УДК 517.9

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас (Харьков. нац. ун-т),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРОБЛЕМА ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА СОБОЛЕВА

Existence conditions of optimal impulse control for an implicit operator differential equation with a quadratic cost functional are obtained. The results are applied to a filtration problem.

Отримано умови існування оптимального імпульсного управління для неявного диференціально-операторного рівняння з квадратичним функціоналом якості. Результати застосовано до однієї задачі фільтрації.

Постановка задачи оптимального импульсного управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, приведена в [1] (§6, 7, 14). Импульсное управление в качестве слагаемых содержит импульсы, интенсивность которых можно регулировать. Математически импульсы описываются с помощью δ-функции Дирака. Управления импульсного типа для распределенных систем рассматривались в [2] (гл. 5). Задачи оптимального импульсного управления для обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в [3] (гл. 6), для уравнений в частных производных — в [4].

Мы будем изучать задачу оптимального импульсного управления для системы, динамика которой на отрезке времени $[t_0, T]$ описывается дифференциально-операторным уравнением типа Соболева

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = f(t) + Ku, \quad u = \sum_{k=1}^{N} z_k \delta(t-\tau_k), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

не разрешенным относительно производной. Интерес к уравнению (1) вызван тем, что системы с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые допускают абстрактное представление в виде дифференциально-операторных уравнений с дифференциальными операторами, действующими в пространстве функций. В общем случае эти уравнения оказываются уравнениями в частных производных не типа Ковалевской или типа Соболева, т. е. не разрешенными относительно старшей производной по времени [5]. Учет этого факта объясняет наличие оператора A в уравнении (1) в отличие от работ [1 – 4].

Введем следующие обозначения: X, Y, Z — комплексные гильбертовы пространства; $L_2(a, b; Y)$ — пространство Y-значных функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$; $W_2^1(a, b; Y)$ — пространство функций из $L_2(a, b; Y)$, у которых обобщенные производные принадлежат пространству $L_2(a, b; Y)$; $\mathcal{L}(Y, X)$ — пространство ограниченных линейных операторов из Y в X; $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y, Y)$; $C^p(I, Y)$, $p = 0, 1, \ldots$, — класс Y-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I \subset \mathbb{R}$; $C^0(I, Y) = C(I, Y)$. Функции $v(t) \in W_2^1(a, b; Y)$ будем считать непрерывными на $[a, b]$, т. е. $v(t) \in C([a, b], Y)$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры нуль.

Относительно уравнения (1) будем предполагать, что A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из Y в X, с областями определения D_A, D_B соответственно, $D = D_A \cap D_B \ne \{0\}$; K — ограниченный линейный оператор, действующий из Z в X; $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$; $z_k \in Z$; $\tau_k \in [t_0, T]$. Равенство и операции в (1) будем понимать в смысле теории распределений или обобщенных функций со значениями в гильбертовом пространстве (см., например, [8], гл. 1). Регулирование динамической системой (1) осуществляется с помощью импульсного управления u, в котором $\tau_1, \ldots, \tau_N$ — моменты приложения импульсов, $z_1, \ldots, z_N$ — соответствующие этим моментам интенсивности или веса; оператор K действует по правилу

$$Ku = \sum_{k=1}^{N} K z_k \delta(t - \tau_k).$$

Из чисел $t_0, T, \tau_1, \ldots, \tau_N$ выберем все различные числа и расположим их в порядке возрастания так, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = T$. Тогда импульсное управление u в (1) допускает представление

$$u = \sum_{j=0}^{n+1} h_j \delta(t - t_j), \qquad h_j = \sum_{\tau_k = t_j} z_k. \tag{2}$$

Под *решениями уравнения* (1) будем понимать распределения типа функций $y(t) \in L_2(t_0, T; Y)$ таких, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [t_0, T]$, $Ay(t) \in$ $\in W_2^1(t_j, t_{j+1}; X)$ для $j = 0, \ldots, n$, $By(t) \in L_2(t_0, T; X)$, для почти всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяется уравнение

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = f(t) \tag{3}$$

и в точках множества t_j выполняются равенства (импульсные воздействия)

$$(Ay)(t_j + 0) - (Ay)(t_j - 0) = Kh_j, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь значения $(Ay)(t_0 + 0)$, $(Ay)(t_{n+1} - 0)$ и $(Ay)(t_j \pm 0)$ для $j = 1, \ldots, n$ имеют смысл, поскольку функция $Ay(t) \in W_2^1(t_j, t_{j+1}; X)$ является непрерывной на $[t_j, t_{j+1}]$ после возможного изменения на множестве нулевой меры; значение $(Ay)(t_0 - 0)$ задается:

$$(Ay)(t_0 - 0) = q, \tag{5}$$

значение $(Ay)(t_{n+1} + 0) = (Ay)(T + 0)$ определяется как

$$(Ay)(t_{n+1} + 0) = (Ay)(t_{n+1} - 0) + Kh_{n+1}.$$

Управлению u соответствует решение $y(t) = y(t, u)$ начальной задачи (1), (5).

Основное предположение на операторные коэффициенты в (1) заключается в следующем: в некоторой замкнутой окрестности бесконечно удаленной точки $|\lambda| \geq C_2$ существует резольвента $(\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, которая удовлетворяет ограничению

$$\left\|(\lambda A + B)^{-1}\right\| \leq C_1 |\lambda|^r, \qquad |\lambda| \geq C_2, \tag{6}$$

где r — неотрицательное целое число. Поэтому (см. [6], лемму 4.1, а также [7], леммы 2.1, 2.2) справедливы прямые разложения линеала $D = D_1 \dot{+} D_2$ в Y и пространства $X = X_1 \dot{+} X_2$ такие, что операторы A, B отображают D_j в X_j, $j = 1, 2$, D_2 есть линеал собственных и присоединенных векторов пучка $\mu B + A$ в точке $\mu = 0$, $X_2 = BD_2$, $X_1 = AD_1$, $\operatorname{Ker} A \cap D_1 = \{0\}$, $\operatorname{Ker} B \cap D_2 =$ $= \{0\}$. Пусть P_1, $P_2 = E - P_1$, и Q_1, $Q_2 = E - Q_1$ — пары взаимно дополнительных проекторов соответственно на D_1, D_2 и X_1, X_2:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2}(\lambda A+B)^{-1}d\lambda A, \qquad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2}A(\lambda A+B)^{-1}d\lambda.$$

Замкнутый линейный оператор

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B : D \to X, \; D_G = D,$$

отображает D_j в X_j и имеет ограниченный обратный $G^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, причем

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \qquad G^{-1}BP_2 = P_2, \qquad AG^{-1}Q_1 = Q_1,$$
$$BG^{-1}Q_2 = Q_2, \qquad (AG^{-1})^{r+1}Q_2 = 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$W = -Q_1 BG^{-1} \in \mathcal{L}(X), \qquad F = AG^{-1}Q_2 \in \mathcal{L}(X).$$

В случае $r \geq 1$ предполагаем, что $F^l f(t) \in W_2^l(t_0, T; X)$ для $l = 1, \ldots, r$. Если выполняются условия

$$Q_2 q = \sum_{l=0}^{r}(-1)^l \frac{d^l}{dt^l}\left[F^{l+1}f(t)\right]_{t=t_0}, \qquad l = 0, \ldots, r, \tag{8}$$

то существует единственная функция $y(t) \in L_2(t_0, T; Y)$ такая, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [t_0, T]$, $Ay(t) \in W_2^1(t_0, T; X)$, $By(t) \in L_2(t_0, T; X)$, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (3) для почти всех $t \in [t_0, T]$ и начальному условию $(Ay)(t_0 + 0) = q$. Справедливо представление

$$y(t) = \varphi(t) \doteq G^{-1}\left[e^{W(t-t_0)}Q_1 q + \int_{t_0}^{t} e^{W(t-s)}Q_1 f(s)\,ds + \sum_{l=0}^{r}(-1)^l \frac{d^l}{dt^l}\left[F^l Q_2 f(t)\right]\right] \tag{9}$$

(полагаем $0^0 = E$). Подробное доказательство формулы (9) см. в [7] (лемма 3.1). Если

$$Q_2 K h_j = Q_2 K \sum_{\tau_k = t_j} z_k = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{10}$$

то, последовательно применяя этот результат к уравнению (3) на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$ с начальными условиями $(Ay)(t_j + 0) = (Ay)(t_j - 0) + h_j$, получаем существование и единственность решения задачи (1), (5) и его представление в виде

$$y(t) = \varphi(t) + G^{-1}\sum_{j=0}^{n+1}\chi(t - t_j)e^{W(t-t_j)}h_j, \tag{11}$$

где $\varphi(t)$ определяется выражением (9), $\chi(t)$ — функция Хевисайда. В частности, соотношения (10) выполняются, если

$$\operatorname{Im} K \subset X_1. \tag{12}$$

Здесь $\operatorname{Im} K$ — образ оператора K. В этом случае решение (11) допускает представление

$$y(t) = \varphi(t) + G^{-1}\sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)e^{W(t-\tau_k)}Kz_k. \qquad (13)$$

Обозначим через $z = \{z_1, \ldots, z_N\}$ вектор пространства Z^N, через $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_{n+1}\}$ вектор пространства Z^{n+2} и через $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ вектор пространства $\mathbb{R}^N$. Введем множество векторов $\Theta = \{\tau \in \mathbb{R}^N : \tau_k \in [t_0, T]\}$. Поскольку ограничения на импульсы (10) являются не только достаточными для разрешимости задачи (1), (5), но и необходимыми, множество допустимых управлений состоит из управлений $u = u(\tau, z)$ (1), для которых $\tau_k \in [t_0, T]$ и z_k удовлетворяют соотношениям (10). В частности, достаточно предположить выполнение ограничения (12). Пусть сначала управление системой (1), (5) осуществляется путем изменения интенсивностей $z_1, \ldots, z_N$ в фиксированные моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_N$. Задача заключается в нахождении минимума $\min\limits_{z\in Z^N} J(\tau, z)$ функционала качества

$$J(\tau, z) = J(u) = \int_{t_0}^{T}\langle Ry(t), y(t)\rangle_Y dt + \langle Sz, z\rangle_{Z^N} \qquad (14)$$

на решениях $y(t) = y(t, u)$ системы (1), (5). В (14) через $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ обозначено скалярное произведение в пространстве Y. Относительно операторов $R \in \mathcal{L}(Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Z^N)$ предполагаем, что они являются неотрицательно определенными и $S \geq \delta E$, $\delta > 0$. Управление $u_{*\tau}$, соответствующее элементу $z_{*\tau} \in Z^N$, на котором достигается минимум функционала (14), будем называть τ-*оптимальным управлением,* а соответствующее решение $y_{*\tau}(t) = y(t, u_{*\tau})$ системы (1), (5) — τ-*оптимальным решением.* В следующей теореме устанавливаются существование и единственность τ-оптимального управления задачи (1), (5), (14).

Теорема 1. *Пусть выполнены ограничения* (6), (12); $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$ *и если* $r \geq 1$, *то* $F^l f(t) \in W_2^l(t_0, T; X)$, $l = 1, \ldots, r$; *вектор* q *в начальном условии* (5) *удовлетворяет ограничению* (8). *Тогда для любого* $\tau \in \Theta$ *существуют единственный вектор* $z_{*\tau} \in Z^N$ *и соответствующее ему управление* $u_{*\tau} = u(\tau, z_{*\tau})$, *на котором достигается минимум* $\min\limits_{z\in Z^N} J(\tau, z)$ *функционала качества* (14).

Доказательство. Представим функционал $J(u)$ (14) как квадратичную форму, определенную на Z^N. Обозначим $H_X = L_2(t_0, T; X)$, $H_Y = L_2(t_0, T; Y)$. Положим

$$w(t) = G^{-1}\left[e^{W(t-t_0)}Q_1 q + \int_{t_0}^{t} e^{W(t-s)}Q_1 f(s)\,ds + \sum_{l=0}^{r}(-1)^l \frac{d^l}{dt^l}\left[F^l Q_2 f(t)\right]\right].$$

Понятно, что $w(t) \in H_Y$. Определим ограниченный линейный оператор L из Z^N в H_Y:

$$Lv = G^{-1}\sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)e^{W(t-\tau_k)}Q_1 K v_k, \quad v = \{v_1, \ldots, v_N\} \in Z^N. \qquad (15)$$

Для любых $\tau \in \Theta$, $z \in Z^N$ существует единственное решение $y(t, u(t, z)) \in H_Y$

задачи (1), (5):

$$y(t, u(t, z)) = (Lz)(t) + w(t). \tag{16}$$

Тогда функционал $J(u)$ в (14) можно представить в виде

$$J(u) = \langle R(Lz + w), Lz + w \rangle_{H_Y} + \langle Sz, z \rangle_{Z^N}.$$

Оператор

$$M = S + L^* RL \in \mathcal{L}(Z^N) \tag{17}$$

является самосопряженным и имеет ограниченный обратный $M^{-1} \in \mathcal{L}(Z^N)$, так как

$$\langle Mv, v \rangle_{Z^N} \geq \delta \| v \|^2_{Z^N}, \qquad \left\| M^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\delta}. \tag{18}$$

Покажем, что τ-оптимальное управление $u_{*\tau}$ есть

$$u_{*\tau} = \sum_{k=1}^{N} z_{*\tau k} \delta(t - \tau_k), \qquad z_{*\tau} = \{z_{*\tau 1}, \ldots, z_{*\tau N}\} = -M^{-1} L^* Rw. \tag{19}$$

Действительно, прежде всего заметим, что

$$J(u) = \langle Mz, z \rangle_{Z^N} + 2\operatorname{Re}\left\langle L^* Rw, z \right\rangle_{Z^N} + \langle Rw, w \rangle_{H_Y}. \tag{20}$$

Отсюда получаем

$$J(u) - J(u_{*\tau}) = \left\langle M(z - z_{*\tau}), z - z_{*\tau} \right\rangle_{Z^N} \geq \delta \left\| z - z_{*\tau} \right\|^2_{Z^N}.$$

Это означает, что $u_{*\tau}$ (19) является единственным τ-оптимальным управлением.

Теорема доказана.

Из (16), (17), (19) получаем, что соотношение

$$Sz + L^* Ry(u) = 0 \tag{21}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $u = u_{*\tau}$ является τ-оптимальным управлением, а $y = y(u_{*\tau})$ — τ-оптимальным решением. Для оператора L (15) находим сопряженный оператор $L^* \in \mathcal{L}(H_Y, Z^N)$:

$$L^* x = \left\{ K^* Q_1^* \int_{\tau_k}^{T} e^{W^*(t - \tau_k)} [G^{-1}]^* x(t)\, dt \right\}_{k=1}^{N}. \tag{22}$$

Тогда соотношение (21) можно записать в виде

$$Sz + \{K^* p(\tau_k)\}_{k=1}^{N} = 0, \qquad p(t) = \int_{t}^{T} e^{W^*(s-t)} Q_1^* [G^{-1}]^* Ry(s)\, ds. \tag{23}$$

Заметим, что $p(t) \in W_2^1(t_0, T; X)$ является единственным решением задачи

$$p'(t) = -W^* p(t) - Q_1^* [G^{-1}]^* Ry(t) \quad \text{п.в.} \quad t_0 \leq t \leq T, \quad p(T) = 0. \tag{24}$$

С помощью (23) вектор $z_{*\tau}$ допускает представление

$$z_{*\tau} = -S^{-1}\{K^* p(\tau_k)\}_{k=1}^N. \qquad (25)$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены ограничения* (6), (12); $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$ *и если* $r \geq 1$, *то* $F^l f(t) \in W_2^l(t_0, T; X)$, $l = 1, \ldots, r$; *вектор* q *в начальном условии* (5) *удовлетворяет ограничению* (8). *Тогда задача* (1), (5), (23), (24) *имеет единственное решение* $y(t) = y_{*\tau}(t) \in L_2(t_0, T; Y)$, $p(t) \in W_2^1(t_0, T; X)$, $z = z_{*\tau}$. *Импульсная функция* $u_{*\tau} = \sum_{k=1}^N z_{*\tau k}\delta(t - \tau_k)$ *является* τ*-оптимальным управлением, а функция* $y_{*\tau}(t)$ *— соответствующим* τ*-оптимальным решением.*

Теперь управление системой (1), (5) будем осуществлять путем изменения моментов импульсных воздействий $\tau_1, \ldots, \tau_N$ и соответствующих интенсивностей импульсов $z_1, \ldots, z_N$. Ищем минимум $\min\limits_{\tau \in \Theta, z \in Z^N} J(\tau, z)$ функционала качества (14). Управление $u_* = u_*(\tau_*, z_*)$, соответствующее элементам $\tau_* \in \Theta$, $z_* \in Z^N$, на котором достигается этот минимум, будем называть *оптимальным управлением,* а соответствующее решение $y_*(t) = y(t, u_*)$ системы (1), (5) — *оптимальным решением.*

Оператор $L = L(\tau)$ (15) сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$. Его сопряженный $L^* = L^*(\tau)$ (22) также сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$. Поэтому сильно непрерывным по $\tau \in \Theta$ является оператор $M = M(\tau)$ (17). В силу оценки (18) обратный оператор $M^{-1}(\tau)$ равномерно ограничен и, следовательно, сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$. Отсюда получаем, что $z_{*\tau}$ (19), как функция $\tau \in \Theta$ со значениями в Z^N, непрерывна. Используя представление (20), устанавливаем, что $\min\limits_{z \in Z^N} J(\tau, z) = J(u_{*\tau})$ является функцией, непрерывной по $\tau \in \Theta$. Если $\tau_* = \{\tau_{*1}, \ldots, \tau_{*N}\} \in \Theta$ — вектор, на котором достигается минимум функции $J(u_{*\tau})$, то оптимальное управление u_* есть

$$u_* = u_{*\tau_*} = \sum_{k=1}^N z_{*k}\delta(t - \tau_{*k}), \quad z_* = \{z_{*1}, \ldots, z_{*N}\} = -M^{-1}(\tau_*)L^*(\tau_*)Rw. \qquad (26)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены ограничения* (6), (12); $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$ *и если* $r \geq 1$, *то* $F^l f(t) \in W_2^l(t_0, T; X)$, $l = 1, \ldots, r$; *вектор* q *в начальном условии* (5) *удовлетворяет ограничению* (8). *Тогда существуют векторы* $\tau_* \in \Theta$, $z_* \in Z^N$ *и соответствующее им оптимальное управление* u_* (26), *на котором достигается минимум* $\min\limits_{\tau \in \Theta, z \in Z^N} J(\tau, z)$ *функционала качества* (14).

Замечание. Теоремы 1 – 3 упрощаются в следующих частных случаях: 1) существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, 2) $A = E$, $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, 3) $\dim X = \dim Y < \infty$.

Покажем, как полученные абстрактные результаты применяются к управлению системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. При исследовании процесса фильтрации жидкости в трещиновато-пористых породах возникает уравнение в частных производных не типа Ковалевской для давления жидкости в трещинах [9]. Предполагая наличие несвободного распределенного внешнего источника [7] (раздел 1.5), в случае управления с помощью импульсных воздействий приходим к следующей начально-краевой задаче в области $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq \pi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[y(t,x)+\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right]+\delta_1 y(t,x)-\delta_2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = Ku+f(t,x),$$

$$u = \sum_{k=1}^{N} z_k(x)\delta(t-\tau_k), \quad y(-0,x)+\frac{\partial^2 y(-0,x)}{\partial x^2} = q(x), \quad y(t,0) = y(t,\pi) = 0, \tag{27}$$

где $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 > 0$, $q(x)$, $z_k(x)\in L_2(0,\pi)$, $f(t,x)\in L_2(t_0,T;L_2(0,\pi)) = L_2([0,T]\times[0,\pi])$, $K\in\mathcal{L}(L_2(0,\pi))$.

Задача оптимального импульсного управления заключается в нахождении моментов приложения импульсов $\tau = \{\tau_1,\ldots,\tau_N\}\in\Theta = \{\tau\colon \tau_k\in[0,T]\}$ и соответствующих интенсивностей $z(x) = \{z_1(x),\ldots,z_N(x)\}\in[L_2(0,\pi)]^N$, минимизирующих критерий качества

$$J(u) = \int_0^T\int_0^\pi |y(t,x)|^2\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{N}\int_0^\pi |z_k(x)|^2\,dx \tag{28}$$

на решениях $y(t,x)$ задачи (27). Любую функцию $y:(t,x)\to y(t,x)$ мы будем так же рассматривать как функцию от t со значениями в пространстве функций от x и записывать как $y(t)(x)$. В пространстве $X = Y = L_2(0,\pi)$ смешанная задача (27) записывается в абстрактной форме (1), (5) с дифференциальными операторами

$$Ag = g(x)+\frac{d^2g(x)}{dx^2}, \quad Bg = \delta_1 g(x)-\delta_2\frac{d^2g(x)}{dx^2},$$

$$D = D_A = D_B = \mathring{W}_2^2(0,\pi) = \left\{g(x)\in W_2^2(0,\pi),\ g(0) = g(\pi) = 0\right\},$$

где $W_2^2(0,\pi)$ — пространство Соболева порядка 2 функций из $L_2(0,\pi)$. Решение задачи (27) понимается в смысле решения абстрактной задачи (1), (5).

Для функции $g(x)\in L_2(0,\pi)$ будем использовать обозначение g_m для ее коэффициентов в разложении

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m\sin mx, \quad g_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin mx\,dx, \quad m = 1,2,\ldots. \tag{29}$$

Существует резольвента

$$(\lambda A+B)^{-1}g(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m\sin mx}{\lambda+\delta_1-\lambda m^2+m^2\delta_2}, \ \lambda\neq\alpha_m = \frac{\delta_1+m^2\delta_2}{m^2-1}, \ m = 2,3,\ldots,$$

для которой выполнена оценка (6) с $r = 0$. Пусть функция $q(x)$ и оператор K в (27) такие, что $\int_0^\pi q(x)\sin x dx = 0$ и $K^*\sin x = 0$. Для решения задачи минимизации функционала (28) на решениях $y(t,x)$ системы (27) можно применить теоремы 1 – 3. Представления для $y(t,x)$ (13) и $p(t,x)$ (23) принимают вид

$$y(t,x) = \frac{f_1(t)\sin x}{\delta_1+\delta_2}+\sum_{m=2}^{\infty}y_m(t)\sin mx, \quad p(t,x) = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin mx}{1-m^2}\int_t^T e^{\alpha_m(s-t)}y_m(s)\,ds,$$

$$y_m(t) = \frac{1}{1-m^2}\left[e^{\alpha_m t}q_m + \sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)e^{\alpha_m(t-\tau_k)}(Kz_k)_m + \int_0^t e^{\alpha_m(t-s)}f_m(s)\,ds\right],$$

$$m = 2, 3, \ldots .$$

Мы используем обозначение (29) для функций $q(x)$, $f(t,x)$, $z_k(x)$, $y(t,x)$, $p(t,x)$. Запишем соотношение (25) для τ-оптимальных интенсивностей импульсов $z_k(x)$:

$$z_k(x) = -\left(K^* p(\tau_k)\right)(x),$$

$$p_m(t) = \beta_m(t,0)q_m + \sum_{j=1}^{N}\beta_m(t,\tau_j)(Kz_j)_m + \int_0^T \beta_m(t,s)f_m(s)\,ds,$$

$$\beta_m(t,s) = \frac{e^{\alpha_m(2T-t-s)} - e^{\alpha_m|s-t|}}{2\alpha_m(1-m^2)^2}, \qquad m = 2, 3, \ldots .$$

В частности, если $N = 1$, то τ-оптимальная интенсивность определяется как

$$z_{*\tau}(x) = \left[E + K^*\Phi(\tau)K\right]^{-1}a(\tau)(x), \qquad \Phi(\tau)g(x) = \sum_{m=2}^{\infty}\beta_m(\tau,\tau)g_m\sin mx,$$

$$a(\tau,x) = -K^*\left[\sum_{m=2}^{\infty}\left[\beta_m(\tau,0)q_m + \int_0^T \beta_m(\tau,s)f_m(s)\,ds\right]\sin mx\right].$$

1. *Красовский Н. Н.* Теория оптимального управления движением. Линейные системы. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
2. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
4. *Ляшко С. И.* Импульсное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 2. – С. 285 – 287.
5. *Соболев С. Л.* Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской // Там же. – 1952. – **82**, № 2. – С. 205 – 208.
6. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996 – 2010.
7. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. – 273 с.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
9. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**. – С. 852 – 864.

Получено 07.05.08