$ (де ω — канонічний порядок на S). Оскільки Ω — нетривіальний порядок, то існують елементи $a, b \in S$ такі, що $\langle a, b\rangle \in \Omega$ і $a \ne b$. Згідно з лемою 17 $R_1(a) \subset R_1(b)$ або $R_1(b) \subset R_1(a)$. Нехай, для конкретності, $R_1(a) \subset R_1(b)$. Тоді за лемою 16 $a < b$. Оскільки $R_1(a) \subset R_1(b)$ (строге включення), то існує елемент $x \in R_1(b)$ $(x \ne 0)$ такий, що $x \notin R_1(a)$. Оскільки $\langle a, b\rangle \in \Omega$, то $\langle xx^{-1}a, xx^{-1}b\rangle \in \Omega$. Позаяк $x \le b$, то $xx^{-1}b = x$. Отже, $\langle xx^{-1}a, x\rangle \in \Omega$. Припустимо, що $xx^{-1}a = x$, тоді $x \le a$. Отже, $x \in R_1(a)$. Суперечність. Далі, очевидно, що $xx^{-1}a \in I_1$. Якщо припустити, що $xx^{-1}a \ne 0$ і $xx^{-1}a \ne x$, то одержимо суперечність з лемою 10. Отже, залишається одна можливість: $xx^{-1}a = 0$, тобто

$$\langle 0, x\rangle \in \Omega. \qquad (5)$$

Нехай тепер довільна пара $\langle c, k\rangle$ така, що $\langle c, k\rangle \in \Omega$. Покажемо, що $R_1(c) \subseteq R_1(k)$. Припустимо протилежне, тобто (враховуючи лему 17), що $R_1(k) \subset R_1(c)$. Тоді існує $y \in R_1(c)$ і $y \notin R_1(k)$. Очевидно, що $y \neq 0$. Позаяк $\langle c, k\rangle \in \Omega$, то $\langle yy^{-1}c, yy^{-1}k\rangle \in \Omega$. Оскільки $y \leq c$, то $yy^{-1}c = y$. Тоді $\langle y, yy^{-1}k\rangle \in \Omega$. Припустимо, що $y = yy^{-1}k$, тоді $y \leq k$, отже, $y \in R_1(k)$. Суперечність. Якщо ж припустити, що $yy^{-1}k \neq 0$ і $yy^{-1}k \neq y$, то одержимо суперечність з лемою 10. Отже, залишається єдина можливість: $yy^{-1}k = 0$. Тоді

$$\langle y, 0\rangle \in \Omega. \qquad (6)$$

Із співвідношень (5) і (6) випливає, що $\langle y, x\rangle \in \Omega$, до того ж $x, y \in I_1$ і $y \neq x$. А це суперечить лемі 10. Отже, $R_1(c) \subseteq R_1(k)$. Звідси на підставі лем 14 і 16 $c \leq$ $\leq k$.

Таким чином, $\Omega \subseteq \omega$ (де ω — канонічний порядок на S). Якщо ж припустити, що $R_1(b) \subset R_1(a)$, то аналогічним чином можна довести, що $\Omega \subseteq \omega^{-1}$.

Еквівалентність 1) $\Leftrightarrow$ 3) безпосередньо випливає з твердження 1.

Теорему доведено.

3. Характеристика напіврешітки ідемпотентів скінченної інверсної напівгрупи з нулем, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним.

Теорема 2. *Скінченна напіврешітка є напіврешіткою ідемпотентів деякої скінченної інверсної напівгрупи з нулем, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним, тоді і лише тоді, коли кожний її ненульовий елемент є об'єднанням атомів.*

Доведення. Нехай E — скінченна напіврешітка, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів. Розглянемо напівгрупу Манна T_E, тобто інверсну напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки E відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень (див., наприклад, [11]). Оскільки напіврешітка ідемпотентів напівгрупи T_E ізоморфна напіврешітці E, то за теоремою 1 зі статті [8] кожний стабільний порядок на інверсній напівгрупі T_E є фундаментальним або антифундаментальним.

Друга частина теореми безпосередньо випливає з теореми 1.

Теорему доведено.

5. Наслідки і приклади. Нагадаємо, що напівгрупа називається переставною, якщо будь-які її дві конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Наслідок 1. *Нехай S — скінченна переставна інверсна напівгрупа з нулем. Тоді максимальні стабільні порядки напівгрупи S вичерпуються ω і ω^{-1} (де ω — канонічний порядок на S).*

Доведення. Відомо (див. [13], теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи лінійно впорядковані відносно включення. Звідси легко випливає, що ідеал I_1 є напівгрупою Брандта.

У статті [14] з'ясовано структуру напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи з нулем скінченної довжини. На підставі цього результату можна легко довести, що кожний ненульовий ідемпотент напівгрупи S є об'єднанням атомів у напіврешітці $E(S)$. Звідси згідно з теоремою 1 випливає, що максимальні стабільні порядки скінченної переставної інверсної напівгрупи з нулем вичерпуються ω і ω^{-1} (де ω — канонічний порядок на S).

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем, ідеал якої I_1 є напівгрупою Брандта і щільним. Тоді максимальні стабільні порядки напівгрупи S вичерпуються ω і ω^{-1} (де ω — канонічний порядок на S).*

Доведення. Згідно з пропозицією 2.18 (див. [15, с. 594]) кожний щільний ідеал є $\vee$-базисним. Це означає, що будь-який елемент $b \in S$ можна подати у формі $b = \sup A$, де A — деяка підмножина ідеалу. За умовою ідеал I_1 є щільним, отже, будь-який ненульовий ідемпотент f є об'єднанням атомів напівгратки $E(S)$. Таким чином, згідно з теоремою 1 максимальні стабільні порядки на напівгрупі S вичерпуються ω і ω^{-1}.

Наслідок 2 доведено.

Приклад 1. Нехай V — скінченний векторний простір. Позначимо через $\mathrm{AutP}(V)$ інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів векторного простору V. Відомо, що ідеали напівгрупи $\mathrm{AutP}(V)$ лінійно впорядковані відносно включення. Звідси випливає, що ідеал I_1 є напівгрупою Брандта. Крім того, напівгрупа $\mathrm{AutP}(V)$ є переставною (див., наприклад, [14, с. 1360]). Отже, максимальні стабільні порядки напівгрупи $\mathrm{AutP}(V)$ вичерпуються ω і ω^{-1}. (Зазначимо, що цей же висновок, але з інших міркувань, одержано в [16].)

Приклад 2. Нехай $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Позначимо через $IO(N)$ інверсну напівгрупу всіх часткових взаємно однозначних монотонних перетворень множини N, а через $I(N)$ симетричну інверсну напівгрупу на множині N. Ці напівгрупи теж належать до переставних, а отже, максимальні стабільні порядки на них вичерпуються ω і ω^{-1}.

У кожній із напівгруп з наведених прикладів ідеал I_1 є щільним. Тепер наведемо приклад скінченної інверсної напівгрупи з нулем, що задовольняє умову 3 теореми 1, але ідеал I_1 не є щільним.

Приклад 3. На множині $\{1, 2, 3, 4\}$ розглянемо сукупність ін'єктивних перетворень $S = \left\{\varnothing, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}\right\}$. Легко перевірити, що S є інверсною напівгрупою з нулем. Крім того, ідеал $I_1 = \left\{\varnothing, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ є напівгрупою Брандта і кожний ненульовий ідемпотент є об'єднанням атомів у напівгратці $E(S)$. Отже, згідно з теоремою 1 кожний стабільний порядок на S є фундаментальним або антифундаментальним. Цей факт легко обґрунтувати і безпосереднім підрахунком, знаючи список усіх стабільних порядків на скінченній напівгрупі Брандта (див. лему 10) і той факт, що стабільні порядки на скінченній групі вичерпуються тривіальним порядком.

Далі, легко перевірити, що ідеал I_1 не є $\vee$-базисним, а отже, згідно з пропозицією 2.18 (див. [15, с. 594]) не є щільним.

1. *Вагнер В. В.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1956. – **38**, № 2. – С. 203 – 240.
2. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Там же. – 1964. – **65**, № 2. – С. 188 – 197.
3. Goberstein S. M. Fundamental order relations on inverse semigroups and on their generalizations // Semigroup Forum. – 1980. – **21**. – P. 285 – 328.

4. Mogilevskii M. G. Order relations on symmetric semigroups of transformations and on their homomorphic images // Ibid. – 1980. – **19**. – P. 283 – 305.
5. *Могилевский М. Г.* Отношения порядка на симметрической инверсной полугруппе // Теория полугрупп и ее приложения. – 1974. – Вып. 3. – С. 63 – 70.
6. *Бейлис М. В.* Стабильные отношения порядка на полугруппе частичных преобразований ограниченного ранга // Там же. – 1985. – Вып. 5. – С. 3 – 9.
7. *Дереч В. Д.* Про максимальні стабільні порядки на інверсній напівгрупі скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1035 – 1041.
8. *Дереч В. Д.* Структура напівгрупи Манна скінченного рангу, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним // Там же. – 2009. – **61**, № 1. – С. 52 – 60.
9. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Там же. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
10. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.
11. Petrich M. Inverse semigroups. – New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.
12. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 399 с.
13. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
14. *Дереч В. Д.* Характеристика напівршіток ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
15. Schein B. M. Completions, translational hulls and ideal extensions of inverse semigroups // Czech. Math. J. – 1973. – **23**. – P. 575 – 610.
16. *Дереч В. Д.* О максимальных стабильных порядках на некоторых биидеальных расширениях полугруппы Брандта // Полугруппы и их гомоморфизмы. – Ленинград, 1991. – С. 12 – 18.

Одержано 02.03.09,
після доопрацювання — 03.08.09