КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т,
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Г. С. Жиганова (Днепропетр. нац. ун-т)

О НАИЛУЧШИХ L_2-ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПЛЕСКОВ

We obtain the exact Jackson-type inequalities for approximations in $L_2(\mathbb{R})$ of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$ with the use of partial sums of the wavelet series in the case of the Meyer wavelets and the Shannon – Kotelnikov wavelets.

Одержано точні нерівності типу Джексона для наближень в $L_2(\mathbb{R})$ функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ за допомогою частинних сум сплескових рядів у випадку сплесків Мейєра та Шеннона – Котельникова.

Первое точное неравенство типа Джексона было получено Н. П. Корнейчуком [1], который доказал, что

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{C_{2\pi}},$$

где $E_n(f)_{C_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной 2π-периодической функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $n - 1$, а $\omega(f, t)_{C_{2\pi}}$ — равномерный модуль непрерывности функции f.

Позже Н. И. Черных [2, 3] исследовал вопрос о наилучшей константе в неравенстве Джексона для наилучших приближений $E_n(f)$ в $L_2(0, 2\pi)$ функции $f(t) \in L_2(0, 2\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка n. Им было получено неулучшаемое неравенство

$$E_n(f)_{L_2(0,2\pi)} < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2(0,2\pi)}.$$

Для доказательства этого неравенства Н. И. Черных установил представляющее самостоятельный интерес неравенство

$$E_n(f)_{L_2(0,2\pi)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \omega(f, u)^2_{L_2(0,2\pi)} \sin nu\, du\right\}^{1/2}.$$

Им же было доказано, что для любой функции $f(x)$, у которой $f^{(r)}(x) \in L_2(0, 2\pi)$, имеет место неравенство

$$E_n(f)_{L_2(0,2\pi)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \omega\left(f^{(r)}, u\right)^2_{L_2(0,2\pi)} \sin nu\, du\right\}^{1/2}.$$

Используя идеи Н. И. Черных, И. И. Ибрагимов и Ф. Г. Насибов [4], а также, независимо, В. Ю. Попов [5] получили аналогичные неравенства для наилучшего приближения функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа σ. Точнее, в работах [4, 5] было доказано неулучшаемое неравенство

$$E_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f, \frac{\pi}{\sigma}\right)_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

а в работе [5] В. Ю. Попов получил также неулучшаемые неравенства

$$E_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\omega(f,u)^2_{L_2(\mathbb{R})}\sin\sigma u\,du\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

$$E_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sigma^r}\left\{\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\omega\left(f^{(r)},u\right)^2_{L_2(\mathbb{R})}\sin\sigma u\,du\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

В дальнейшем задачи, связанные с точными неравенствами типа Джексона в пространствах $L_2(0,2\pi)$ и $L_2(\mathbb{R})$, изучались многими авторами (см., например, [6 – 11]).

В настоящей статье показано, что, используя метод Н. И. Черных, можно получить точные неравенства типа Джексона для приближения функций $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ с помощью частных сумм всплесковых рядов в случае всплесков Мейера и Шеннона – Котельникова.

Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство измеримых функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Мы будем использовать преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-i\xi t}\,dt$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\hat{f}\right\|_2.$$

Напомним, что модулем непрерывности функции $f(t)\in L_2(\mathbb{R})$ называется функция

$$\omega(f,\delta)_2 = \sup_{|u|\le\delta}\|f(t+u)-f(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \delta\ge 0.$$

Приведем необходимые сведения из теории всплесков (см., например, [12], гл. 7). Функция $\psi\in L_2(\mathbb{R})$ называется всплеском, если система функций

$$\psi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\psi\left(2^k x - l\right), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad k,\ l\in\mathbb{Z},$$

является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$. Обычно для построения всплесков используется тот или иной кратномасштабный анализ (КМА) (хотя существуют всплески, не порожденные никакими КМА).

Рассмотрим последовательность подпространств $V=\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ пространства $L_2(\mathbb{R})$. Ее называют КМА, если выполняются следующие условия:

A_1) $V_k\subset V_{k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$;

A_2) $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}V_k} = L_2(\mathbb{R})$;

A_3) $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} V_k = \{0\}$;

A_4) $f(x) \in V_k$, если и только если $f(2x) \in V_{k+1}$;

A_5) существует функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что система $\{\varphi(x-k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис в V_0. Функцию φ называют масштабной функцией КМА V.

Из свойств A_4) и A_5) КМА следует, что для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi\}_k = \{\varphi_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$, где $\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi\left(2^k x - l\right)$, образует ортонормированный базис в V_k.

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ через W_k обозначим ортогональное дополнение пространства V_k до пространства V_{k+1}:

$$V_k \oplus W_k = V_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из условий A_1) – A_3) следует разложение пространства $L_2(\mathbb{R})$

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k = L_2(\mathbb{R}),$$

причем в силу условия A_4) $f(x) \in W_k$, если и только если $f(2x) \in W_{k+1}$.

Пусть функция ψ такова, что система $\{\psi\}_0 = \left\{\psi_{0,l} = \psi(\cdot - l)\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис пространства W_0. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ система $\{\psi\}_k = \left\{\psi_{k,l} = 2^{k/2}\psi(2^k \cdot - l)\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис пространства W_k, а система $\{\psi\} = \left\{\psi_{k,l}\right\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис $L_2(\mathbb{R})$, т. е. ψ является всплеском. В этом случае говорят, что ортогональный всплеск ψ порождается КМА V.

Пусть $0 < \varepsilon \le 1/3$ и непрерывная функция $\theta(\xi) = \theta_\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $0 \le \theta(\xi) \le 1$, $\theta(-\xi) = \theta(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$;

2) $\theta(\xi) = 1$ при $|\xi| \le (1-\varepsilon)\pi$ и $\theta(\xi) = 0$ при $|\xi| \ge (1+\varepsilon)\pi$;

3) $\theta^2(\pi - \xi) + \theta^2(\pi + \xi) = 1$ при $\xi \in [0, \pi]$.

Определим функцию $\varphi^{M,\varepsilon} \in L_2(\mathbb{R})$ равенством

$$\widehat{\varphi^{M,\varepsilon}}(\xi) = \theta(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Пусть задан КМА $V^\varepsilon = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, который порождается масштабной функцией $\varphi^{M,\varepsilon}$. Этот КМА порождает ортонормированные всплески Мейера, которые определяются равенством

$$\widehat{\psi^{M,\varepsilon}}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\sqrt{\theta^2\left(\frac{\xi}{2}\right) - \theta^2(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\psi^{M,\varepsilon}} = [-(1+\varepsilon)2\pi, -(1-\varepsilon)\pi] \cup [(1-\varepsilon)\pi, (1+\varepsilon)2\pi]$, так что $\widehat{\psi^{M,\varepsilon}_{k,j}}(t) = 0$ для любого $t \in \left[-(1-\varepsilon)\pi 2^k, (1-\varepsilon)\pi 2^k\right]$.

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ и КМА V^ε положим

$$E^\varepsilon(f, V_k)_2 = \inf\left\{\|f - h\|_2 : h \in V_k\right\}.$$

Переходя к изложению основных результатов статьи, в первую очередь установим справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *неэквивалентной нулю, и любого* $n \in \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство*

$$E^{\varepsilon}(f, V_{n-1})_2 \;<\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi \int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \omega(f,u)_2^2 \sin\left(2^n \pi(1-\varepsilon)u\right) du \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

При этом константу $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *в правой части неравенства* (4) *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Произвольную функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно представить в виде суммы сходящегося в $L_2(\mathbb{R})$ ряда

$$f(x) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \psi_{k,j}^{M,\varepsilon}(x),$$

где $c_{k,j} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}(x)}\,dx$. Наилучшее приближение функции f пространством V_{n-1} реализуют частные суммы $S_n^{\varepsilon} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \psi_{k,j}^{M,\varepsilon}(x)$, так что

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2^2 \;=\; \left\| f - S_n^{\varepsilon} f \right\|_2^2 \;=\; \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \psi_{k,j}^{M,\varepsilon} \right\|_2^2 \;=$$

$$=\; \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| c_{k,j} \right|^2 \;=\; \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}} \right\|_2^2.$$

Поскольку $\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(t)$ принимает нулевые значения для любого $t \in \left[-(1-\varepsilon)\pi 2^k,\right.$ $\left.(1-\varepsilon)\pi 2^k\right]$, то

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2^2 \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\varepsilon| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}\;(\xi) \right|^2 d\xi. \tag{5}$$

Оценим модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\omega(f,u)_2^2 \;\geq\; \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|_2^2 \;=\; \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\cdot)\left(e^{j(\cdot)u} - 1\right) \right\|_2^2 =$$

$$=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \left| e^{i\xi u} - 1 \right|^2 d\xi \;=$$

$$=\; \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 (1 - \cos\xi u)\, d\xi \;\geq$$

$$\geq\; \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n (1-\varepsilon)\pi} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\, \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 (1 - \cos\xi u)\, d\xi \;=$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 d\xi -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \cos \xi u d\xi \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \geq n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 d\xi -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \cos \xi u \, d\xi.$$

Учитывая равенство (5), получаем

$$\omega(f, u)_2^2 \geq 2 E^{\varepsilon}\big(f, V_{n-1}\big)_2^2 - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \cos \xi u d\xi$$

или

$$E^{\varepsilon}\big(f, V_{n-1}\big)_2^2 \leq \frac{1}{2} \omega(f, u)_2^2 + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \cos \xi u d\xi. \tag{6}$$

Умножим правую и левую части неравенства (6) на $\sin\big(2^n(1-\varepsilon)\pi u\big)$ и проинтегрируем полученное неравенство по u на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2^n(1-\varepsilon)}\right]$. В результате получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} E^{\varepsilon}\big(f, V_{n-1}\big)_2^2 \sin\big(2^n \pi(1-\varepsilon) u\big) du \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \omega(f, u)_2^2 \sin\big(2^n \pi(1-\varepsilon) u\big) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \int\limits_{|\xi| \geq 2^n \pi(1-\varepsilon)} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k,j} \widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi) \right|^2 \cos \xi u \sin\big(2^n \pi(1-\varepsilon) u\big) d\xi \, du. \tag{7}$$

Отметим, что

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} E^{\varepsilon}\big(f, V_{n-1}\big)_2^2 \sin\big(2^n \pi u\big) du = E^{\varepsilon}\big(f, V_{n-1}\big)_2^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \sin\big(2^n \pi u\big) du =$$

$$= E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2^2 \left(-\frac{1}{2^n\pi(1-\varepsilon)}\cos 2^n\pi u\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} = \frac{1}{2^{n-1}\pi(1-\varepsilon)} E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2^2.$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части (7) отрицательно. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}}\int\limits_{|\xi|\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\,\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi)\right|^2 \cos\xi u \sin\left(2^n(1-\varepsilon)\pi u\right) d\xi\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\,\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi)\right|^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \cos\xi u \sin\left(2^n\pi(1-\varepsilon) u\right) du\, d\xi.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \cos\xi u \sin\left(2^n\pi u\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \left[\sin\left(2^n(1-\varepsilon)\pi + \xi\right)u + \sin\left(2^n(1-\varepsilon)\pi - \xi\right)u\right] du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2^n\pi(1-\varepsilon)+\xi}\cos\left(2^n\pi(1-\varepsilon)+\xi\right)u - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^n\pi(1-\varepsilon)-\xi}\cos\left(2^n\pi(1-\varepsilon)-\xi\right)u\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2^{n+1}\pi(1-\varepsilon)}{2^{2n}(1-\varepsilon)^2\pi^2-\xi^2}\cos\frac{\xi}{2^n(1-\varepsilon)} + \frac{2^{n+1}\pi(1-\varepsilon)}{2^{2n}(1-\varepsilon)^2\pi^2-\xi^2}\right] =$$

$$= \frac{2^n\pi(1-\varepsilon)}{2^{2n}(1-\varepsilon)^2\pi^2-\xi^2}\left(1+\cos\frac{\xi}{2^n(1-\varepsilon)}\right).$$

Поскольку $2^n\pi(1-\varepsilon)\left(1+\cos\frac{\xi}{2^n(1-\varepsilon)}\right) > 0$ для почти всех ξ, при всех $|\xi| \ge$ $\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \cos\xi u \sin\left(2^n\pi(1-\varepsilon)u\right) du < 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}}\int\limits_{|\xi|\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{k,j}\,\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi)\right|^2 \cos\xi u \sin\left(2^n\pi(1-\varepsilon)u\right) d\xi\, du < 0,$$

т. е. отрицательность второго слагаемого в правой части (7) доказана.

Теперь из (7) получаем

$$\frac{1}{2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi} E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2^2 < \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \omega(f,u)_2^2 \sin\left(2^n \pi(1-\varepsilon)u\right) du.$$

Неравенство (4) доказано. Утверждение о точности константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в неравенстве (4) следует из точности константы в неравенстве (2) при $\sigma = (1-\varepsilon)\pi 2^n$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}$ *и любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *неэквивалентной нулю, выполняется неравенство*

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f, \frac{1}{(1-\varepsilon)2^n}\right)_2. \tag{8}$$

При любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$ *константу* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *в правой части неравенства нельзя заменить меньшей.*

Доказательство. Поскольку $\omega(f,u)_2$ — неубывающая функция, из неравенства (4) получаем

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}\right)_2^2 2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi \int_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \left(2^n \pi(1-\varepsilon)u\right) du \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f, \frac{1}{(1-\varepsilon)2^n}\right)_2.$$

Неравенство (8) доказано. Неулучшаемость константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в правой части неравенства (8) следует из неулучшаемости константы в неравенстве (1) при $\sigma = (1-\varepsilon)\pi 2^n$.

Теорема доказана.

Теперь приведем неравенство, оценивающее $E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2$ через модуль непрерывности r-й производной функции f.

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *у которой* $(r-1)$*-я производная локально абсолютно непрерывна и* $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, *выполняется неравенство*

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2 <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2^n(1-\varepsilon)\pi\right)^{-r} \left\{ 2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi \int_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \omega\left(f^{(r)}, u\right)_2^2 \sin\left(2^n(1-\varepsilon)\pi u\right) du \right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ *константу* $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^n(1-\varepsilon)\pi\right)^{-r}$ *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Отметим, что в условиях теоремы

$$\widehat{f^{(r)}}(\xi) = (i\xi)^r \hat{f}(\xi). \tag{10}$$

Учитывая соотношения (5) и (10), получаем

$$E^{\varepsilon}\left(f^{(r)}, V_{n-1}\right)_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)}\left|(i\xi)^r\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_{k,j}\,\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi)\right|^2 d\xi\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge 2^n\pi(1-\varepsilon)}|i\xi|^{2r}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_{k,j}\,\widehat{\psi_{k,j}^{M,\varepsilon}}(\xi)\right|^2 d\xi\right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2\left(2^n\pi(1-\varepsilon)\right)^r.$$

Отсюда и из неравенства (4) следует неравенство

$$E^{\varepsilon}\left(f, V_{n-1}\right)_2 <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^n(1-\varepsilon)\pi\right)^{-r}\left\{2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}}\omega\left(f^{(r)}, u\right)_2^2\sin\left(2^n(1-\varepsilon)\pi u\right)du\right\}^{1/2}.$$

Утверждение о точности константы $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^n(1-\varepsilon)\pi\right)^{-r}$ в неравенстве (9) следует из точности неравенства (3).

Теорема доказана.

Пусть теперь задан КМА $V^0 = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, который порождается масштабной функцией

$$\varphi^s(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}, \qquad \widehat{\varphi^s}(\xi) = \chi_{(-\pi,\pi)}(\xi).$$

Этот КМА порождает ортонормированные всплески Шеннона – Котельникова

$$\psi^s(t) = 2\varphi^s(2t-1) - \varphi^s(t-1/2).$$

Отметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\psi^s} = [-2\pi; -\pi] \cup [\pi; 2\pi]$, так что $\widehat{\psi_{k,j}^s}(t) = 0$ для любого t, $|t| < \pi 2^k$.

Положим

$$E^0\left(f, V_{n-1}\right)_2 = \left\|f - \sum_{k=-\infty}^{n-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_{k,j}\psi_{k,j}^s\right\|_2.$$

Нетрудно проверить, что для величины $E^0\left(f, V_{n-1}\right)_2$ имеют место неравенства, аналогичные неравенствам (4), (8) и (9) с $\varepsilon = 0$. Для этого достаточно повторить с очевидными изменениями доказательства теорем 1 – 3. Впрочем эти аналоги могут быть получены (при $\varepsilon \to 0$) и непосредственно из теорем 1 – 3. Таким образом, из теорем 1 – 3 получаем такие следствия.

***Следствие* 1.** *Для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *неэквивалентной нулю, и любого* $n \in \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство*

$$E^0\left(f, V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2^{n-1}\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2^n}}\omega(f, u)_2^2\sin(2^n\pi u)\,du\right\}^{1/2}. \qquad (11)$$

При этом константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *в правой части неравенства* (11) *уменьшить нельзя.*

Следствие 2. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}$ *и любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *неэквивалентной нулю, выполняется неравенство*

$$E^0\left(f, V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\, \omega\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_2. \qquad (12)$$

При любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$ *константу* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *в правой части неравенства* (12) *уменьшить нельзя.*

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *у которой* $(r-1)$*-я производная локально абсолютно непрерывна и* $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, *выполняется неравенство*

$$E^0\left(f, V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^n \pi\right)^{-r} \left\{2^{n-1}\pi \int\limits_0^{\frac{1}{2^n}} \omega\left(f^{(r)}, u\right)_2^2 \sin(2^n \pi u)\, du\right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ *константу* $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^n \pi\right)^{-r}$ *в правой части неравенства* (13) *уменьшить нельзя.*

1. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.
2. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.
3. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, №5. – С. 513 – 522.
4. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Оценка наилучшего приближения суммируемой функции на действительной оси целыми функциями конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1113 – 1116.
5. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Сер. мат. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.
6. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 6. – С. 757 – 769.
7. *Юдин В. А.* Диофантовые приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54 – 57.
8. *Бабаенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651 – 664.
9. *Arestov V. V., Chernykh N. I.* On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approxim. and Funct. Spaces: Proc. Conf. (Gdansk, 1970). – Amsterdam: North-Holland, 1981. – P. 5 – 43.
10. *Волчков В. В.* О точных константах в неравенстве Джексона в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 108 – 110.
11. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях 2π-периодических функций и точных значениях n-поперечников функциональных классов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1603 – 1615.
12. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: АФЦ, 1999. – 550 с.

Получено 02.08.06,
после доработки – 12.03.07