УДК 517.935.4

М. Л. Содин

Об асимптотической регулярности роста субгармонических функций конечного порядка

Пусть $\rho(r) \to \rho$ $0 < \rho < \infty$,— уточненный порядок, $SH(\rho(r))$ — класс субгармонических в плоскости $z = re^{i\theta}$ функций $u(z)$ не выше чем нормального типа σ_u относительно $\rho(r)$.

Если целая функция f такова, что $\ln|f| \in SH(\rho(r))$, то, как показано в [1, гл. II, теорема 6], семейство функций $h_{f,r}(\theta) = r^{-\rho(r)} \ln|f(re^{i\theta})|$ равностепенно непрерывно, когда r не принадлежит множеству сколь угодно малой верхней линейной плотности.

Положим для произвольной функции $v(z)$ $\tilde{\Delta}_h v(z) = r^{-\rho(r)}[v(z + hz) - v(z)]$, $h \in \mathbb{C}$. Под $\sup^{(A)} \tilde{\Delta}_h v(z)$ условимся понимать такой sup, который берется по всем числам z таким, что ни z, ни $z + hz$ не попадают в множество A.

В [2] показано, что $\forall \eta > 0$

$$\sup^{(A)} |\tilde{\Delta}_h u(z)| \leqslant M_\rho \sigma_u \int_0^1 \ln(1 + |h|/(\eta t))\, dt, \tag{1}$$

где верхняя линейная плотность множества A не превышает η; через M_ρ всюду обозначаем постоянные, зависящие лищь от числа ρ. (Аналогичная оценка была получена в [3].)

1. Приведем необходимые определения. Обозначим $C(a, t) = \{\zeta : |\zeta - a| < t\}$. Для произвольной субгармонической функции $u(z)$ запишем формулу Пуассона — Иенсена в круге $C(0, R)$, $R \geqslant 3r/2$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re}((Re^{i\varphi} + z)/(Re^{i\varphi} - z))\, d\varphi + \int_{C(0,R)} \ln|R(z - \zeta)/(R^2 - z\bar{\zeta})|\, d\mu_\zeta,$$

где $\mu = \mu_u$ — риссовская масса функции u. Рассмотрим функцию

$$q(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})(d/dz)((Re^{i\varphi} + z)/(Re^{i\varphi} - z))\, d\varphi + \int_{C(0,R)} (d/dz) \ln(R(z - \zeta)/(R^2 - z\bar{\zeta}))\, d\mu_\zeta. \tag{2}$$

(Первый интеграл — голоморфная функция от z, второй — для почти всех z сходится. Более того, в силу теоремы Фубини величина $\int\limits_{C(0,R)} |z-\zeta|^{-1}d\mu_\zeta$ — локально суммируемая функция от z, а следовательно, функция $q(z)$ также локально суммируема.)

Отметим три обстоятельства: а) определение функции $q(z)$ не зависит от выбора числа R; б) известно ([4, лемма 1.6]), что функция u для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ абсолютно непрерывна как функция от r, причем для почти всех $z: (\partial/\partial r)\, u(re^{i\theta}) = \operatorname{Re}(q(re^{i\theta})\, e^{i\theta})$; в) если $u = \ln|f|$, где f — целая функция, то $q = f'/f$.

Далее вместо функции $q(z)$ будет удобнее рассматривать $w(z) = zq(z)$. Тогда для почти всех z

$$\operatorname{Re} w(z) = \lim_{\tau\to 0} (u(z + \tau z) - u(z))/\tau, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Тот факт, что функция w построена по субгармонической функции u описанным выше способом, мы будем обозначать так: $w = L(u)$. Различным субгармоническим функциям u отвечают различные функции w.

2. Пусть $A = \bigcup C(\xi_j, t_j)$ — некоторое не более чем счетное множество кружков в комплексной плоскости; верхней α-плотностью множества называется величина $\rho^*_\alpha(A) = \varlimsup\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^\alpha} \sum\limits_{|\xi_j|\leqslant R} t_j^\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Множество A будем называть C^α_η-множеством и записывать $A \in C^\alpha_\eta$, если $\rho^*_\alpha(A) \leqslant \eta$.

Положим для функции $u \in SH(\rho(r))$

$$\omega_{\alpha,\eta}(\delta, u) = \inf_{C^\alpha_\eta} \sup_{|h|\leqslant\delta}{}^{(C^\alpha_\eta)} |\tilde{\Delta}_h u(z)|,\ \omega^1_{\alpha,\eta}(\delta, u) = \inf_{C^\alpha_\eta} \sup_{|h|\leqslant\delta}{}^{(C^\alpha_h)} |\tilde{\Delta}_h w(z)|,$$

$$w = L(u).$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть $u \in SH(\rho(r))$; тогда при всех $\delta < 1/4$*

$$\omega_{\alpha,\eta}(\delta, u) \leqslant \eta^{-1}M_\rho\sigma_u Q(\alpha, \delta), \qquad 0 < \alpha \leqslant 2,\ \eta > 0, \tag{4}$$

$$\omega^1_{\alpha,\eta}(\delta, u) \leqslant \eta^{-1}M_\rho\sigma_u Q(\alpha - 1, \delta), \qquad 1 < \alpha \leqslant 2,\ \eta > 0, \tag{5}$$

где

$$Q(\alpha, \delta) = \begin{cases} \max(\alpha^{-1}, (1-\alpha)^{-1})\,\delta^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ \delta\ln(1/\delta), & \alpha = 1, \\ \delta(\alpha - 1)^{-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Кроме того, для произвольных чисел $\alpha > 1$, $\eta > 0$ найдется такое C^α_η-множество, что

$$\lim_{\delta\to 0,\ \delta\in\mathbb{R}} \sup{}^{(C^\alpha_\eta)} |\delta^{-1}\tilde{\Delta}_\delta u(z) - r^{-\rho(r)} \operatorname{Re} w(z)| = 0. \tag{6}$$

3. Доказательство теоремы. Зафиксировав числа $\alpha > 0$, $\eta > 0$, проведем выделение исключительного множества A методом Картана — Альфорса.

Для произвольного числа z, $|z| \geqslant 1$, рассмотрим множество таких кругов $C(z, tz)$, $0 < t \leqslant 1/2$, что

$$K\eta^{-1}t^\alpha \leqslant \mu_z(t) = r^{-\rho(r)}\mu(C(z, tr)), \tag{7}$$

где постоянная K будет выбрана далее. Пусть t_z максимальное из чисел t, для которых выполнено (7) при фиксированном z. Положим $A = \bigcup\limits_{|z|\geqslant 1} C(z, tr)$. Выберем достаточно большое число R и применим к множеству $A \cap C(0, R)$ лемму о конечнократном покрытии (см., например, [4, лемма 3.2]). Согласно этой лемме, можно выделить покрытие $\{C(z_j,$

${}_{z_j}r_j))\}$, кратность которого не превышает 6. Тогда в силу (7)

$$\sum_{r_i \leqslant R} r_j^{\alpha} t_{z_j}^{\alpha} \leqslant \eta K^{-1} \int_1^R r^{\alpha-\rho(r)} d\nu(r), \tag{8}$$

где $d\nu(r) = \sum_{r_j = r} \mu(C(z_j, t_{z_j} r_j))$. Ввиду того, что кратность покрытия не превышает 6, $\nu(r) \leqslant M_\rho \sigma_\mu r^{\rho(r)}$, и в силу свойств уточненного порядка, интегрируя по частям, получаем

$$\int_1^R r^{\alpha-\rho(r)} d\nu(r) \leqslant M_\rho \sigma_\mu R^\alpha. \tag{9}$$

(При доказательстве теоремы свойства уточненного порядка $\rho(r)$ используются только в этом месте. Нетрудно показать, что $r^{\rho(r)}$ можно всюду заменить на произвольную положительную возрастающую $\lambda(r)$, удовлетворяющую условию $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to \infty$.)

Подставляя (9) в (8), получаем $R^{-\alpha} \sum_{r_j \leqslant R} r_j^{\alpha} t_{z_j}^{\alpha} \leqslant \eta K^{-1} M_\rho \sigma_\mu$, откуда, выбрав $K = M_\rho \sigma_\mu$, заключаем, что $\rho_\alpha^*(A) \leqslant \eta$.

Отметим, что вне множества A

$$\mu_z(t) < \eta^{-1} M_\rho \sigma_\mu t^\alpha. \tag{10}$$

Оценки (4) и (5) доказываются аналогично, поэтому докажем лишь (5). Далее предполагаем, что выделялось исключительное множество с $\alpha > 1$.

Оценим величину $\tilde{\Delta}_h w(z)$, когда ни z, ни $z + hz$ не попадают в исключительное множество. В силу (2), полагая $R = 2r$, $|h| \leqslant 1/4$, получаем

$$\tilde{\Delta}_h w(z) = r^{-\rho(r)} \int_{C(z, r/4)} \left(\frac{z+hz}{z+hz-\zeta} - \frac{z}{z-\zeta} \right) d\mu_\zeta +$$

$$+ r^{-\rho(r)} \int_{C(0,R) \setminus C(z, r/4)} \left(\frac{z+hz}{z+hz-\zeta} - \frac{z}{z-\zeta} \right) d\mu_\zeta +$$

$$+ r^{-\rho(r)} \int_{C(0,R)} ((R^2 - (z+hz)\bar{\zeta})^{-1} - (R^2 - z\bar{\zeta})^{-1}) \bar{\zeta} d\mu_\zeta +$$

$$+ \frac{r^{1-\rho(r)}}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \left(\frac{z+hz}{(Re^{i\varphi} - z - hz)^2} - \frac{z}{(Re^{i\varphi} - z)^2} \right) d\varphi. \tag{11}$$

Обозначая сумму трех последних слагаемых через $B_h(z)$, получаем, что при $|z| \geqslant 1$, $|h| \leqslant 1/4$

$$\sup_z |B_h(z)| \leqslant M_\rho |h| \sigma_u. \tag{12}$$

Здесь и далее используется тот факт, что $\sigma_\mu \leqslant e^\rho \sigma_u$ (см. например, [1]).

В первом интеграле правой части (11) разобъем область интегрирования на четыре части: $C(z, r/4) = \bigcup_{k=1}^{4} C_k$, $C_1 = C(z, |h| r/3)$, $C_2 = C(z + hz, |h| r/3)$, $C_3 = C(z, 2|h| r) \setminus (C_1 \cup C_2)$, $C_4 = C(z, r/4) \setminus C_3$. Воспользовавшись (10), оценим каждый из полученных интегралов. При $|z| \geqslant 1$, $\zeta \in C_1$

$$\left| \frac{z+hz}{z+hz-\zeta} \right| \leqslant \frac{|z||1+h|}{|z||h| - |z-\zeta|} \leqslant \frac{3}{2} \frac{|1+h|}{|h|} < \frac{3}{|h|}.$$

Поэтому

$$r^{-\rho(r)}\int\limits_{C_1}\left|\frac{z+hz}{z+hz-\zeta}-\frac{z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta\leqslant\int\limits_0^{|h|/3}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{|h|}\right)d\mu_z(t)\leqslant$$

$$\leqslant\eta^{-1}M_\rho\sigma_\mu(\alpha-1)^{-1}|h|^{\alpha-1}. \tag{13}$$

Совершенно аналогично

$$r^{-\rho(r)}\int\limits_{C_2}\left|\frac{z+hz}{z+hz-\zeta}-\frac{z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta\leqslant\eta^{-1}M_\rho\sigma_\mu\frac{|h|^{\alpha-1}}{\alpha-1}. \tag{14}$$

Здесь мы пользуемся тем, что $z+hz$ также не попадает в исключительное множество.

Далее, если $\zeta\in C_3$, то $|(z+hz)/(z+hz-\zeta)-z/(z-\zeta)|<6|h|^{-1}$, поэтому

$$r^{-\rho(r)}\int\limits_{C_3}\left|\frac{z+hz}{z+hz-\zeta}-\frac{z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta\leqslant\eta^{-1}M_\rho\sigma_\mu|h|^{\alpha-1}. \tag{15}$$

Наконец, если $\zeta\in C_4$, то

$$\left|\frac{z+hz}{z+hz-\zeta}-\frac{z}{z-\zeta}\right|\leqslant\frac{5}{2}|h|\left|\frac{z}{z-\zeta}\right|^2,$$

$$r^{-\rho(r)}\int\limits_{C_4}\left|\frac{z+hz}{z+hz-\zeta}-\frac{z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta\leqslant\frac{5}{2}\int\limits_{2|h|}^{1/4}\frac{d\mu_z(t)}{t^2}\leqslant\eta^{-1}M_\rho\sigma_\mu Q(\alpha-1,|h|). \tag{16}$$

Подставляя оценки (12)—(16) в (11), получаем (5).

4. Пусть $f(x)$ — функция одного вещественного переменного. Известно, что коль скоро $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то величина $(f(x+h)-f(x))/h$ стремится к $f'(x)$ при $h\to 0$ равномерно по $x\in[a, b]$. В равенстве (6) ситуация аналогична, только непрерывность и дифференцируемость понимаются в обобщенном смысле.

Перейдем к доказательству соотношения (6). Используя формулу Пуассона — Иенсена в круге $C(0, R)$, $R=2r$, запишем ($\sigma\in R$):

$$\tilde{\Delta}_\delta u(z)=\frac{r^{-\rho(r)}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})\operatorname{Re}\left\{\frac{Re^{i\varphi}+z+\delta z}{Re^{i\varphi}-z-\delta z}-\right.$$

$$\left.-\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right\}d\varphi+r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(0,R)\setminus C(z,r/4)}\ln\left|1+\frac{\delta z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta+$$

$$+r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(0,R)}\ln\left|\frac{R^2-(z+\delta z)\bar\zeta}{R^2-z\bar\zeta}\right|d\mu_\zeta+r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(z,r/4)}\ln\left|1+\frac{\delta z}{z-\zeta}\right|d\mu_\zeta=$$

$$=T_\delta+V_\delta. \tag{17}$$

Сравним выражения (11) и (17). Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{|z|\geqslant 1}|\delta^{-1}T_\delta-$ $-r^{-\rho(r)}\operatorname{Re}B_h(z)|=0$. Поэтому достаточно показать, что для выбранного ранее исключительного множества A

$$\lim_{\delta\to 0}\sup{}^{(A)}\left|\delta^{-1}V_\delta(z)-r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(z,r/4)}z/(z-\zeta)\,d\mu_\zeta\right|=0. \tag{18}$$

Пусть $\delta>0$ (случай $\delta<0$ рассматривается аналогично). Воспользовавшись построенным выше разбиением круга $C(z, r/4)=\bigcup\limits_{k=1}^{4}C_k$, разобъем V_δ

на четыре слагаемых:

$$\frac{V_\delta}{\delta}=\frac{r^{-\rho(r)}}{\delta}\int\limits_{C(z,r/4)}\ln|1+\delta z/(z-\zeta)|\,d\mu_\zeta=V_1+V_2+V_3+U_\delta.$$

Покажем, что три первых интеграла при $\delta\to 0$ стремятся к 0 равномерно по z. (Напомним, что ни z, ни $z+hz$ не попадают в исключительное множество A и что выполнена оценка (10).)

Если $\zeta\in C(z,\delta r/3)$, то $|\delta z/(z-\zeta)|\geqslant 3$; следовательно,

$$\left|\frac{z}{z-\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{\delta}\ln\left|1+\frac{\delta z}{z-\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{\delta}\ln\left|\left|\frac{\delta z}{z-\zeta}\right|-1\right|>0,$$

$$0\leqslant V_1\leqslant r^{-\rho(r)}\int\limits_{C_1}|z/(z-\zeta)|\,d\mu_\zeta=\int\limits_0^{\delta/3}t^{-1}d\mu_z(t)\rightrightarrows 0,\qquad \delta\to 0,$$

равномерно по $z\notin A$. Аналогично если $\zeta\in C(z+\delta z,\delta r/3)$, то $|\delta z/(z+\delta z-\zeta)|\geqslant 3$, $0\leqslant -V_2\rightrightarrows 0$, $\delta\to 0$, равномерно по таким z, что $z+\delta z\notin A$.

При всех комплексных y выполняется неравенство

$$-|y|/|1+y|\leqslant\ln|1+y|\leqslant|y|. \tag{19}$$

Поэтому $-|z/(z+\delta z-\zeta)|\leqslant\delta^{-1}\ln|1+\delta z/(z-\zeta)|\leqslant|z/(z-\zeta)|$, тогда при $\zeta\notin C_1\cup C_2$ $|\delta^{-1}\ln|1+\delta z/(z-\zeta)||\leqslant 3\delta^{-1}$, $|V_3|\leqslant 3\delta^{-1}\int\limits_0^{2\delta}d\mu_z(t)\rightrightarrows 0$, $\delta\to 0$, равномерно по $z\notin A$.

Рассмотрим функцию

$$g_\delta(\tau)=\begin{cases}\delta^{-1}\ln|1+\delta/\tau|, & |\tau|>2\delta,\\ 0, & |\tau|\leqslant 2\delta.\end{cases}$$

В силу оценки (19) $|g_\delta(\tau)|\leqslant 2/|\tau|$. Кроме того, $g_\delta(\tau)\to\operatorname{Re}\tau^{-1}$, $\delta\to 0$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$U_\delta(z)=r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(z,r/4)}g_\delta((z-\zeta)/z)\,d\mu_\zeta\rightrightarrows r^{-\rho(r)}\int\limits_{C(z,r/4)}\operatorname{Re}(z/(z-\zeta))\,d\mu_\zeta$$

равномерно по $z\notin A$. Таким образом, (18), а следовательно, и (6) доказаны. Теорема доказана полностью.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с.
2. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков : Высшая школа, 1968, вып. 6, с. 3—29.
3. *Красичков И. Ф.* О свойствах однородности целых функций конечного порядка.— Мат. сб., 1967, **108 (114)**, № 3, с. 412—419.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 515 с.

Харьков. ин-т радиоэлектроники.

Поступила 12.07.83