УДК 517.923:517.912

В. Е. Круглов (Одес. нац. ун-т)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ПУАНКАРЕ – ПЕРРОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА И СВОДЯЩИХСЯ К НЕМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The analytical solution of the second-order difference Poincare – Perron equation is presented. This enables us to construct in the explicit form a solution of the differential equation

$$t^2(A_1t^2 + B_1t + C_1)u'' + t(A_2t^2 + B_2t + C_2)u' + (A_3t^2 + B_3t + C_3)u = 0.$$

The solution of the equation is represented in terms of two hypergeometric functions and one new special function. As a separate case, the explicit solution of the Heun equation is obtained, and polynomial solutions of this equation are found.

Наведено аналітичний розв'язок різницевого рівняння другого порядку типу Пуанкаре – Перрона. Це дозволило побудувати в явному вигляді розв'язок диференціального рівняння

$$t^2(A_1t^2 + B_1t + C_1)u'' + t(A_2t^2 + B_2t + C_2)u' + (A_3t^2 + B_3t + C_3)u = 0.$$

Розв'язок рівняння зображено через дві гіпергеометричні функції та одну нову спеціальну функцію. Як окремий випадок отримано явний розв'язок рівняння Гойна і знайдено поліноміальні розв'язки цього рівняння.

Основные специальные функции математической физики, представленные степенными рядами, получены как решения соответствующих линейных дифференциальных уравнений второго порядка с тремя особыми точками [1, 2]. Коэффициенты l_n этих степенных рядов достаточно просто находятся из двучленных рекуррентных уравнений типа

$$\beta_n l_n = \alpha_{n-1} l_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Если на комплексной плоскости рассмотреть дифференциальное уравнение

$$t^2(A_1t^2+B_1t+C_1)u''+t(A_2t^2+B_2t+C_2)u'+(A_3t^2+B_3t+C_3)u = 0, \quad C_1 \neq 0, \tag{2}$$

частным случаем которого является класс уравнений типа Гойна [2, 3], т. е. уравнений с четырьмя особыми точками, то коэффициенты l_n степенного ряда (см. ниже), удовлетворяющего (2), получают их трехчленного рекуррентного уравнения второго порядка типа Пуанкаре – Перрона [3, с. 61]

$$\begin{gathered} \gamma_1 l_1 = \beta_0 l_0, \\ \gamma_{n+1} l_{n+1} = \beta_n l_n + \alpha_{n-1} l_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3}$$

В [3] приведены достаточно обширная библиография по изучению уравнений класса Гойна, а также большое количество физических задач, сводящихся к уравнению Гойна. Однако во всех работах, известных автору, отсутствует явное решение уравнения (3). В данной работе получено явное решение уравнения (3) при $\gamma_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, что позволило получить явное решение уравнения (2), содержащее две гипергеометрические функции и одну новую специальную функцию, а также остаточные члены степенных рядов, представляющих эти функции. Кроме того, изучена структура коэффициента l_n, выраженная через параметры уравнения (2).

Алгоритм получения явного решения уравнения (3) пригоден для случая, когда $\gamma_n,\ \beta_n,\ \alpha_n$ — некоторые известные функции, что позволяет, например, явно построить множество ортогональных полиномов $l_n(t)$, для которых, как известно [4, с. 55], имеет место равенство (3).

1. Пусть $\delta_0 = 1,\ \delta_1 = 1, \delta_{n+1} = \delta_n + \delta_{n-1}$ — числовая последовательность Фибоначчи.

На последовательности $l_0,\ l_1, \ldots$ зададим функционал ψ следующим образом: $\psi(l_{n+1})$ — это число слагаемых в l_{n+1}.

Лемма 1. $\psi(l_{n+1}) = \delta_{n+1}$.

Доказательство. $\psi(l_0) = 1 = \delta_0,\ \psi(l_1) = 1 = \delta_1$. Определим очевидные свойства функционала ψ.

1. $\psi(al_{i+1}) = \psi(l_{i+1})$, где a — число, $a \neq 0$. (Умножение l_{n+1} на число не изменяет количество слагаемых в l_{n+1}.)

2. Для неравных нулю чисел a и b $\psi(al_n + bl_{n-1}) = \psi(l_n) + \psi(l_{n-1})$.

Действительно, в силу рекуррентности уравнения (3) все коэффициенты l_{n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, представимы как произведение l_0 на совокупность слагаемых, которая состоит из слагаемых, входящих в l_n и l_{n-1}. Не ограничивая общности, можно считать, что среди слагаемых, входящих в l_n и l_{n-1}, нет подобных членов. Тогда за счет умножения коэффициентов l_n и l_{n-1} соответственно на β_n/γ_{n+1} и $\alpha_{n-1}/\gamma_{n+1}$ среди слагаемых, входящих в l_{n+1}, также нет подобных членов.

Пусть для $i = n$ выполнено $\psi(l_n) = \delta_n$. Тогда $\psi(l_{n-1}) = \delta_{n-1}$ для $i = n-1$. Вычислим

$$\psi(l_{n+1}) = \psi\left(\frac{\beta_n l_n}{\gamma_{n+1}} + \frac{\alpha_{n-1} l_{n-1}}{\gamma_{n+1}}\right) = \psi(l_n) + \psi(l_{n-1}) = \delta_n + \delta_{n-1} = \delta_{n+1},$$

что и требовалось доказать. Из (3) следует, что при нахождении l_{n+1} используется набор чисел

$$I_{n+1} = \big(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n;\ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1};\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}\big).$$

Назовем цепью 1-го порядка или 1-цепью любое произведение $\alpha_i\gamma_{i+1}$ элементов из набора I_{n+1}. Две 1-цепи $\alpha_i\gamma_{i+1}$ и $\alpha_j\gamma_{j+1}$ назовем непересекающимися, если среди элементов этих пар нет элементов с одинаковыми индексами. Цепью k-го порядка или k-цепью назовем произведение k непересекающихся 1-цепей.

Обозначим $I'_{n+1} = \big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}\big)$.

Лемма 2. *Максимальный порядок k-цепи, которую можно составить из элементов набора I'_{n+1}, равен*

$$k = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

где $[\ldots]$ обозначает целую часть.

Доказательство. Пусть $n = 2s$. Цепь максимального порядка имеет вид $\alpha_0\gamma_1\alpha_2\gamma_3\ldots\alpha_{2s-1}\gamma_{2s}$. Отсюда $k = s = \left[\dfrac{2s+1}{2}\right] = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. При $n = 2s+1$

цепь максимального порядка такова: $\alpha_0\gamma_1\alpha_2\gamma_3\ldots\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}$. Тогда ее порядок $k = s+1 = \left[\frac{2s+2}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Количество k-цепей в наборе I'_{n+1} равно*

$$\binom{n-k+1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $k = 1$. Все 1-цепи, которые можно составить в наборе I'_{n+1}, это $\alpha_0\gamma_1,\ \alpha_1\gamma_2, \ldots, \alpha_{n-1}\gamma_n$. Их количество $n = \binom{n}{1}$.

Пусть при $k = p-1$ выполнено условие леммы, т. е. количество цепей $(p-1)$-го порядка в наборе I'_{n+1} равно $\binom{n-p+2}{p-1}$.

Покажем, что при $k = p$ количество p-цепей в наборе I'_{n+1} равно $\binom{n-p+1}{p}$. При этом используем неполную индукцию по n. Минимальное значение n, для которого в наборе I'_{n+1} существует p-цепь, равно $2p-1$, т. е. набор $I'_{2p} = \big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2p-2}; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p}\big)$ имеет всего лишь одну p-цепь $\alpha_0\gamma_1\alpha_2\gamma_3\ldots\alpha_{2p-2}\gamma_{2p-1}$.

Пусть $n = 2p$. Подсчитаем число p-цепей в наборе

$$I'_{2p+1} = \big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2p-2}, \alpha_{2p-1};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p}, \gamma_{2p+1}\big), \quad I'_{2p} \subset I'_{2p+1},$$

по следующему алгоритму. Найдем сначала все $(p-1)$-цепи в наборе

$$I'_{2p-1} = \big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2p-3}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p-1}\big), \quad n = 2p-2, \quad I'_{2p-1} \subset I'_{2p+1}.$$

По предположению их

$$\binom{n-p+2}{p-1} = \binom{p}{p-1}.$$

Поскольку в цепях запрещена комбинация $\alpha_{2p-2}\gamma_{2p-1}\alpha_{2p-1}\gamma_{2p}$ (есть элементы с одинаковыми индексами), каждую $(p-1)$-цепь из набора I'_{2p-1} можно умножить только на 1-цепь $\alpha_{2p-1}\gamma_{2p}$ из I'_{2p+1}. В результате порядок каждой $(p-1)$-цепи увеличится на единицу и в наборе

$$\big(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2p-3}, \alpha_{2p-1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p+1}\big) \subset I'_{2p+1}$$

получим $\binom{p}{p-1}$ уже p-цепей. Добавив к этим p-цепям p-цепь $\alpha_0\gamma_1\alpha_2\gamma_3\ldots\alpha_{2p-2}\gamma_{2p-1}$, получим $\binom{p}{p-1} + 1 = p+1 = \binom{p+1}{p}$ p-цепей в наборе I'_{2p+1}.

Пусть для $n = 2p-1+s$ число p-цепей в наборе $I'_{2p+s} = \big(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2p+s-2}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p+s}\big)$ равно $\binom{p+s}{p}$. Покажем, что для $n = 2p+s$ число p-цепей в наборе $I'_{2p+s+1} = \big(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2p+s-1};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p+s+1}\big)$ равно $\binom{p+s+1}{p}$. Так как

$I'_{2p+s+1} \supset I'_{2p+s-1}$, в наборе I'_{2p+s+1} есть $\begin{pmatrix} p+s \\ p \end{pmatrix}$ „старых" p-цепей. Далее применим для подсчета p-цепей тот же алгоритм, что и при $n = 2p$. Поскольку в цепях запрещена комбинация $\alpha_{2p+s-2}\gamma_{2p+s-1}\alpha_{2p+s-1}\gamma_{2p+s}$, выбросив из набора I'_{2p+s} элементы $\alpha_{2p+s-2}, \gamma_{2p+s-1}$, подсчитаем число $(p-1)$-цепей в наборе $I'_{2p+s-1} = \big(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2p+s-3}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{2p+s-1}\big)$. По предположению для $k = p-1$ в этом наборе число $(p-1)$-цепей равно $\begin{pmatrix} p+s \\ p-1 \end{pmatrix}$. Умножая каждую $(p-1)$-цепь на 1-цепь $\alpha_{2p+s-1}\gamma_{2p+s}$, получаем уже „новую" p-цепь, и число этих „новых" p-цепей в наборе I'_{2p+s+1} остается неизменным и равно $\begin{pmatrix} p+s \\ p-1 \end{pmatrix}$.

Добавляя к числу „новых" p-цепей число „старых" p-цепей, убеждаемся, что в наборе I'_{2p+s+1} число всех p-цепей равно

$$\begin{pmatrix} p+s \\ \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+s \\ \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+s+1 \\ \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-p+1 \\ \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-k+1 \\ \\ k \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Количество всех цепей разных порядков в наборе I'_{n+1} равно (δ_{n+1})-му числу Фибоначчи без единицы.*

Доказательство вытекает из известного равенства

$$\delta_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \begin{pmatrix} n-k+1 \\ \\ k \end{pmatrix}.$$

***Замечание* 1.** С увеличением порядка цепи количество цепей в наборе I'_{n+1} сначала увеличивается, а затем уменьшается. Легко получить тот порядок цепи m, для которого число m-цепей в наборе I'_{n+1} максимально, а именно:

при $n = 2s+1$ $\ s + \sigma_1 - 1 \le m \le s + \sigma_1$, где $\sigma_1 = \dfrac{7 - \sqrt{20s^2 + 20s + 9}}{10}$,

при $n = 2s$ $\ s + \sigma_2 - 1 \le m \le s + \sigma_2$, где $\sigma_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5s^2 + 1}}{5}$.

Произведение различных $n+1$ элементов из набора $I_{n+1} = (\beta_0, \ldots, \beta_n; \alpha_0, \ldots \ldots, \alpha_{n-1};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ назовем правильным длины $n+1$, если оно состоит из элементов (множителей), имеющих разные индексы. Другими словами, в правильном произведении не могут встречаться множители из I_{n+1}, имеющие одинаковые индексы.

Из всех правильных произведений длины $n+1$ выберем те, которые строятся следующим образом.

Возьмем произвольную 1-цепь в наборе I'_{n+1} и домножим ее на те $n-1$ элементов из $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, индексы которых не совпадают с индексами элементов этой цепи. Например, $\alpha_0\gamma_1\beta_2 \ldots \beta_n$, $\alpha_m\gamma_{m+1}\beta_0 \ldots \beta_{m-1}\beta_{m+2} \ldots \beta_n$. Сумму всех правильных произведений длины $n+1$, содержащих 1-цепи, обозначим d_n^1. Слагаемых в этой сумме столько же, сколько 1-цепей в наборе I'_{n+1}, т. е. $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$.

Далее, возьмем произвольную k-цепь в наборе I'_{n+1}, $k = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, и домножим на те $n - 2k + 1$ элементов из набора $\beta_0, \ldots, \beta_n$, индексы которых не совпадают с индексами элементов, входящих в эту k-цепь. Сумму всех правильных произведений длины $n+1$, каждое из которых содержит k-цепь, обозначим d^k_{n+k-1}. Слагаемых в этой сумме столько же, сколько k-цепей в наборе I'_{n+1}, т. е. $\begin{pmatrix} n-k+1 \\ k \end{pmatrix}$, и, наконец, через d^0_{n+1} обозначим правильное произведение $\beta_0\beta_1\ldots\beta_n$.

В дальнейшем эти суммы правильных произведений длины $n+1$ будем называть блоками и сохраним обозначения d^k_{n-k+1}, $k=0,1,\ldots,\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

Теорема. *Решение* l_{n+1} *уравнения* (3) *определяется при* $l_0 = 1$ *формулой*

$$l_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} d^k_{n-k+1}\right)(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n+1})^{-1}, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

для набора $I_{n+1} = \big(\beta_0,\ldots,\beta_n;\ \alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1};\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}\big)$.

Доказательство проведем индукцией по n. Непосредственно из уравнения (3) получаем

при $n=0$ $l_1 = \beta_0\gamma_1^{-1} = d^0_1\gamma_1^{-1}$ для набора $I_1 = (\beta_0;\gamma_1)$;

при $n=1$ $l_2 = (\beta_0\beta_1+\alpha_0\gamma_1)(\gamma_1\gamma_2)^{-1} = (d^0_2 + d^1_1)(\gamma_1\gamma_2)^{-1}$ для набора $I_2 = (\beta_0,\beta_1;\alpha_0;\gamma_1,\gamma_2)$;

при $n=2$ $l_3 = (\beta_0\beta_1\beta_2 + \alpha_0\gamma_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2\beta_0)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1} = (d^0_3 + d^1_2)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1}$ для набора $I_3 = (\beta_0,\beta_1,\beta_2;\ \alpha_0,\alpha_1;\ \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

Предположим, что (4) справедливо при $n=p$, т. е. для набора $I_{p+1} = \big(\beta_0,\ldots\beta_p;\ \alpha_0,\ldots\alpha_{p-1};\gamma_1,\ldots,\gamma_{p+1}\big)$

$$l_{p+1} = \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} d^k_{p-k+1}\right)(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{p+1})^{-1}.$$

Значит, (4) справедливо и при $n=p-1$, т. е. для $I_p = \big(\beta_0,\ldots,\beta_{p-1};\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-2};\ \gamma_1,\ldots,\gamma_p\big)$

$$l_p = \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} d^k_{p-k+1}\right)(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p)^{-1}.$$

Покажем, что равенство (4) справедливо при $n=p+1$ для набора $I_{p+2} = \big(\beta_0,\ldots,\beta_{p+1};\alpha_0,\ldots,\alpha_p;\gamma_1,\ldots,\gamma_{p+2}\big)$. Из (3) получаем

$$l_{p+2} = \frac{\beta_{p+1}}{\gamma_{p+2}}l_{p+1} + \frac{\alpha_p l_p}{\gamma_{p+2}} = (\gamma_1\ldots\gamma_{p+2})^{-1}\left[\beta_{p+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} d^k_{p-k+1} + \alpha_p\gamma_{p+1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} d^m_{p-m}\right]. \tag{5}$$

Покажем сначала, что все слагаемые в квадратных скобках — это правильные произведения длины $p+2$ из набора I_{p+2}.

Действительно, в первой сумме все слагаемые — это правильное произведение длины $p+1$ из набора I_{p+1}. Поэтому умножение их на β_{p+1} не изменяет правильность этих произведений, увеличивает их длину на 1 и добавляет в набор I_{p+1} элемент β_{p+1}. Во второй сумме все слагаемые — это правильные произведения длины p из набора I_p. Поэтому умножение их на 1-цепь $\alpha_p\gamma_{p+1}$ не нарушает правильность произведений, увеличивает длину произведения на 2 и порядок каждой цепи на 1 и добавляет в набор I_p элементы α_p, γ_{p+1}. Таким образом, в построении l_{p+2} участвуют элементы из набора I_{p+2} и все слагаемые — это правильные произведения длины $p+2$.

Запишем теперь квадратную скобку в (5) для $p = 2s$:

$$[\ldots] = \beta_{2s+1}\big(d^0_{2s+1} + d^1_{2s} + \ldots + d^k_{2s-k+1} + \ldots + d^s_{s+1}\big) +$$

$$+\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}\big(d^0_{2s} + d^1_{2s-1} + \ldots + d^{k-1}_{2s-k+1} + \ldots + d^s_s\big).$$

Сгруппируем те блоки слагаемых, которые содержат цепи одинакового порядка. Блок, не содержащий цепей: $\beta_{2s+1}d^0_{2s+1} = \beta_0\beta_1\ldots\beta_{2s+1} = d^0_{2s+2}$. 1-Цепи содержат блоки $\beta_{2s+1}d^1_{2s+1}$ и $\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}d^0_{2s}$. Их сумма образует блок слагаемых, содержащих 1-цепи в наборе l_{n+1}, т. е. d^1_{2s+2}, и число слагаемых в этом блоке равно $\binom{2s}{1} + 1 = \binom{2s+1}{1}$ и т. д.

k-Цепи содержат только блоки $\beta_{2s+1}d^k_{2s-k+1}$ и $\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}d^{k-1}_{2s-k+1}$. Их сумма образует блок d^k_{2s-k+2} в наборе I_{2s+2}, и число слагаемых в этом блоке равно

$$\binom{2s-k+1}{k} + \binom{2s-k+1}{k-1} = \binom{2s-k+2}{k}.$$

Наконец, s-цепи содержатся только в блоках $\beta_{2s+1}d^s_{s+1}$ и $\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}d^{s-1}_{s+1}$. Их сумма образует блок d^s_{s+2} в наборе I_{2s+2}, и число слагаемых в этом блоке равно

$$\binom{s+1}{s} + \binom{s+1}{s-1} = \binom{s+2}{s}.$$

$(s+1)$-Цепь в наборе I_{2s+2} — это $\alpha_{2s}\gamma_{2s+1}d^s_s = \alpha_0\gamma_1\ldots\alpha_{2s-2}\gamma_{2s-1}\alpha_{2s}\gamma_{2s+1} = d^{s+1}_{s+1}$, и она одна, т. е. $\binom{s+1}{s+1}$.

Таким образом,

$$l_{2s+2} = (\gamma_1\ldots\gamma_{2s+2})^{-1}\sum_{k=0}^{s+1} d^k_{2s-k+2} = (\gamma_1\ldots\gamma_{p+2})^{-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{p+2}{2}\right]} d^k_{p-k+2} = l_{p+2}.$$

Аналогично рассматривается случай $p = 2s+1$.

Теорема доказана.

Заменив в формуле (4) $n+1$ на n и разделив полученную сумму почленно на $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$, получим для l_n эквивалентную (4) форму

$$l_n = \sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{i_1=0}^{n-2k}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-2k+2}\ldots\sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-2}\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \frac{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i_1-1}\alpha_{i_1}\beta_{i_1+2}\ldots\beta_{i_k-1}\alpha_{i_k}\beta_{i_k+2}\ldots\beta_{n-1}}{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{i_1}\gamma_{i_1+2}\gamma_{i_1+3}\cdots\gamma_{i_k}\gamma_{i_k+2}\gamma_{i_k+3}\cdots\gamma_n}, \tag{7}$$

при этом числитель первого слагаемого в сумме (6), т. е. при $k = 0$, равен $\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-1}$; если же $k = [n/2]$, то сумма (6) завершается при $n = 2s$ слагаемым с числителем $\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{2s-2}$, а при $n = 2s+1$ — слагаемыми с числителями $\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{2s-2}\beta_{2s}$ и $\beta_0\alpha_1\ldots\alpha_{2s-1}$.

Из формулы (3), разделенной предварительно на γ_{n+1}, видно, что элементу β_n соответствует дробь β_n/γ_{n+1}, а элементу α_{n-1} — дробь $\alpha_{n-1}/\gamma_{n+1}$. Поэтому знаменатели всех дробей в (6) легко восстанавливаются по числителям этих дробей.

Элемент β_m назовем элементом первого ранга, элемент α_m — элементом второго ранга, а числитель каждой дроби в (6) и (7) — гиперцепью порядка n, составленной из элементов набора $I''_n = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})$. Множество гиперцепей порядка n обозначим l'_n, и их столько же, сколько слагаемых содержит коэффициент l_n, т. е. δ_n. Заметим, что если к каждой гиперцепи из l'_n добавить соответствующий знаменатель, то сумма полученных дробей даст коэффициент l_n.

Из формулы (7) следует, что все гиперцепи порядка n строятся из элементов β_m и α_m с соблюдением следующей иерархии расположения их в произведениях:

1) любая гиперцепь порядка n начинается с элемента с нулевым индексом;

2) любой элемент β_m ранга один умножается на следующий элемент, индекс которого на единицу больше, чем у β_m, причем этот элемент может быть любого ранга, именно: $\ldots\beta_m\beta_{m+1}\ldots$ или $\ldots\beta_m\alpha_{m+1}\ldots$; любой элемент α_m ранга два умножается на следующий элемент, индекс которого на две единицы больше, чем у α_m, причем этот элемент может быть любого ранга, именно: $\ldots\alpha_m\beta_{m+2}\ldots$ или $\ldots\alpha_m\alpha_{m+2}\ldots$.

Легко заметить, что порядок n каждой гиперцепи равен сумме рангов всех входящих в эту гиперцепь элементов.

2. Решение уравнения (2) в окрестности точки $t = 0$ ищем в виде степенного ряда (решение Фробениуса)

$$u(t) = l_0t^\rho + l_1t^{\rho+1} + \ldots, \quad l_0 \neq 0. \tag{8}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_n &= A_3 + (\rho+n)A_2 + (\rho+n)(\rho+n-1)A_1, \\ \beta_n &= B_3 + (\rho+n)B_2 + (\rho+n)(\rho+n-1)B_1, \\ \gamma_n &= C_3 + (\rho+n)C_2 + (\rho+n)(\rho+n-1)C_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Предположим, что $\gamma_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Подставляя (8) в (2) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях t, получаем систему уравнений

$$\gamma_0 = C_3 + \rho C_2 + \rho(\rho-1)C_1 = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{\beta_0}{\gamma_1}l_0, \\ l_{n+1} &= -\frac{\beta_n}{\gamma_{n+1}}l_n - \frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n+1}}l_{n-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Из уравнения (10) (которое называется определяющим для уравнения (2) в точке $t = 0$) найдем значения $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, и в дальнейшем, взяв какое-либо значение ρ, будем полагать, что в (9) параметр ρ известен, и для него построим решение (8). При $l_0 = 1$ для коэффициента l_n получим

$$l_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{i_1=0}^{n-2k} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2k+2} \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-2} (-1)^{n-k} \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k), \tag{12}$$

где $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ определено в (7).

Рассмотрим форму

$$\begin{gathered} \left[D_{03} + \rho D_{02} + \rho(\rho-1) D_{01}\right] \ldots \\ \ldots \left[D_{n3} + (\rho+n) D_{n2} + (\rho+n-1)(\rho+n) D_{n1}\right] = \\ = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n} \sigma_{i_0, i_1, \ldots, i_n}(\rho, n)\, D_{0i_0} D_{1i_1} \ldots D_{ni_n}, \quad i_0,\ i_1, \ldots, i_n = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{13}$$

Если в этой форме не приводить подобных членов и не объединять в степень равные параметры D_{ji_j}, если они имеются, то коэффициенты $\sigma_{i_0, i_1, \ldots, i_n}(\rho, n)$ есть инварианты относительно замены параметров D_{ji_j} на любые другие. Поскольку каждое слагаемое в числителе l_{n+1} с учетом (9) имеет структуру (13), то, выбирая конкретный коэффициент $\sigma_{i_0, i_1, \ldots, i_n}(\rho, n)$, возле него можно сгруппировать различные степени параметров A_i, B_i, C_i.

Продемонстрируем это на старших степенях B_i.

Если $D_{i3} = B_3$, $D_{i2} = B_2$, $D_{i1} = B_1$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то, как легко вычислить, коэффициент при B_1^{n+1} равен $(\rho-1)\rho^2(\rho+1)^2 \ldots (\rho+n-1)^2(\rho+n)$, при B_2^{n+1} — $\rho(\rho+1)\ldots(\rho+n)$, при B_3^{n+1} — 1.

Так как каждое слагаемое в блоке d_n^1 имеет вид $\alpha_i \gamma_{i+1} \beta_0 \ldots \beta_{i-1} \beta_{i+2} \ldots \beta_n$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то в форме (13) надо положить $D_{i3} = A_3$, $D_{i2} = A_2$, $D_{i1} = A_1$, $D_{i+1,3} = C_3$, $D_{i+1,2} = C_2$, $D_{i+1,1} = C_1$, $D_{j,3} = B_3$, $D_{j,2} = B_2$, $D_{j,1} = B_1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $j \neq i, i+1$, и потому в каждом слагаемом блока d_n^1 есть коэффициент $(\rho-1)\rho^2 \ldots (\rho+n-1)^2(\rho+n)$, умноженный на $A_1 C_1 B_1^{n-1}$, коэффициент $\rho(\rho+1)\ldots(\rho+n)$, умноженный на $A_2 C_2 B_2^{n-1}$, и слагаемое $A_3 C_3 B_3^{n-1}$.

Таким образом, в блоке d_n^1 степень $A_1 C_1 B_1^{n-1}$ входит с коэффициентом

$$\binom{n}{1} (\rho-1)\rho^2 \ldots (\rho+n-1)^2(\rho+n),$$

степень $A_2 C_2 B_2^{n-1}$ — с коэффициентом

$$\binom{n}{1} \rho(\rho+1)\ldots(\rho+n)$$

и степень $A_3 C_3 B_3^{n-1}$ — с коэффициентом $\dbinom{n}{1}$.

Аналогично, в блоке d_{n-1}^2 степень $A_1^2 C_1^2 B_1^{n-3}$ входит с коэффициентом

$$\binom{n-1}{2}(\rho-1)\rho^2\dots(\rho+n-1)^2(\rho+n),$$

степень $A_2^2C_2^2B_2^{n-3}$ — с коэффициентом

$$\binom{n-1}{2}\rho(\rho+1)\dots(\rho+n),$$

степень $A_3^2C_3^2B_3^{n-3}$ — с коэффициентом $\binom{n-1}{2}$.

Продолжая этот процесс, получаем, что числитель в l_{n+1} с точностью до знака имеет следующую структуру:

$$(\rho-1)\rho^2\dots(\rho+n-1)^2(\rho+n)\times$$
$$\times\Bigg[B_1^{n+1}-\binom{n}{1}A_1C_1B_1^{n-1}+\binom{n-1}{2}A_1^2C_1^2B_1^{n-3}-\dots$$
$$\dots+(-1)^s\binom{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{s}A_1^sC_1^sB_1^{n+1-2s}\Bigg]+$$
$$+\rho(\rho+1)\dots(\rho+n)\Bigg[B_2^{n+1}-\binom{n}{1}A_2C_2B_2^{n-1}+$$
$$+\binom{n-1}{2}A_2^2C_2^2B_2^{n-3}-\dots+(-1)^s\binom{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{s}A_2^sC_2^sB_2^{n+1-2s}\Bigg]+$$
$$+B_3^{n+1}-\binom{n}{1}A_3C_3B_3^{n-1}+\binom{n-1}{2}A_3^2C_3^2B_3^{n-2}-\dots$$
$$\dots+(-1)^s\binom{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{s}A_3^sC_3^sB_3^{n+1-2s}+(\dots), \tag{14}$$

где $s=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, а в круглых скобках $(\dots)$ собраны все остальные слагаемые, которые содержат степени параметров A_i, B_i, C_i, сумма показателей которых равна $n+1$, но показатель каждого параметра содержится между 1 и n; коэффициенты при этих степенях — это легко вычисляемые полиномы от ρ степени меньшей $2n+2$.

Далее,

$$\gamma_1\dots\gamma_n=\big[C_3+(\rho+1)C_2+\rho(\rho+1)C_1\big]\dots$$
$$\dots\big[C_3+(\rho+n+1)C_2+(\rho+n)(\rho+n+1)C_1\big]=$$
$$=\rho(\rho+1)^2\dots(\rho+n)^2(\rho+n+1)C_1^{n+1}+$$
$$+(\rho+1)\dots(\rho+n+1)C_2^{n+1}+C_3^{n+1}+(\dots),$$

где в круглых скобках $(\ldots)$ собраны остальные слагаемые формы, которые содержат степени параметров C_1, C_2, C_3, сумма показателей которых равна $n+1$, но показатели каждого параметра находятся между 1 и n; коэффициенты при этих степенях — это некоторые полиномы от ρ степени меньшей $2n+2$.

Таким образом, структура коэффициента l_{n+1} полностью описывается последней формулой и формулой (14). Полиномиальные особенности на асимптотику не влияют, так как числитель и знаменатель, l_{n+1} имеют одного типа полиномиальные особенности.

***Замечание* 2.** Учитывая, что $\gamma_0 = 0$, для чисел γ_n легко получить $\gamma_n = n\big[C_2 + (2\rho + n - 1)C_1\big]$. Что касается области сходимости ряда (8), (12), то согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений [5, с. 536; 6, с. 219] этот ряд сходится равномерно и абсолютно в круге с центром в точке $t = 0$ и радиусом, равным меньшему по модулю корню трехчлена $A_1t^2 + B_1t + C_1$.

Представим ряд (8) в более наглядном виде. Для этого проведем классификацию гиперцепей, что оказывается равносильным перегруппировке членов степенного ряда (8), а это не изменяет область равномерной и абсолютной сходимости вновь полученного степенного ряда.

Базовой гиперцепью назовем такую гиперцепь, у которой два последних элемента имеют разные ранги, т. е. это гиперцепь, которая оканчивается произведением или $\ldots\beta_m\alpha_{m+1}$, или $\ldots\alpha_m\beta_{m+2}$. Тогда небазовая гиперцепь — это такая гиперцепь, у которой, по крайней мере, два последних элемента имеют одинаковые ранги. Заметим, что если небазовая гиперцепь оканчивается элементами второго ранга, то индексы этих элементов имеют одинаковую четность.

К тривиальным базовым гиперцепям отнесем гиперцепи β_0, α_0, $\beta_0\alpha_1$.

Изучим подробнее структуру множества l'_n гиперцепей порядка n, построенных из элементов набора $I''_n = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})$. Все они делятся на базовые и небазовые. Базовые гиперцепи порядка n оканчиваются парами или $\ldots\beta_{n-3}\alpha_{n-2}$, или $\ldots\alpha_{n-3}\beta_{n-1}$. С небазовой гиперцепью порядка n поступим следующим образом: будем отбрасывать от конца гиперцепи элементы одного ранга до тех пор, пока либо появится тривиальная гиперцепь, либо впервые отбрасываемый элемент „встретится" с элементом другого ранга. Сохраняя эту пару, получаем базовую гиперцепь порядка меньшего n. Обратно, имея некоторую базовую гиперцепь порядка $s < n$, составленную из набора $I''_s = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2})$, умножаем ее с соблюдением иерархии на элементы из $I''_n \setminus I''_s$. В результате получим или небазовую гиперцепь порядка n, порожденную данной базовой гиперцепью порядка s, или одну из базовых гиперцепей порядка n.

Число разных базовых гиперцепей порядка n равно $2\delta_{n-3}$. Действительно, любая гиперцепь порядка $n-3$, составленная из элементов набора $I''_{n-3} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-4}; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-5})$ (а их δ_{n-3}) и умноженная на $\beta_{n-3}\alpha_{n-1}$, является базовой гиперцепью порядка n. Иерархия расположения элементов в этой гиперцепи не нарушается, так как любая гиперцепь порядка $n-3$ оканчивается парами или $\ldots\beta_{n-6}\alpha_{n-5}$, или $\ldots\alpha_{n-6}\beta_{n-4}$. Аналогичные рассуждения справедливы для любой гиперцепи порядка $n-3$, умноженной на $\alpha_{n-3}\beta_{n-1}$.

Таким образом, все базовые гиперцепи порядка n можно разбить на два пучка базовых гиперцепей порядка n: $l'_{n-3}\beta_{n-3}\alpha_{n-1}$ и $l'_{n-3}\alpha_{n-3}\beta_{n-1}$.

Следовательно, все гиперцепи порядка n разделяются на два пучка базовых гиперцепей порядка n и небазовые гиперцепи, порожденные базовыми гиперцепями меньшего порядка.

Базовую гиперцепь и порожденные ею небазовые цепи отнесем к одному классу гиперцепей. Каждая базовая гиперцепь из пучка порождает собственный класс гиперцепей. Эти классы не пересекаются, так как порождены разными базовыми гиперцепями из пучка. Таким образом, каждая гиперцепь порядка n принадлежит одному и только одному классу гиперцепей.

В качестве примера запишем все гиперцепи порядков 4 и 5.

Гиперцепи порядка 4: $\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3$, $\alpha_0\beta_2\beta_3$, $\beta_0\alpha_1\beta_3$, $\beta_0\beta_1\alpha_2$, $\alpha_0\alpha_2$. Здесь базовые гиперцепи — $\beta_0\alpha_1\beta_3$, $\beta_0\beta_1\alpha_2$; небазовые гиперцепи — все остальные: первая гиперцепь порождена тривиальной базовой гиперцепью β_0, вторая — базовой гиперцепью $\alpha_0\beta_2$, а последняя — тривиальной базовой гиперцепью α_0.

Гиперцепи порядка 5: $\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, $\alpha_0\beta_2\beta_3\beta_4$, $\beta_0\alpha_1\beta_3\beta_4$, $\beta_0\beta_1\alpha_2\beta_4$, $\beta_0\beta_1\beta_2\alpha_3$, $\alpha_0\alpha_2\beta_4$, $\alpha_0\beta_2\alpha_3$, $\beta_0\alpha_1\alpha_3$. Базовые гиперцепи: $\beta_0\beta_1\alpha_2\beta_4$, $\alpha_0\alpha_2\beta_4$, $\beta_0\beta_1\beta_2\alpha_3$, $\alpha_0\beta_2\alpha_3$. Здесь первые две и две последние образуют пучки. Все остальные гиперцепи — небазовые: первая гиперцепь порождена тривиальной базовой гиперцепью β_0, вторая — базовой гиперцепью $\alpha_0\beta_2$, третья — базовой гиперцепью $\beta_0\alpha_1\beta_3$, а последняя — тривиальной гиперцепью $\beta_0\alpha_1$.

Умножая базовую гиперцепь неограниченно на элементы того же ранга, что и последний элемент этой гиперцепи, получаем расширенный класс гиперцепей, порожденный данной базовой гиперцепью.

Перегруппируем члены степенного ряда (8) относительно расширенных классов гиперцепей. Положим $l_0 = 1$. Расширенный класс гиперцепей, порожденный тривиальной базовой гиперцепью β_0, т. е. $\beta_0, \beta_0\beta_1, \ldots, \beta_0\beta_1\ldots\beta_{k-1}, \ldots$, определяет функцию

$$F_0(t) = -\frac{\beta_0}{\gamma_1}t + \frac{\beta_0\beta_1}{\gamma_1\gamma_2}t^2 - \ldots + (-1)^k\frac{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{k-1}}{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k}t^k + \ldots.$$

Расширенный класс гиперцепей, порожденный тривиальной базовой гиперцепью α_0, т. е. α_0, $\alpha_0\alpha_2, \ldots, \alpha_0\alpha_2, \ldots, \alpha_{2k-2}, \ldots$, определяет функцию

$$F_1(t) = -\frac{\alpha_0}{\gamma_2}t^2 + \frac{\alpha_0\alpha_2}{\gamma_2\gamma_4}t^4 - \ldots + (-1)^k\frac{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{2k-2}}{\gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2k}}t^{2k} + \ldots.$$

Расширенный класс гиперцепей, порожденный тривиальной базовой гиперцепью $\beta_0\alpha_1$, т. е. $\beta_0\alpha_1$, $\beta_0\alpha_1\alpha_3, \ldots, \beta_0\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2k-1}, \ldots$, определяет функцию

$$-\frac{\beta_0 t}{\gamma_1}F_{1/2}(t) = -\frac{\beta_0}{\gamma_1}t\left[-\frac{\alpha_1}{\gamma_3}t^2 + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\gamma_3\gamma_5}t^4 - \ldots + (-1)^k\frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2k-1}}{\gamma_3\gamma_5\cdots\gamma_{2k+1}}t^{2k} + \ldots\right].$$

(Смысл индекса $1/2$ будет пояснен ниже.)

Введем также функции

$$F_0^{(n)}(t) = -\frac{\beta_0}{\gamma_1}t + \ldots + (-1)^n\frac{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-1}}{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}t^n,$$

$$F_1^{(n)}(t) = -\frac{\alpha_0}{\gamma_2}t^2 + \frac{\alpha_0\alpha_2}{\gamma_2\gamma_4}t^4 - \ldots + (-1)^n\frac{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{2n-2}}{\gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2n}}t^{2n},$$

$$F_{1/2}^{(n)}(t) = -\frac{\alpha_1}{\gamma_3}t^2 + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\gamma_3\gamma_5}t^4 - \ldots + (-1)^n \frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2n-1}}{\gamma_3\gamma_5\ldots\gamma_{2n+1}}t^{2n}.$$

Пучки базовых гиперцепей порядка n порождают следующие расширенные классы гиперцепей:

$$l'_{n-3}\alpha_{n-3}\beta_{n-1}, \qquad l'_{n-3}\alpha_{n-3}\beta_{n-1}\beta_n, \qquad l'_{n-3}\alpha_{n-3}\beta_{n-1}\beta_n\beta_{n+1}, \ldots, \tag{15}$$

$$l'_{n-3}\beta_{n-3}\alpha_{n-2}, \qquad l'_{n-3}\beta_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_n, \qquad l'_{n-3}\beta_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_n\alpha_{n+2}, \ldots. \tag{16}$$

Функция, определенная расширенным классом гиперцепей (15), — это ряд

$$-\frac{l_{n-3}\alpha_{n-3}}{\gamma_{n-1}}\left[-\frac{\beta_{n-1}}{\gamma_n}t^n + \frac{\beta_{n-1}\beta_n t^{n+1}}{\gamma_n\gamma_{n+1}} - \ldots\right]. \tag{17}$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках:

$$[\ldots] = \frac{(-1)^{n-1}\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-2}}\times$$

$$\times\left[(-1)^n\frac{\beta_0\ldots\beta_{n-1}}{\gamma_1\ldots\gamma_n}t^n + (-1)^{n+1}\frac{\beta_0\ldots\beta_n}{\gamma_1\ldots\gamma_{n+1}}t^{n+1} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-2}}\left[F_0(t) - F_0^{(n-1)}(t)\right],$$

а значит, (17) приводится к виду

$$(-1)^n\frac{l_{n-3}\gamma_1\ldots\gamma_{n-2}\alpha_{n-3}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-2}}\left[F_0(t) - F_0^{(n-1)}(t)\right].$$

Учитывая, что простейшая базовая гиперцепь в рассматриваемом случае — это $\alpha_0\beta_2$, окончательно для базовых гиперцепей порядка n, $n = 3, 4, \ldots$, заканчивающихся парой элементов $\alpha_{n-3}\beta_{n-1}$, получаем функцию

$$\sum_{n=3}^{\infty} R_n\left[F_0(t) - F_0^{(n-1)}(t)\right],$$

где известные числа

$$R_n = (-1)^n\frac{l_{n-3}\gamma_1\ldots\gamma_{n-2}\alpha_{n-3}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-2}}.$$

Функция, определенная расширенным классом гиперцепей (16), — это ряд

$$-\frac{l_{n-3}\beta_{n-3}}{\gamma_{n-2}}\left[-\frac{\alpha_{n-2}}{\gamma_n}t^n + \frac{\alpha_{n-2}\alpha_n}{\gamma_n\gamma_{n+2}}t^{n+2} + \ldots\right]. \tag{18}$$

Для упрощения этой формулы надо различать случаи: $n = 2k$ и $n = 2k+1$.

Пусть $n = 2k$. Тогда квадратную скобку в (18) можно записать таким образом:

$$\frac{(-1)^{k-1}\gamma_2\ldots\gamma_{2k-2}}{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{2k-4}}\times$$

$$\times \left[(-1)^k \frac{\alpha_0 \dots \alpha_{2k-2}}{\gamma_2 \dots \gamma_{2k}} t^{2k} + (-1)^{k+1} \frac{\alpha_0 \dots \alpha_{2k}}{\gamma_2 \dots \gamma_{2k+2}} t^{2k+2} + \dots \right] =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1} \gamma_2 \dots \gamma_{2k-2}}{\alpha_0 \dots \alpha_{2k-4}} \left[F_1(t) - F_1^{(k-1)}(t)\right],$$

и окончательно (18) преобразуется к виду

$$(-1)^k \frac{l_{2k-3} \beta_{2k-3} \gamma_2 \dots \gamma_{2k-4}}{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-4}} \left[F_1(t) - F_1^{(k-1)}(t)\right].$$

Учитывая, что простейшая базовая гиперцепь в рассматриваемом случае — это $\beta_0\beta_1\alpha_2$, для базовых гиперцепей любого порядка, заканчивающихся парой элементов $\beta_{2k-3}\alpha_{2k-2}$, $k = 2, 3, \dots$, получаем функцию

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k \left[F_1(t) - F_1^{(k-1)}(t)\right],$$

где известные числа

$$P_k = \frac{(-1)^k l_{2k-3} \beta_{2k-3} \gamma_2 \dots \gamma_{2k-4}}{\alpha_0 \alpha_4 \dots \alpha_{2k-4}}.$$

Пусть $n = 2k + 1$. Тогда квадратную скобку в (18) преобразуем таким образом:

$$\frac{(-1)^{k-1} \gamma_3 \gamma_5 \dots \gamma_{2k-1}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2k-3}} \times$$

$$\times \left[(-1)^k \frac{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2k-1}}{\gamma_3 \gamma_5 \dots \gamma_{2k+1}} t^{2k+1} + (-1)^{k+1} \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{2k+1}}{\gamma_3 \dots \gamma_{2k+3}} t^{2k+3} + \dots \right] =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1} \gamma_3 \gamma_5 \dots \gamma_{2k-1} t}{\alpha_1 \dots \alpha_{2k-3}} \left[F_{1/2}(t) - F_{1/2}^{(k-1)}(t)\right],$$

а значит, окончательно ряд (18) преобразуется в функцию

$$(-1)^k \frac{l_{2k-2} \beta_{2k-2} \gamma_3 \dots \gamma_{2k-3} t}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2k-3}} \left[F_{1/2}(t) - F_{1/2}^{(k-1)}(t)\right].$$

Учитывая, что простейшие базовые гиперцепи в рассматриваемом случае — это $\beta_0\beta_1\beta_2\alpha_3$ или $\alpha_0\beta_2\alpha_3$, для базовых гиперцепей любого порядка, заканчивающихся парой $\beta_{2k-2}\alpha_{2k-1}$, $k = 2, 3, \dots$, получаем функцию

$$t \sum_{k=2}^{\infty} S_k \left[F_{1/2}(t) - F_{1/2}^{(k-1)}(t)\right],$$

где известные числа

$$S_k = \frac{(-1)^k l_{2k-2} \beta_{2k-2} \gamma_3 \gamma_5 \dots \gamma_{2k-3}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2k-3}},$$

но $S_2 = l_2\beta_2/\alpha_1$.

Таким образом, решение уравнения (2) представлено в виде

$$u(t) = t^{\rho}\Biggl\{1 + F_0(t) - \frac{\beta_0 t}{\gamma_1}F_{1/2}(t) + F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty}\Biggl[R_{k+1}\bigl(F_0(t) - F_0^{(k)}(t)\bigr) +$$

$$+ P_k\bigl(F_1(t) - F_1^{(k-1)}(t)\bigr) + S_k t\Bigl(F_{1/2}(t) - F_{1/2}^{(k-1)}(t)\Bigr)\Biggr]\Biggr\}. \qquad (19)$$

Запишем теперь функции $F_0(t)$, $F_1(t)$ и $F_{1/2}(t)$ в ином виде, воспользовавшись разложениями на множители чисел α_n, β_n и γ_n из (9).

Пусть $\alpha_n = A_1(n+p_1)(n+p_2)$, $\beta_n = B_1(n+q_1)(n+q_2)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Учитывая, что $\gamma_0 = 0$, получаем $\gamma_n = C_1 n(n+\sigma-1)$, где $\sigma = 2\rho + C_2/C_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$F_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(q_1)_k(q_2)_k}{(1)_k(\sigma)_k}\frac{(-1)^k B_1^k}{C_1^k}t^k = F\left(q_1, q_2; \sigma; -\frac{B_1}{C_1}t\right) - 1,$$

где F — гипергеометрическая функция, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$, $(1)_k = k!$,

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{p_1}{2}\right)_k\left(\frac{p_2}{2}\right)_k}{(1)_k\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)_k}(-1)^k\frac{A_1^k}{C_1^k}t^{2k} = F\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}; \frac{\sigma+1}{2}; -\frac{A_1}{C_1}t^2\right) - 1.$$

Обозначим стандартную гипергеометрическую функцию

$$F(a_1, a_2; b_1; t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k}{(1)_k(b_1)_k}t^k$$

следующим образом:

$$F(a_1, a_2; b_1; t) \equiv F(a_1, a_2; 1, b_1; t).$$

Введем функцию

$$F_{1/2}(a_1, a_2; 1, b_1; t) = F\left(a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}, b_1 + \frac{1}{2}; t\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)_k\left(a_2 + \frac{1}{2}\right)_k}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)_k\left(b_1 + \frac{1}{2}\right)_k}t^k.$$

Назовем эту функцию гипергеометрической функцией половинного порядка. Тогда

$$F_{1/2}(t) = F_{1/2}\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}; 1, \frac{1+\sigma}{2}; -\frac{A_1}{C_1}t^2\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\times$$

$$\times\frac{(1+p_1)(3+p_1)\ldots(2k-1+p_1)(1+p_2)(3+p_2)\ldots(2k-1+p_2)}{3\cdot 5\ldots(2k+1)(\sigma+2)(\sigma+4)\ldots(\sigma+2k)}\frac{A_1^k}{C_1^k}t^{2k}.$$

Если $B_1 = 0$, то $\beta_n = B_2(n + \sigma_1)$, где $\sigma_1 = B_3/B_2 + \rho$, и $F_0(t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $F_0(t) = F\left(\sigma_1; \sigma; -\dfrac{B_2}{C_1}t\right) - 1$; если $A_1 = 0$, то $\alpha_n = A_2(n+\sigma_2)$, где $\sigma_2 = A_3/A_2+\rho$, и $F_1(t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $F_1(t) = F\left(\dfrac{\sigma_2}{2}; \dfrac{\sigma+1}{2}; -\dfrac{A_2}{C_1}t^2\right) - 1$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (2).

1. Пусть $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Тогда $\alpha_n = 0$. Трехчленное рекуррентное уравнение (11) переходит в двучленное типа (1) и

$$l_{n+1} = (-1)^n \frac{\beta_0\beta_1 \dots \beta_n}{\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n} l_0.$$

Решение дифференциального уравнения

$$t^2(B_1t + C_1)u'' + t(B_2t + C_2)u' + (B_3t + C_3)u = 0$$

определяется формулой

$$u(t) = t^\rho \left[1 + F_0(t)\right] = t^\rho F\left(q_1, q_2; \sigma; -\frac{B_1}{C_1}t\right).$$

Этот результат следует также из формулы (19), так как функции

$$F_1(t) \equiv F_{1/2}(t) \equiv R_n\left[F_0(t) - F_0^{(n-1)}(t)\right] \equiv 0.$$

2. Пусть $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Тогда $\beta_n = 0$. Трехчленное рекуррентное уравнение (11) переходит в двучленное

$$l_{n+1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n+1}} l_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

а) $l_0 \neq 0$ и $l_1 = 0$. Тогда $l_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \dots,$

$$l_{2k} = (-1)^k \frac{\alpha_0\alpha_2 \dots \alpha_{2k-2}}{\gamma_2\gamma_4 \cdots \gamma_{2k}} l_0,$$

и решение уравнения

$$t^2(A_1t^2 + C_1)u'' + t(A_2t^2 + c_2)u' + (A_3t^2 + C_3)u = 0$$

определяется формулой

$$u(t) = t^\rho \left[1 + F_1(t)\right] = t^\rho F\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}; \frac{\sigma+1}{2}; -\frac{A_1}{C_1}t^2\right).$$

б) $l_0 = 0$ и $l_1 \neq 0$. Тогда $l_{2k} = 0$, $k = 0, 1, \dots$. В этом случае определяющее уравнение $\gamma_1 = C_3 + (\rho+1)C_2 + (\rho+1)\rho C_1 = 0$ имеет корни $\rho_1 - 1$ и $\rho_2 - 1$, где ρ_1 и ρ_2 — корни уравнения $\gamma_0 = 0$. Подставляя в (9) вместо ρ параметр $\rho - 1$, получаем $\alpha_{2k+1} = \alpha_{2k}$, $\gamma_{2k+1} = \gamma_{2k}$, где α_{2k} и γ_{2k} вычислены по формуле (9) для параметра ρ. Тогда

$$l_{2k+1} = (-1)^k \frac{\alpha_0\alpha_2 \ldots \alpha_{2k-2}}{\gamma_2\gamma_4 \ldots \gamma_{2k}} l_1.$$

Решение дифференциального уравнения (2) определяется при $l_1 = 1$ формулой

$$u(t) = t^{\rho-1}(l_1 t + l_3 t^3 + \ldots) = t^{\rho}(1 + F_1(t)).$$

Таким образом, случай б) не дал иного решения по сравнению со случаем а).

Тот же результат получается из формулы (19), так как $F_0(t) \equiv 0$, $P_k = S_k = 0$ и

$$F_1(t) + 1 = F\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}; \frac{\sigma+1}{2}; -\frac{A_1}{C_1}t^2\right).$$

В заключение остановимся на решениях уравнения (2), представленных в виде конечных сумм степеней t. Естественным условием вырождения ряда (8) в конечную сумму степени $\rho + N - 1$ относительно t является равенство нулю коэффициентов $l_N, l_{N+1}, \ldots$ этого ряда.

Вопрос многочленности решения подробно изучен в работах [7] (гл. III. § 3) и [8] (гл. IV. § 3, 4), где приведен алгоритм нахождения многочленных решений, коэффициенты которых при степенях t также удовлетворяют рекуррентному уравнению, пригодный как для регулярной, так и иррегулярной особой точки.

Для изучаемого уравнения (2), вследствие рекуррентного уравнения (11), условия многочленности решения проще, чем в [7, 8], и они уже учитывают структуру коэффициента l_N и параметры уравнения (2).

1. Если в (11) $l_N = 0$ и $\alpha_{N-1} = 0$, то $l_{N+k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. рекуррентность уравнения (11) обрывается на N шаге, а значит, при построении гиперцепей используется набор $I''_N = (\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}; \alpha_0, \ldots, \alpha_{N-2})$. Поэтому функции $F_0(t)$, $F_1(t)$ и $F_{1/2}(t)$ — это полиномы от t.

Из (14) следует, что уравнение $l_N = 0$ — это алгебраическое уравнение степени N относительно каждого из параметров B_1, B_2, B_3 и степени $[N/2]$ относительно каждого из остальных параметров.

Лемма 4. *Если A_1, A_2, A_3 таковы, что для каждого из корней определяющего уравнения* (10) $\alpha_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *то уравнения* $l_{n+1} = 0$ *и* $l_n = 0$ *не могут иметь общих корней.*

Доказательство очевидно, так как если τ — общий корень уравнений $l_{n+1} = 0$ и $l_n = 0$, то из (11) следует, что $l_k(\tau) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Но это приводит к противоречивому равенству $\alpha_0 l_0 = 0$.

2. Если в (11) $\alpha_{N-1} = \alpha_N = \beta_N = 0$, то $l_{N+k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и функции $F_0(t)$,$F_1(t)$ и $F_{1/2}(t)$ — полиномы от t.

Продемонстрируем этот случай на дифференциальном уравнении Гойна

$$t(t-1)(t-\sigma)u'' + \big[dt(t-\sigma) + c(t-1)(t-\sigma) +$$

$$+ (a+b+1-c-d)t(t-1)\big]u' + (abt - \lambda)u = 0.$$

Это уравнение получается из (2) при

$$A_1 = 1, A_2 = a+b+1, A_3 = ab,$$

$$B_1 = -(\sigma+1), B_2 = d-a-b-1-(c+d)\sigma, B_3 = -\lambda,$$

$$C_1 = \sigma, C_2 = c\sigma, C_3 = 0.$$

Определяющее уравнение $\gamma_0 = \rho\sigma(c + \rho - 1) = 0$ дает при $\sigma \neq 0$ корни $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 1 - c$. При $\rho = 0$

$$\alpha_n = (n + a)(n + b), \qquad \gamma_n = n\sigma(c + n - 1),$$

$$\beta_n = -(\sigma + 1)n^2 + \big[\sigma - a - b - (c + d)\sigma + d\big]n - \lambda.$$

Из равенств $\alpha_{N-1} = \alpha_N = 0$ получаем $\alpha_n = (n - N)(n - N + 1)$, т. е. $a = -N$; $b = -N + 1$. Из равенства $\beta_N = 0$ следует, что

$$\lambda_N = N\left[(d + N - 1)(1 - \sigma) - c\sigma\right], \qquad \beta_n = \frac{n - N}{N}\left[\lambda_N - nN(\sigma + 1)\right],$$

а уравнение Гойна имеет вид

$$t(t - 1)(t - \sigma)u'' + \left\{(2 - 2N)t^2 + \left[\frac{\lambda_N}{N} + (N - 1)(\sigma + 1)\right]t + c\sigma\right\}u' +$$

$$+ \left[N(N - 1) - \lambda_N\right]u = 0.$$

Тогда:

1) $N = 0$, $\lambda_0 = 0$, $u_0(t) \equiv 1$;

2) $N = 1$, $\lambda_1 = d(1 - \sigma) - c\sigma$, $u_1(t) = 1 + \dfrac{\lambda_1}{c\sigma}t$;

3) $N = 2$, $\lambda_2 = 2\left[(d + 1)(1 - \sigma) - c\sigma\right]$,

$$\alpha_n = (n - 2)(n - 1), \qquad \beta_n = \frac{n - 2}{2}\big[\lambda_2 - 2n(\sigma + 1)\big],$$

$$u_2(t) = 1 + \frac{\lambda_2}{\sigma c}t + \left[\frac{\lambda_2\left[\lambda_2 - 2(\sigma + 1)\right]}{4\sigma^2 c(c + 1)} - \frac{1}{\sigma(c + 1)}\right]t^2;$$

4) $N = 3$, $\lambda_3 = 3\big[(d + 2)(1 - \sigma) - c\sigma\big]$, $\beta_n = \dfrac{n - 3}{3}t\big[\lambda_3 - 3n(\sigma + 1)\big]$,

$$\alpha_n = (n - 3)(n - 2),$$

$$u_3(t) = 1 + \frac{\lambda_3}{c\sigma}t + \left[\frac{\lambda_3\left[\lambda_3 - 3(\sigma + 1)\right]}{3c(c + 1)\sigma^2} - \frac{3}{\sigma(c + 1)}\right]t^2 +$$

$$+ \left[\frac{\lambda_3\left[\lambda_3 - 3(\sigma + 1)\right]\left[\lambda_3 - 6(\sigma + 1)\right]}{27c(c + 1)(c + 2)\sigma^3} -\right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_3 - 6(\sigma + 1)}{3(c + 1)(c + 2)\sigma^2} - \frac{2\lambda_3}{3c(c + 2)\sigma^2}\right]t^3.$$

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 589 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
3. *Славянов С., Лай В.* Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. – С.-Петербург: Невский диалект, 2002. – 311 с.
4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

5. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. – 719 с.
6. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
7. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения (метод Фробениуса – Латышевой). – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – 393 с.
8. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С.* Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вища шк., 1974. – 135 с.

Получено 03.04.06,
после доработки — 17.09.07